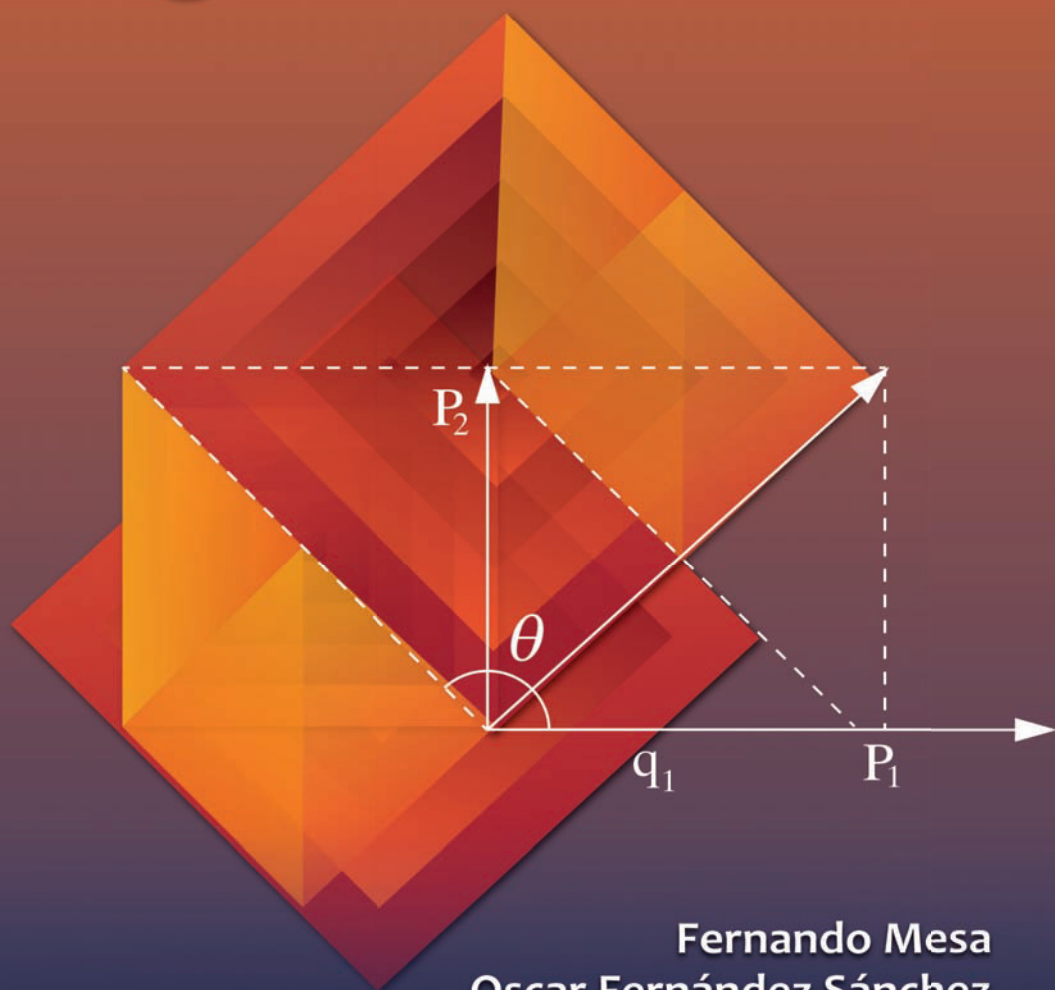


Introducción al Álgebra lineal



Fernando Mesa
Oscar Fernández Sánchez
Edgar Alirio Valencia Angulo

ECOE EDICIONES



FERNANDO MESA

Licenciado en matemáticas, graduado de la Universidad Tecnológica de Pereira con honores. Tiene estudios de posgrado en Matemáticas, Instrumentación Física y Docencia Universitaria. Con experiencia de más de 20 años, profesor titular del Departamento de Matemáticas de la Universidad Tecnológica de Pereira en donde se ha destacado como directivo e investigador. E-mail: femesa@utp.edu.co



OSCAR FERNÁNDEZ SÁNCHEZ

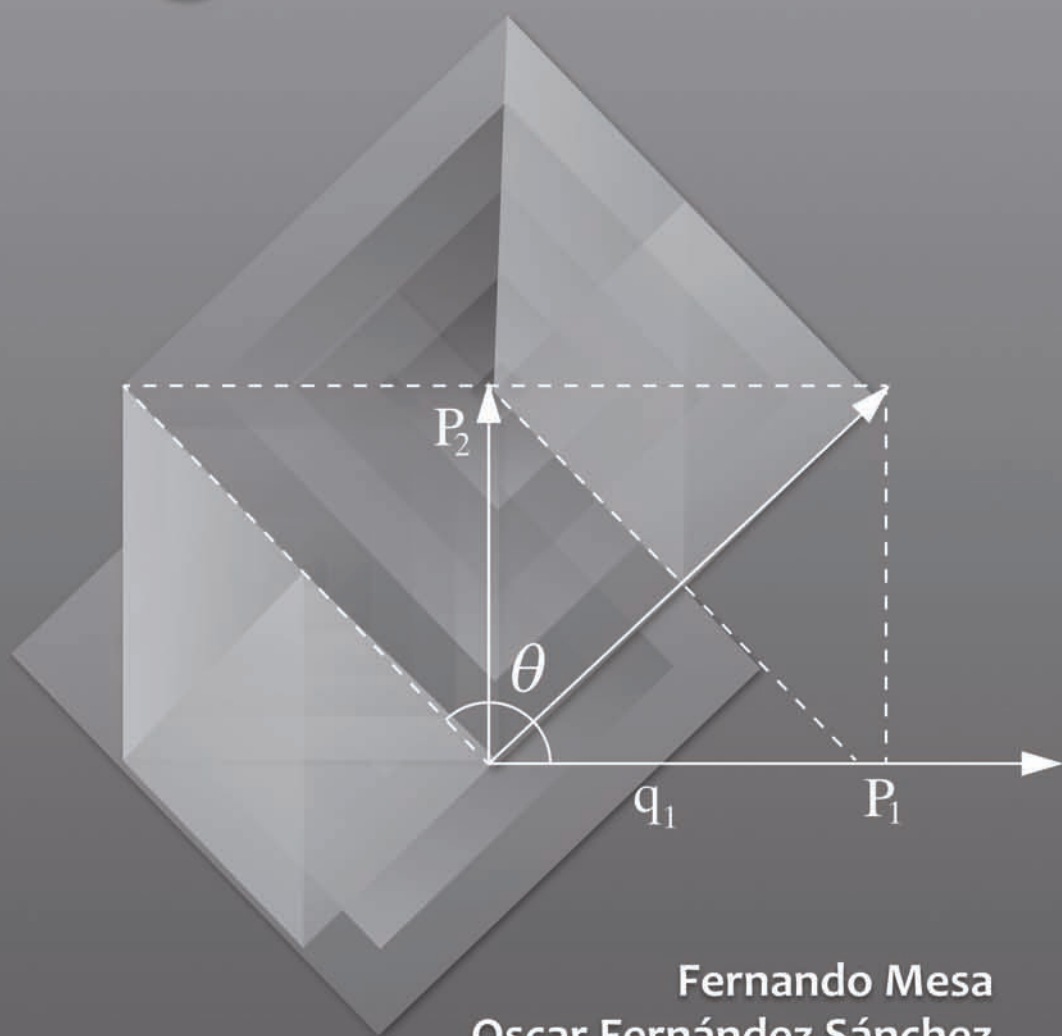
Licenciado en Matemáticas de la Universidad del Cauca, Magíster en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle, candidato a Doctor en Ciencias de la Educación de Rudecolombia. Actualmente, profesor asociado de planta del Departamento de Matemáticas y director de la Maestría en Enseñanza de la Matemática de la Universidad Tecnológica de Pereira. Líder del Grupo de Investigación en Pensamiento Matemático y Comunicación, Gipemac. E-mail: oscarf@utp.edu.co



EDGAR ALIRIO VALENCIA ANGULO

Matemático, con Maestría en Ciencias Matemáticas de la Universidad del Valle; Cinco años de experiencia como profesor de planta en la modalidad de profesor asistente de la Universidad Tecnológica de Pereira. E-mail: evalencia@utp.edu.co

Introducción al Álgebra lineal



Fernando Mesa
Oscar Fernández Sánchez
Edgar Alirio Valencia Angulo

Catalogación en la publicación – Biblioteca Nacional de Colombia

Mesa, Fernando

Introducción al álgebra lineal / Fernando Mesa, Edgar Alirio Valencia Angulo, Oscar Fernández Sánchez. – 1ª. ed. -- Bogotá : Ecoe Ediciones, 2012.

222 p. – (Ciencias exactas. Matemáticas)

ISBN 978-958-648-776-4

1. Álgebras lineales I. Fernández Sánchez, Oscar II. Valencia Angulo, Edgar Alirio III. Título IV. Serie

CDD: 512.5 ed. 20

CO-BoBN– a802302

Colección: Ciencias Exactas

Área: Matemáticas

Primera edición: Bogotá, D.C., 2012

ISBN: 978-958-648-776-4

© Fernando Mesa
e-mail: femesa@utp.edu.co

© Edgar Alirio Valencia Angulo
e-mail: evalencia@utp.edu.co

© Oscar Fernández Sánchez
e-mail: oscarf@utp.edu.co

Universidad Tecnológica de Pereira
Vereda La Julita - Pereira - Risaralda

© Ecoe Ediciones Ltda.
E-mail: correo@ecoeediciones.com
www.ecoeediciones.com
Carrera 19 No. 63C-32, Pbx. 2481449, Fax. 3461741 - Bogotá D.C.

Coordinación editorial: Alexander Acosta Quintero

Carátula: Edwin Penagos Palacio

Impresión: Imagen Editorial Impresores

e-mail: imagenimvega@yahoo.com

Impreso y hecho en Colombia.

INTRODUCCIÓN AL ÁLGEBRA LINEAL

Fernando Mesa

Docente Departamento de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

Edgar Alirio Valencia Angulo

Docente Departamento de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

Oscar Fernández Sánchez

Docente Departamento de Matemáticas

Universidad Tecnológica de Pereira

Febrero de 2012

Índice general

Índice general	2
1. Vectores rectas y planos	5
1.1. Vectores en el plano (\mathbb{R}^2)	5
1.1.1. Operaciones entre vectores en \mathbb{R}^2	9
1.1.2. Producto escalar y las proyecciones en \mathbb{R}^2	12
1.1.3. Propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar	14
1.1.4. Vector en \mathbb{R}^3	15
1.2. Rectas y planos en el espacio	19
1.2.1. Rectas paralelas y perpendiculares	21
1.2.2. Planos	24
1.3. Ejercicios resueltos del capítulo 1	30
1.4. Ejercicios del capítulo 1	39
2. Matrices	54
2.1. Operaciones entre matrices	54
2.2. Sistema de ecuaciones lineales	59
2.2.1. Solución de sistemas de ecuaciones lineales	59
2.2.2. Inversas de matrices cuadradas	63
2.2.3. Método para determinar A^{-1}	66
2.2.4. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices inversas	68
2.3. Ejercicios resueltos del capítulo 2	71
2.4. Ejercicios del capítulo 2	80
3. Determinantes	88
3.1. Geometría del determinante 2×2	89
3.2. Regla de Sarrus para un determinante 3×3	90
3.3. El menor (i, j) de una matriz	91
3.4. El cofactor de (i, j) de una matriz	92
3.5. Definición del determinante	92
3.6. Cálculo de la inversa de una matriz usando determinantes	95
3.7. Ejercicios resueltos del capítulo 3	99
3.8. Ejercicios del capítulo 3	104

4. Espacios vectoriales	109
4.1. Subespacios vectoriales	113
4.2. Combinaciones lineales	115
4.3. Dependencia lineal	116
4.4. Bases de espacios vectoriales	119
4.5. Rango y nulidad de una matriz	121
4.5.1. Imagen de una matriz	124
4.6. Cambio de base	127
4.7. Ejercicios resueltos del capítulo 4	133
4.8. Ejercicios del capítulo 4	140
5. Transformaciones lineales	144
5.1. Núcleo y recorrido	149
5.2. Isomorfismos	156
5.3. Ejercicios resueltos	159
5.4. Ejercicios del capítulo 5	166
6. Espacios euclideos	171
6.1. Producto escalar	171
6.2. Bases ortonormales	175
6.3. Proyección ortogonal	177
6.4. Ejercicios resueltos	181
6.5. Ejercicios Propuestos	187
7. Vectores y valores propios	191
7.1. Matrices semejantes y diagonalización	196
7.2. Transformación lineal adjunta	200
7.3. Transformaciones lineales hermitianas	202
7.4. Problemas y ejercicios resueltos	203

Presentación

Esta obra ha sido realizada para que sea usada como texto guía en los cursos de Álgebra Lineal que se ofrecen en la Universidad Tecnológica da Pereira en los distintos programas de ingenierías, y el programa de licenciatura en matemáticas y física.

Se desarrollaron siete capítulos, en los que sin perder de vista la formalidad de los contenidos el lector podrá encontrarse con una presentación sencilla, practica y amena, haciendo posible un primer acercamiento al estudio del álgebra lineal. Es así como en el capítulo 1 se definen los vectores, rectas y planos con una variedad de ejemplos y ejercicios. Los capítulos 2 y 3 se concentran en tratar lo referente a matrices y determinantes con un gran número de ejemplos y ejercicios que le permiten al lector afianzar los resultados que aquí se presentan. En el capítulo 4 definimos los espacios vectoriales de tal manera que permita al alumno avanzar notablemente hacia el cumplimiento del paradigma tradicional en cuanto a las operaciones de suma y multiplicación por un escalar y el estudio de otras estructuras algebraicas diferentes a las de los reales. El capítulo 5 se refiere a uno de los temas más robustos del álgebra lineal como son las transformaciones lineales sus propiedades y el teorema de isomorfismo entre el espacio de las transformaciones lineales y el de matrices, hermosamente tratado. Se introduce en un capítulo 6 los espacios euclideos, en este capítulo se da la definición y se presentan los resultados más importantes en este espacio. Por último en el capítulo 7 llegamos a la conclusión del curso con el capítulo de los valores y vectores propios para aplicar todo lo visto en el texto en temas tan importantes como diagonalización de una matriz.

Es de notar que en cada uno de estos capítulos nos preocupamos por entregar una gran variedad de ejemplos, lo que permite al estudiante desarrollar los ejercicios y problemas que se proponen.

Por último queremos manifestar, que nos hacemos responsable de los errores que pueden llegarse a filtrar en esta primera edición y agradecemos de antemano las sugerencias y observaciones que pudieran hacernos llegar.

Capítulo 1

Vectores rectas y planos

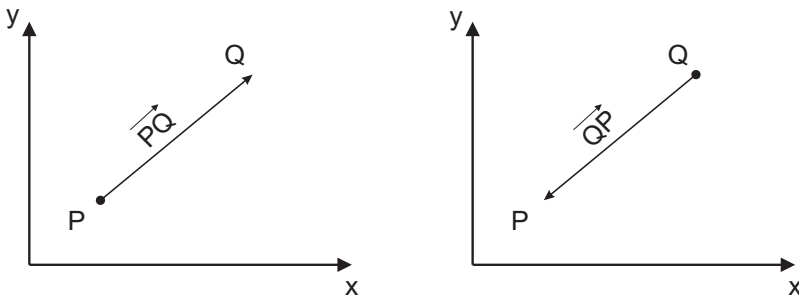
Los vectores eran utilizados en mecánica y en objetos que tenían ciertas velocidades, a finales del siglo *XVII*. Pero este concepto no tuvo repercusión entre los matemáticos de la época, sino hasta el siglo *XIX*, cuando Gauus usa implícitamente la suma vectorial en la representación geométrica de los números complejos en el plano.

El paso siguiente lo da Hamilton cuando inicia el estudio de los vectores. Se debe a él el nombre de vector, producto de la relación de un sistema de números complejos de cuatro unidades, denominados cuaterniones, muy usados hoy en día para el trabajo con rotaciones de objetos en el espacio $3D$. Actualmente, en casi todas las áreas de la física se usa el concepto de vector.

En este capítulo estudiaremos la noción de vector en \mathbb{R}^2 y \mathbb{R}^3 desde el punto de vista geométrico y desde el punto de vista algebraico.

1.1. Vectores en el plano (\mathbb{R}^2)

Sean P y Q dos puntos en el plano. Entonces el segmento de recta dirigido de P a Q , denotado por \overrightarrow{PQ} , es el segmento de recta que va de P a Q .

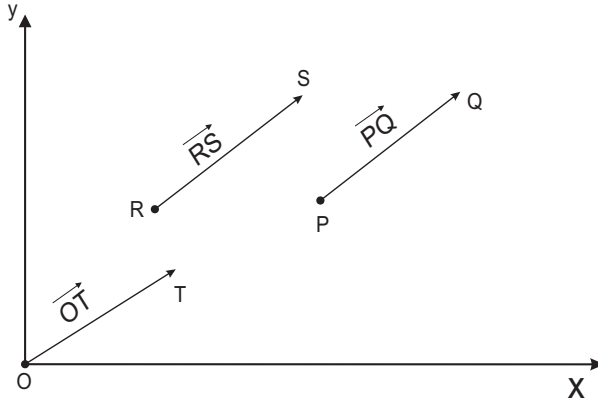


Los segmentos de rectas dirigidos \overrightarrow{PQ} y \overrightarrow{QP} son distintos, puesto que tienen direcciones opuestas.

Observación

1. El punto P en el segmento dirigido \overrightarrow{PQ} es el punto inicial y Q es el final.

2. Si \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{RS} y \overrightarrow{OT} son tres segmentos dirigidos con igual longitud e igual dirección, se dice que son equivalentes sin importar dónde se localizan con respecto al origen. \overrightarrow{PQ} , \overrightarrow{RS} y \overrightarrow{OT} son equivalentes.



Definición geométrica de un vector

El conjunto de todos los segmentos dirigidos equivalentes a un segmento de recta dado se llama vector. Cualquier segmento de recta en ese conjunto se llama una representación del vector.

Definición analítica de un vector

Un vector en el plano es una pareja ordenada de números reales (a, b) . Los números a, b son llamados componentes del vector (a, b) , el vector cero es $(0, 0)$. Por lo tanto

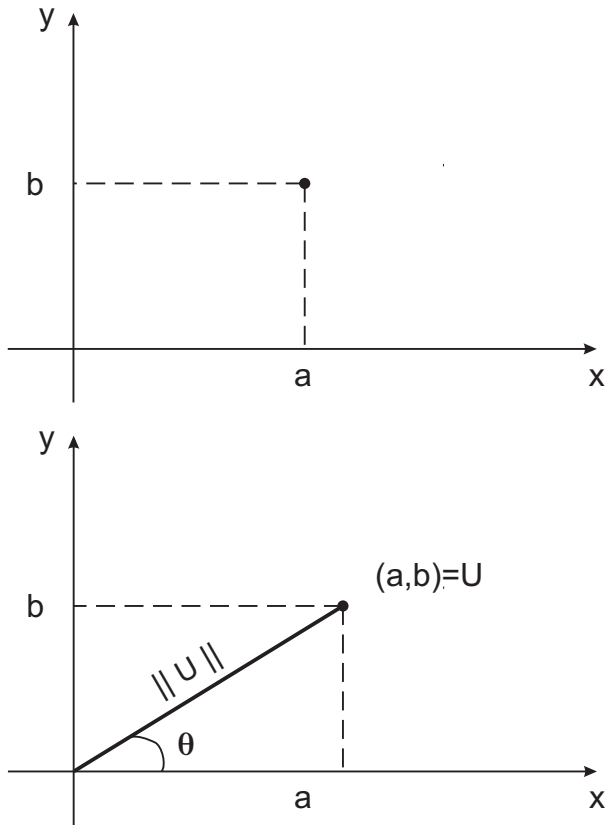
$$\mathbb{R}^2 = \{(a, b) : a, b \in \mathbb{R}\}.$$

Los elementos de \mathbb{R}^2 son vectores, los cuales se representan en el plano cartesiano mediante puntos.

Decimos también que dos vectores del plano son iguales si y sólo si sus componentes son iguales; $\vec{U} = (a, b)$ y $\vec{V} = (c, d)$ si $a = c$ y $b = d$.

Definimos la norma o magnitud de un vector $\vec{U} = (a, b)$ y la denotamos por $\|\vec{U}\|$ como $\|\vec{U}\| = \sqrt{a^2 + b^2}$. Geométricamente $\|\vec{U}\|$ es la distancia que hay del punto $(0, 0)$ al punto (a, b) .

Definición 1.1. Se define la dirección de un vector $\vec{U} = (a, b)$ como el ángulo θ , medido en radianes que forma el vector con el lado positivo del eje x . Escogemos $\theta \in [0, 2\pi)$ si $b \neq 0$, $\tan \theta = \frac{a}{b}$.



Nota. Como $\tan \theta$ es una función periódica con periodo π , entonces si $b \neq 0$ siempre existen dos valores en $[0, 2\pi)$, por lo tanto es necesario determinar el cuadrante del vector \vec{U} .

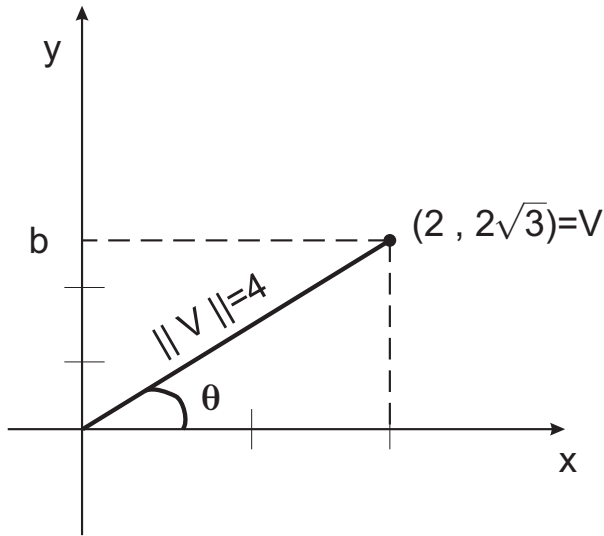
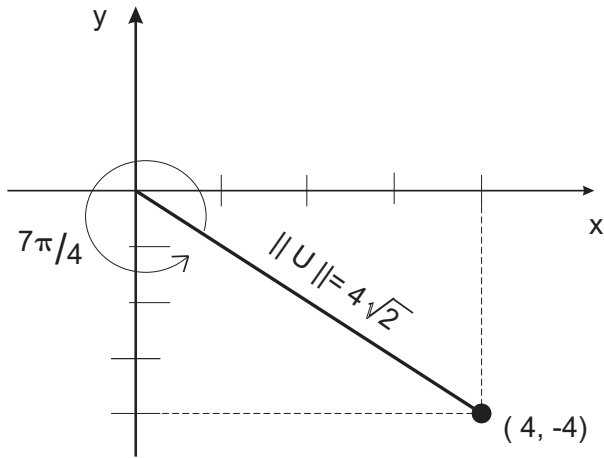
Ejemplo 1.1. Hallar la norma y la dirección de los vectores:

$$a) \quad \vec{U} = (4, -4) \quad b) \quad \|\vec{V}\| = (2, 2\sqrt{3}) \quad c) \quad \|\vec{W}\| = (0, b).$$

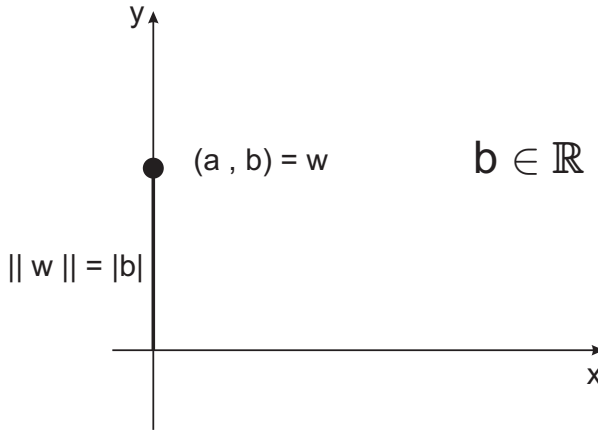
Solución 1.1.

a)

$$\begin{aligned} \|\vec{U}\| &= \sqrt{4^2 + (-4)^2} = \sqrt{16 + 16} = \sqrt{32} = 4\sqrt{2}, \\ \tan \theta &= \frac{4}{-4} = -1, \quad \arctan(-1) = \frac{7\pi}{4}. \end{aligned}$$



b) $\|\vec{V}\| = \sqrt{(2^2) + (2\sqrt{3})^2} = \sqrt{4 + 12} = 4$, $\tan \theta = \frac{2}{2\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}}$, $\theta = \arctan\left(\frac{1}{\sqrt{3}}\right) = \frac{\pi}{6}$.



c) $\theta = \frac{\pi}{2}$.

Definición 1.2. Se tiene $\vec{V} = (a, b)$ y se dice que \vec{V} es unitario si y sólo si $\|\vec{V}\| = 1$.

Definición 1.3. Sean $P_1(x_1, y_1)$ y $P_2(x_2, y_2)$ dos puntos en el plano. Definimos la distancia entre los puntos P_1 y P_2 como:

$$d = |\overline{P_1 P_2}| = d(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}.$$

Ejemplo 1.2. Encuentre el valor de λ , si existe de modo que los puntos P y Q se encuentren a 5 unidades de distancia.

a) $P(-5, 0), Q(\lambda, 4)$

b) $P(3, 2), Q(\lambda, 1)$.

Solución 1.2.

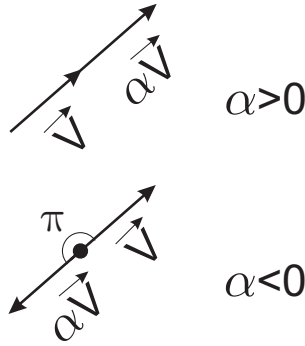
Se deja como ejercicio.

1.1.1. Operaciones entre vectores en \mathbb{R}^2

Sea $\vec{V} \in \mathbb{R}^2$ distinto de cero y $\alpha \in \mathbb{R}$, entonces $\alpha\vec{V} \in \mathbb{R}^2$ y está dado por $\alpha\vec{V} = \alpha(a, b) = (\alpha a, \alpha b)$.

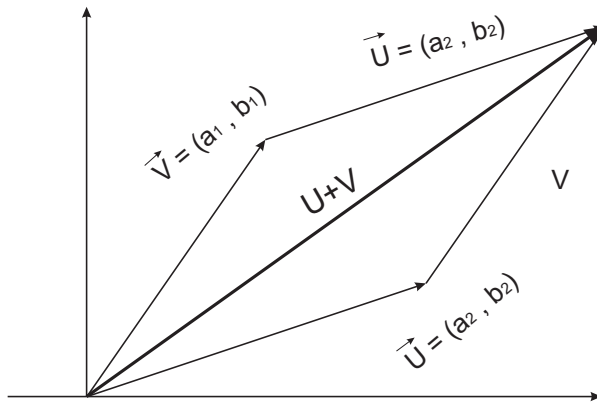
Observación.

- 1) La dirección de $\alpha\vec{V}$ es igual a la dirección de \vec{V} si $\alpha > 0$.
- 2) $\alpha\vec{V}$ es igual a la dirección de $-\vec{V}$ si $\alpha < 0$.



Suma de Vectores

Si $\vec{V} = (a_1, b_1)$ y $\vec{U} = (a_2, b_2)$, entonces la suma analítica de estos dos vectores se define como: $\vec{V} + \vec{U} = (a_1, b_1) + (a_2, b_2) = (a_1 + a_2, b_1 + b_2)$. Geométricamente la suma de estos dos vectores se representa de la siguiente manera:



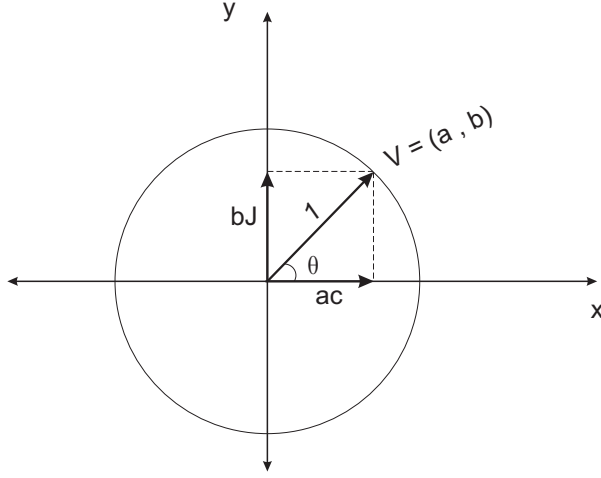
Vector Unitario

Un vector unitario $\vec{V} = (a, b)$ es un vector de norma 1:

$$\|\vec{V}\| = \sqrt{a^2 + b^2} = 1,$$

de esta definición se tiene que

$$\begin{aligned} \cos \theta &= \frac{a}{1} \Rightarrow a = \cos \theta \\ \sin \theta &= \frac{b}{1} \Rightarrow b = \sin \theta \\ \vec{V} &= (\cos \theta, \sin \theta), \end{aligned}$$



donde θ es llamado ángulo director.

Nota. Si \vec{V} es un vector diferente de cero, entonces $\vec{U} = \frac{\vec{V}}{\|\vec{V}\|}$ es un vector unitario con la misma dirección de \vec{V} .

Ejemplo 1.3. Halle un vector \vec{V} si $\|\vec{V}\| = 4$ y el ángulo director es $\theta = \frac{3\pi}{4}$.

Solución 1.3.

Sea $\vec{U} = (\cos \theta, \sin \theta) = \left(\cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4}\right)$, $\vec{V} = 4\vec{U} = 4\left(\cos \frac{3\pi}{4}, \sin \frac{3\pi}{4}\right)$.

Definición 1.4. (combinación lineal). Sean $\vec{U}_1, \vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k \in \mathbb{R}^2$. El vector \vec{U} es combinación lineal de $\vec{V}_1, \dots, \vec{V}_k$ si existen escalares (números reales) $\lambda_1, \dots, \lambda_k$ tales que

$$\vec{U} = \lambda_1 \vec{U}_1 + \lambda_2 \vec{U}_2 + \dots + \lambda_k \vec{U}_k.$$

Ejemplo 1.4. Determinar todos los vectores que son combinación lineal de $\vec{V}_1 = (1, 3)$ y $\vec{V}_2 = (-2, 6)$.

Solución 1.4.

$$\vec{U} = (a, b) = \lambda_1(1, -3) + \lambda_2(-2, 6) = (\lambda_1 - 2\lambda_2, -3\lambda_1 + 6\lambda_2)$$

igualando componentes se obtiene

$$\begin{aligned} a &= \lambda_1 - 2\lambda_2 \\ b &= -3\lambda_1 + 6\lambda_2 \end{aligned}$$

y resolviendo el sistema dos por dos, llegamos a que

$$3a + b = 0 \text{ es decir, } b = -3a.$$

Si hacemos $a = t$, entonces $(t, -3t) = t(1, 3) \quad t \in \mathbb{R}$ por lo tanto los vectores \vec{V}_1 y \vec{V}_2 son combinacion lineal.

1.1.2. Producto escalar y las proyecciones en \mathbb{R}^2

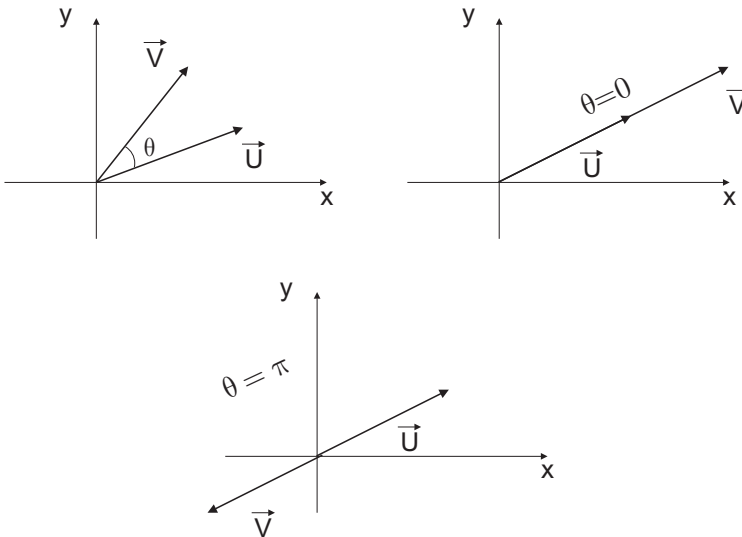
Definición 1.5. Se define el producto escalar de dos vectores en \mathbb{R}^2 . Si $\vec{U} = (a_1, b_1)$ y $\vec{V} = (a_2, b_2)$, entonces

$$\vec{U} \cdot \vec{V} = a_1 a_2 + b_1 b_2.$$

Ángulo entre vectores

Sean \vec{U} y \vec{V} dos vectores diferentes de cero. El ángulo θ entre \vec{U} y \vec{V} esta definido como el ángulo no negativo mas pequeño entre $[0, \pi]$. Si $\vec{U} = \alpha \vec{V}$ para algún α , entonces $\theta = 0$ si $\alpha > 0$ y $\theta = \pi$ si $\alpha < 0$.

$$\theta = [0, \pi]$$



Teorema 1.1. Sean $\vec{U} = (a_1, b_1)$, $\vec{V} = (a_2, b_2)$.

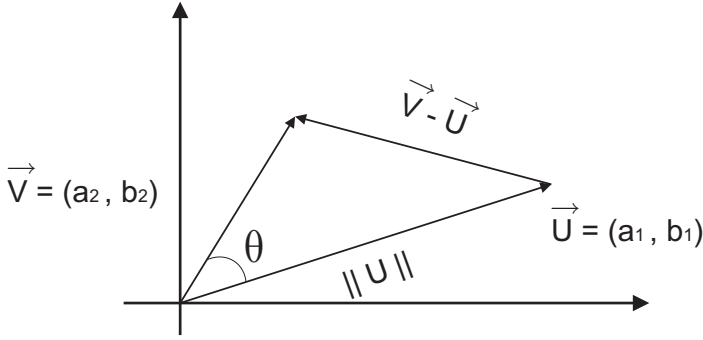
a) $\|\vec{U}\|^2 = \vec{U} \cdot \vec{U}$

b) Si \vec{U} y \vec{V} son diferentes de cero y θ es el ángulo entre ambos vectores, entonces

$$\cos \theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|}.$$

Demostración 1.1.

La demostración de a) es inmediata, demostremos la parte b).



Usando la ley de los cosenos

$$\|\vec{V} - \vec{U}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 + \|\vec{V}\|^2 - 2\|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \cos \theta.$$

Pero

$$\|\vec{V} - \vec{U}\|^2 = (\vec{V} - \vec{U}) \cdot (\vec{V} - \vec{U}) = \|\vec{V}\|^2 - 2\vec{U} \cdot \vec{V} + \|\vec{U}\|^2,$$

reemplazando en el lado derecho de la igualdad, obtenemos

$$\cos \theta = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{U}\| \|\vec{V}\|}.$$

Definición 1.6. Dos vectores \vec{U} y \vec{V} diferentes de cero son:

- 1) Paralelos si el ángulo entre ellos es cero o π .
- 2) Son ortogonales si el ángulo entre ellos es $\frac{\pi}{2}$.

Teorema 1.2. Sean \vec{U} y \vec{V} vectores diferentes de cero

- 1) $\vec{V} = \alpha \vec{U}$ si y sólo si \vec{U} y \vec{V} son paralelos.
- 2) $\vec{V} \cdot \vec{U} = 0$ si y sólo si \vec{U} y \vec{V} son ortogonales.

Demostración 1.2.

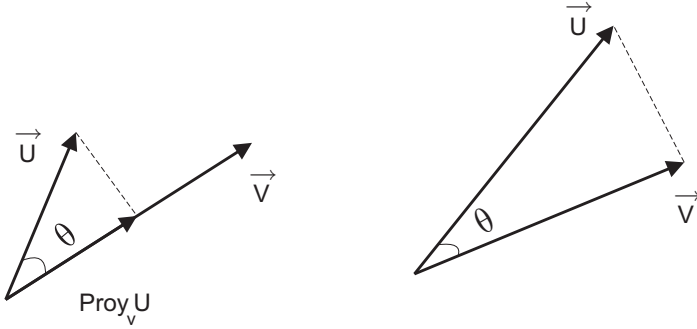
La demostración se deja como ejercicio.

Definición 1.7. Sean \vec{U} y \vec{V} dos vectores diferentes de cero, entonces la proyección de \vec{U} sobre \vec{V} es un vector denotado por

$$Proy_{\vec{V}} \vec{U} = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{V}\|^2} \cdot \vec{V}$$

y su norma viene dada por

$$\|Proy_{\vec{V}} \vec{U}\| = \frac{|\vec{U} \cdot \vec{V}|}{\|\vec{V}\|}.$$



Nota. La proyección de \vec{U} sobre \vec{V} es un vector paralelo a \vec{V} , es decir,

$$Proy_{\vec{V}} \vec{U} = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{V}\|^2} \cdot \vec{V} = \lambda \vec{V} \quad \text{donde} \quad \lambda = \frac{\vec{U} \cdot \vec{V}}{\|\vec{V}\|^2}.$$

1.1.3. Propiedades de la suma y la multiplicación por un escalar

Sean $\vec{W}, \vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$, las siguientes propiedades se satisfacen para la suma de vectores y la multiplicación por un escalar:

- 1) $\vec{U} + \vec{V} = \vec{V} + \vec{U}$.
- 2) $(\vec{U} + \vec{V}) + \vec{W} = \vec{U} + (\vec{V} + \vec{W})$.
- 3) $(\vec{U} + \vec{0}) = \vec{U}$.
- 4) $\vec{U} + (-\vec{U}) = \vec{0}$.

$$5) \lambda(\vec{U} + \vec{V}) = \lambda\vec{U} + \lambda\vec{V}.$$

$$6) (\lambda + \beta)\vec{U} = \lambda\vec{U} + \beta\vec{U}.$$

$$7) (\lambda\beta)\vec{U} = \lambda(\beta\vec{U}) = \beta(\lambda\vec{U}).$$

$$8) 1\vec{U} = \vec{U}.$$

Propiedades del producto escalar: Sean $\vec{W}, \vec{U}, \vec{V} \in \mathbb{R}^2$ y $\lambda \in \mathbb{R}$

$$1) \vec{U} \cdot \vec{V} = \vec{V} \cdot \vec{U}.$$

$$2) \vec{U} \cdot (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \cdot \vec{V} + \vec{U} \cdot \vec{W}.$$

$$3) \lambda(\vec{U} \cdot \vec{V}) = (\lambda\vec{U}) \cdot \vec{V} = \vec{U} \cdot (\lambda\vec{V}).$$

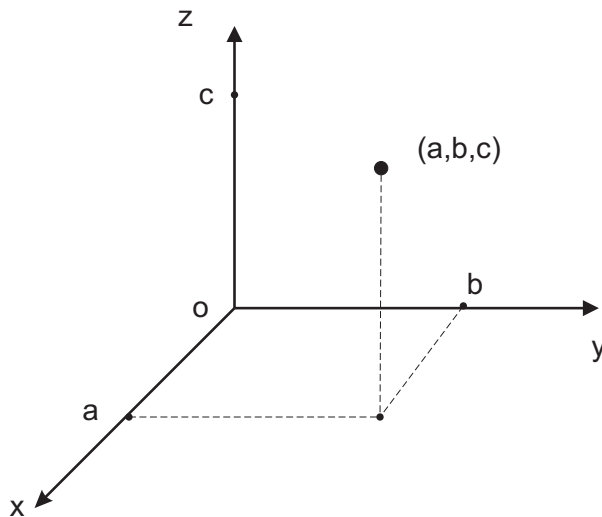
1.1.4. Vector en \mathbb{R}^3

Definimos el conjunto \mathbb{R}^3 como:

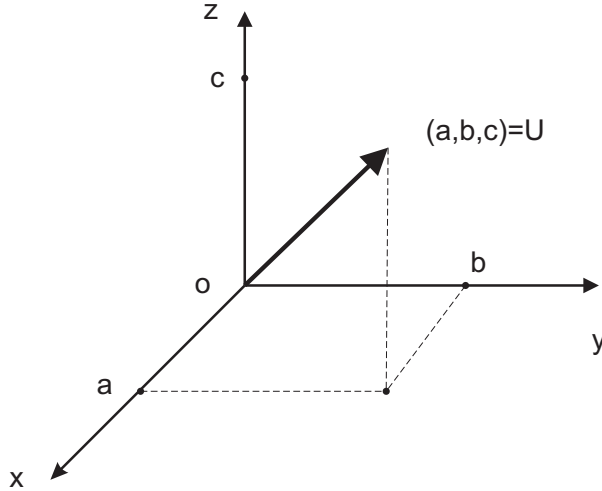
$$\mathbb{R}^3 = \{(a, b, c) : a, b, c \in \mathbb{R}\},$$

los elementos de este conjunto se llaman vectores y los denotamos por $\vec{U} = (a, b, c)$.

Los elementos $(a, b, c) \in \mathbb{R}^3$ se asocian con puntos en el espacio tridimensional, definido con tres rectas mutuamente perpendiculares. Estas rectas forman los ejes del sistema de coordenadas rectangulares.



Los vectores de \mathbb{R}^3 también se pueden representar mediante segmentos de rectas dirigidos o flechas. La norma de un vector $\vec{U} = (a, b, c)$ se define como $\|\vec{U}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$.



Los cosenos directores del vector $\vec{U} = \overrightarrow{OP} = (a, b, c)$ son:

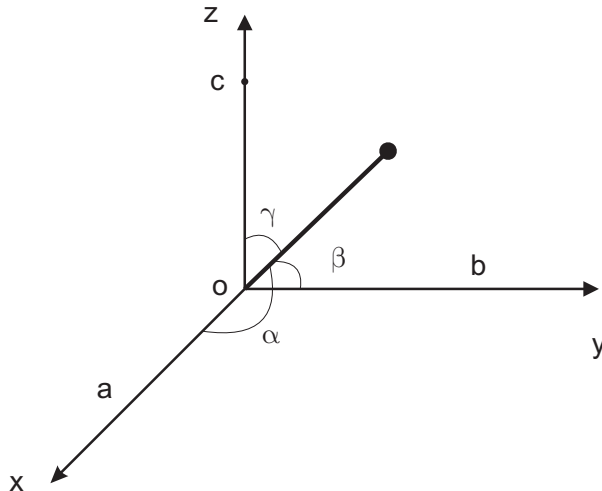
$$\cos \alpha = \frac{a}{\|\vec{U}\|}, \quad \cos \beta = \frac{b}{\|\vec{U}\|}, \quad \cos \gamma = \frac{c}{\|\vec{U}\|}$$

donde α, β y γ son ángulos directores de \vec{U} .

α : ángulo entre \overrightarrow{OP} y la parte positiva del eje x .

β : ángulo entre \overrightarrow{OP} y la parte positiva del eje y .

γ : ángulo entre \overrightarrow{OP} y la parte positiva del eje z .



Además estos ángulos satisfacen la condición de que

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1.$$

Además si $\|\vec{U}\| = 1$, entonces

$$\vec{U} = (\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma).$$

Los conceptos de vector, producto punto, distancia entre dos puntos, vector unitario, proyección, combinación lineal y todas las propiedades que hemos visto para vectores en \mathbb{R}^2 también se cumplen para vectores en \mathbb{R}^3 y en general para vectores en \mathbb{R}^n .

Una operación que se define solamente en \mathbb{R}^3 es la siguiente:

Producto vectorial

Sean $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$ y $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$ dos vectores de \mathbb{R}^3 . El producto cruz entre \vec{U} y \vec{V} se denota por $\vec{U} \times \vec{V}$ y se define

$$\vec{U} \times \vec{V} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ u_1 & u_2 & u_3 \\ v_1 & v_2 & v_3 \end{vmatrix} = i \begin{vmatrix} u_2 & u_3 \\ v_2 & v_3 \end{vmatrix} - j \begin{vmatrix} u_1 & u_3 \\ v_1 & v_3 \end{vmatrix} + k \begin{vmatrix} u_1 & u_2 \\ v_1 & v_2 \end{vmatrix}.$$

Algunas propiedades interesantes del producto cruz son:

Sean $\vec{U}, \vec{V}, \vec{W} \in \mathbb{R}^3$ y $\lambda, \beta \in \mathbb{R}$.

- 1) $\vec{U} \times \vec{V} = -\vec{V} \times \vec{U}$
- 2) $\vec{U} \times (\vec{V} + \vec{W}) = \vec{U} \times \vec{V} + \vec{U} \times \vec{W}$
- 3) $(\vec{U} + \vec{V}) \times \vec{W} = \vec{U} \times \vec{W} + \vec{V} \times \vec{W}$
- 4) $(\lambda \vec{U}) \times \vec{V} = \vec{U} \times (\lambda \vec{V}) = \lambda(\vec{U} \times \vec{V})$
- 5) $\vec{U} \times \vec{U} = 0$
- 6) $\vec{U} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}) = 0 = \vec{V} \cdot (\vec{U} \times \vec{V}).$

Ejemplo 1.5. Se puede verificar de forma inmediata la igualdad

$$\|\vec{U} \times \vec{V}\|^2 = \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 - (\vec{U} \cdot \vec{V})^2.$$

Mostremos que $\|\vec{U} \times \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \sin \theta$.

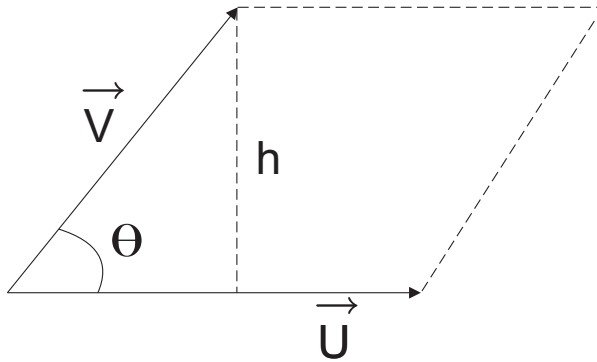
Solución 1.5.

$$\begin{aligned}\|\vec{U} \times \vec{V}\| &= \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 - (\vec{U} \cdot \vec{V})^2 = \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 - \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 \cos^2 \theta \\ &= \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 (1 - \cos^2 \theta) = \|\vec{U}\|^2 \|\vec{V}\|^2 \sin^2 \theta.\end{aligned}$$

Luego $\|\vec{U} \times \vec{V}\| = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \sin \theta$.

Interpretación geométrica del producto cruz

Sea A el área del paralelogramo generado por \vec{U} y \vec{V}



$$b = \sin \theta = \frac{h}{\|\vec{V}\|} \Rightarrow h = \|\vec{V}\| \sin \theta$$

$$A = \|\vec{U}\| \|\vec{V}\| \sin \theta = \|\vec{U} \times \vec{V}\|.$$

Se puede mostrar fácilmente que el volumen del paralelepípedo generado por los vectores \vec{U} , \vec{V} y \vec{W} es $V = |(\vec{U} \times \vec{V}) \cdot \vec{W}|$.

Ejemplo 1.6. Calcule el área del triángulo con vértices $P = (1, 3, -2)$, $Q = (2, 1, 4)$, $R = (-3, 1, 6)$ usando el concepto del producto cruz.

Solución 1.6.

$$\text{área} = \frac{\|\vec{PQ} \times \vec{QR}\|}{2} = \frac{\begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -2 & 3 \\ -5 & 0 & 2 \end{vmatrix}}{2} = \frac{\sqrt{1140}}{2}.$$

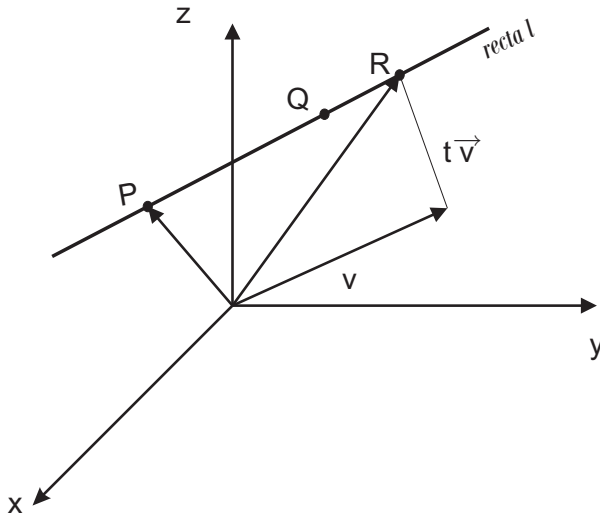
1.2. Rectas y planos en el espacio

Sea l la recta que pasa por los puntos P y Q . Ésta es paralela al vector director $\vec{V} = \overrightarrow{PQ}$, por consiguiente dado un punto $R = (x, y, z) \in l$, se debe cumplir que $\overrightarrow{PR} = t\vec{V}$, es decir que \overrightarrow{PR} es paralelo al vector \vec{V} , esto es,

$$R - P = t\vec{V} \quad \text{donde} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Luego

$$R = (x, y, z) = P + t\vec{V}$$



Definición 1.8. Si l es una recta que pasa por los puntos $P = (x_0, y_0, z_0)$, $Q = (a, b, c)$ y si suponemos que $\vec{V} = Q - P$, entonces

1) La ecuación vectorial de la recta l es

$$(x, y, z) = P + t\vec{V}; \quad t \in \mathbb{R}$$

2) Despejando x, y, z obtenemos las ecuaciones paramétricas de l

$$x = x_0 + tv_1 \quad \text{donde} \quad t \in \mathbb{R}, \quad v_1 = a - x_0$$

$$y = y_0 + tv_2 \quad \text{donde} \quad t \in \mathbb{R}, \quad v_2 = b - y_0$$

$$z = z_0 + tv_3 \quad \text{donde} \quad t \in \mathbb{R}, \quad v_3 = c - z_0.$$

3) Si cada $v_i \neq 0$, $i = 1, 2, 3$, despejando t en las ecuaciones paramétricas de la recta l , obtenemos, las ecuaciones simétricas

$$\frac{x - x_0}{v_1} = \frac{y - y_0}{v_2} = \frac{z - z_0}{v_3}.$$

Ejemplo 1.7. Encuentre la ecuación de la recta que pasa por los puntos $P = (1, 3, -2)$ y $Q = (2, 1, -2)$.

Solución 1.7.

En este caso el vector director es $\vec{V} = Q - P = (1, -2, 0)$, luego:

1) La ecuación vectorial de la recta es: $(x, y, z) = (1, 3, -2) + t(1, -2, 0)$.

2) Las ecuaciones paramétricas son:

$$x = 1 + t$$

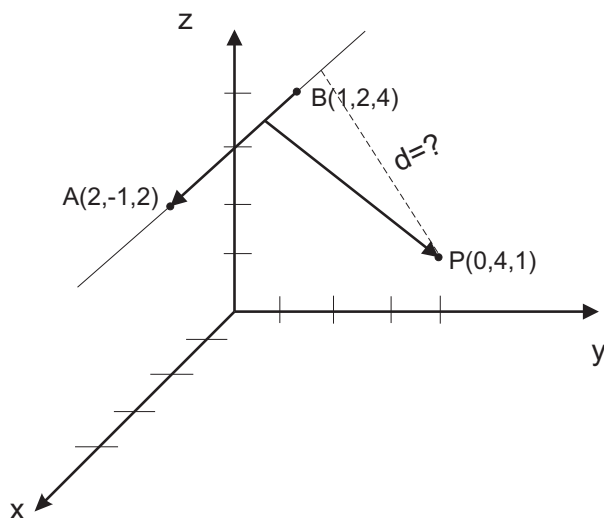
$$y = 3 - 2t$$

$$z = -2.$$

3) Las ecuaciones simétricas son:

$$x - 1 = \frac{y - 3}{2} = z = -2.$$

Ejemplo 1.8. Halle la distancia del punto $P = (0, 4, 1)$ a la recta determinada por $A = (2, -1, 2)$ y $B = (1, 2, 4)$.



Solución 1.8.

Como d es la altura del paralelogramo determinado por \overrightarrow{BA} y \overrightarrow{BP} y su área esta dada por $\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BP}\|$

$$\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BP} = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & -3 & -2 \\ -1 & 2 & -3 \end{vmatrix} = (13, 5, -1)$$

$$\overrightarrow{BA} = (1, -3, -2) \quad \text{y} \quad \overrightarrow{BP} = (-1, 2, -3)$$

$$\|\overrightarrow{BA} \times \overrightarrow{BP}\| = \sqrt{195}$$

$$d = \frac{\text{área paralelogramo}}{\text{longitud de la base}} = \frac{\sqrt{195}}{\|\overrightarrow{AB}\|} = \frac{\sqrt{195}}{\sqrt{14}} = \sqrt{\frac{195}{14}}.$$

1.2.1. Rectas paralelas y perpendiculares

Sean $l_1 : (x, y, z) = P + t\overrightarrow{V}, t \in \mathbb{R}$ y $l_2 : (x, y, z) = Q + s\overrightarrow{W}, s \in \mathbb{R}$ dos rectas, entonces decimos:

- 1) l_1 es paralela a l_2 si y sólo si \overrightarrow{V} es paralela a \overrightarrow{W} .
- 2) l_1 es ortogonal a l_2 si y sólo si \overrightarrow{V} es ortogonal a \overrightarrow{W} .
- 3) El ángulo entre l_1 y l_2 es igual al ángulo entre \overrightarrow{V} y \overrightarrow{W} .

Observación

- a) Como podemos escoger dos puntos distintos de una recta, las ecuaciones no son únicas.
- b) Sea $P + t\overrightarrow{V} = Q + s\overrightarrow{W}$ un sistema de ecuaciones

$$tV_1 - sW_1 = a - x_0$$

$$tV_2 - sW_2 = b - y_0$$

$$tV_3 - sW_3 = c - z_0.$$

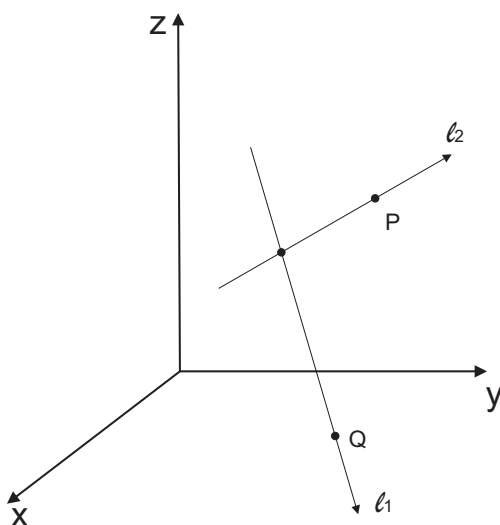


Figura 1.1: 1

Si el sistema tiene solución, esto implica que la solución son los puntos de intersección entre l_1 y l_2 . Como el sistema es lineal, puede ocurrir lo siguiente:

- i Hay solución única: las rectas se intersectan en un solo punto.
 - ii Hay infinitas soluciones: las rectas coinciden.
 - iii No hay solución: las rectas no se intersectan.
- c) Observe que, en el cálculo de la intersección, usamos un parámetro distinto en cada recta. Esto es así porque el punto de intersección puede ser que se obtenga en cada recta un valor de parámetro distinto, por ejemplo

$$l_1 : (-17, -1, 1) = (-1, 3, 1) + 4(4, 1, 0)$$

$$l_2 : (-17, -1, 1) = (-13, 1, 2) - \frac{1}{3}(12, 6, 3)$$

las rectas l_1 y l_2 se intersectan en el punto $(-17, -1, 1)$. Este punto se obtiene con $t = -4$ en la recta l_1 y con $s = -\frac{1}{3}$ en la recta l_2 .

Ejemplo 1.9. Halle las ecuaciones paramétricas de la recta que pasan por el punto $P(0, -1, -3)$ y es paralela a la recta

$$l : \left\{ \frac{x-1}{8} = \frac{y+3}{-2} = \frac{z}{5} \right.$$

Solución 1.9.

El vector director de la recta l es $v=(8, -2, 5)$ como la ecuación de la recta que vamos a calcular es paralela a l , podemos escoger el mismo vector director, por consiguiente, la ecuación es

$$x = 8t, \quad y = -1 - 2t, \quad z = -3 + 5t.$$

Ejemplo 1.10. Calcular la distancia de $P(5, 6, 6)$ a la recta

$$l : \begin{cases} x = 5t \\ y = 2 - t \\ z = t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Solución 1.10.

Sea $R(5t, 2 - t, t)$ un punto de la recta l .

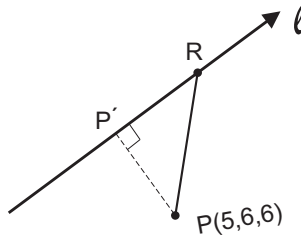


Figura 1.2: 1

Encontrar la distancia de P a la recta l , es equivalente a encontrar la distancia entre los puntos P y P' . Hallemos P' .

El vector $\overrightarrow{RP} = (5-5t, 4+t, 6-t)$ es perpendicular a la recta l , por lo tanto es perpendicular a su vector director $(5, -1, 1)$. Luego

$$(5, -1, 1) \cdot (5 - 5t, 4 + t, 6 - t) = 0$$

$$5(5 - 5t) - 1(4 + t) + 1(6 - t) = 0$$

$$25 - 25t - 4 - t + 6 - t = 0$$

$$-27t + 27 = 0 \quad t = 1.$$

Luego el punto $P' = (5, 1, 1)$, por consiguiente

$$d(P, l) = d(P, P') = \|\overrightarrow{PP'}\| = \|(0, -5, -5)\| = \sqrt{50} = 5\sqrt{2}.$$

1.2.2. Planos

Sea P un punto en el espacio y \vec{N} un vector dado diferente de cero. Entonces el conjunto de todos los puntos Q tal que $\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{N} = 0$, constituye un plano en \mathbb{R}^3 .

Sea $\vec{N} = (a, b, c)$ vector dado. Vector normal al plano π .

$P = (x_o, y_o, z_o)$ un punto fijo del plano π .

$Q = (x, y, z)$ un punto cualquiera del plano π .

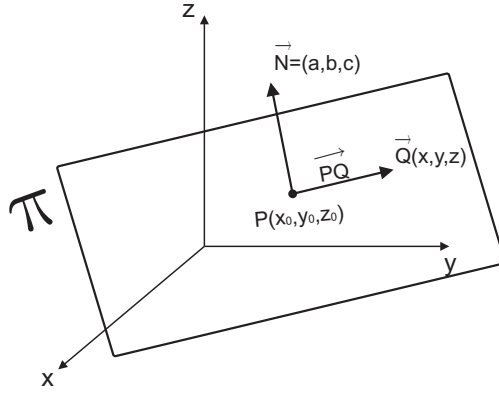


Figura 1.3: 1

$$\overrightarrow{PQ} \cdot \vec{N} = 0$$

$$(a, b, c) \cdot (x - x_o, y - y_o, z - z_o) = 0$$

$$a(x - x_o) + b(y - y_o) + c(z - z_o) = 0.$$

Así, obtenemos la ecuación normal del plano π .

También podemos calcular la ecuación normal de un plano que pasa por los puntos P, Q y R . En este caso, el vector normal es el producto cruz

$$\vec{N} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR}.$$

Ahora si $(x, y, z) \in \pi$, es decir, es un punto del plano, entonces la ecuación vectorial del plano es

$$(x, y, z) = P + t\overrightarrow{PQ} + s\overrightarrow{PR}, \quad t, s \in \mathbb{R}.$$

Ejemplo 1.11. Considere un plano π que pasa por los puntos no colineales $P = (1, 1, 1)$, $Q = (2, 1, 2)$ y $R = (0, 2, 1)$. Encontrar la ecuación vectorial y la ecuación cartesiana del plano.

Solución 1.11.

$$\overrightarrow{PQ} = Q - P = (2, 1, 2) - (1, 1, 1) = (1, 0, 1).$$

$$\overrightarrow{PR} = R - P = (0, 2, 1) - (1, 1, 1) = (-1, 1, -2).$$

Ecuación vectorial del plano: $(x, y, z) = (1, 1, 1) + t(1, 0, 1) + s(-1, 1, -2)$.

Halleemos la ecuación cartesiana del plano. Calculemos primero el vector normal \vec{N} :

$$\begin{aligned}\vec{N} = \overrightarrow{PQ} \times \overrightarrow{PR} &= \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \hat{i} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - \hat{j} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ -1 & -2 \end{vmatrix} + \hat{k} \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} \\ &= -\hat{i} + \hat{j} + \hat{k},\end{aligned}$$

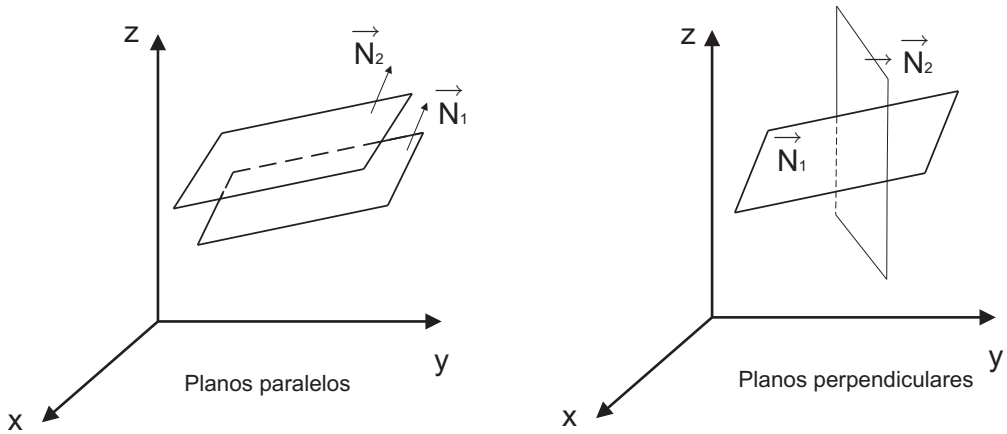
$\vec{N} = (-1, 1, 1)$, la ecuación es

$$-1(x - 1) + 1(y - 1) + 1(z - 1) = 0$$

$$-x + y + z = 1.$$

Definición 1.9. Sean $\pi_1 : a_1x + b_1y + c_1z = d_1$, $\pi_2 : a_2x + b_2y + c_2z = d_2$ dos planos con vectores normales $\vec{N}_1 = (a_1, b_1, c_1)$ y $\vec{N}_2 = (a_2, b_2, c_2)$ respectivamente.

- π_1 es paralelo a π_2 si y sólo si \vec{N}_1 es paralelo a \vec{N}_2 .
- π_1 es perpendicular a π_2 si y sólo si \vec{N}_1 es perpendicular a \vec{N}_2 .
- El ángulo entre los planos π_1 y π_2 , es el ángulo entre los vectores \vec{N}_1 y \vec{N}_2 .
- Sea $l_1 : (x, y, z) = p + t\vec{v}$. Decimos que
 - l_1 es paralelo a π_1 si y sólo si \vec{N}_1 es ortogonal a \vec{v} .
 - l_1 es perpendicular a π_1 si y sólo si \vec{N}_1 es paralelo a \vec{v} .



Ejemplo 1.12. Determine la ecuación del plano que contiene la recta

$$l_1 : (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(0, 2, 3)$$

y al punto $P = (0, 0, 1)$. (El punto P no está en la recta l).

Solución 1.12.

Para encontrar la ecuación del plano, buscamos tres puntos no colineales en este plano. El punto $P = (0, 0, 1)$ ya lo tenemos, hallemos dos puntos que están en la recta, estos puntos los encontramos dándole valores a t .

$$\text{si } t = 0, Q = (1, 2, 1); \quad \text{si } t = 1, R = (1, 4, 4), P = (0, 0, 1).$$

$$\vec{N} = \vec{PQ} \times \vec{PR} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{vmatrix} = 6\hat{i} - 3\hat{j} + 2\hat{k}; \quad \vec{N} = (2, -3, 2).$$

$$\text{La ecuación del plano: } 6(x - 0) - 3(y - 0) + 2(z + 1) = 0$$

$$6x - 3y + 2z = -2.$$

Ejemplo 1.13. Encuentre la ecuación cartesiana del plano, que es paralelo a las rectas

$$l_1 : (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(0, 2, 3)$$

$$l_2 : (x, y, z) = (1, 0, 1) + t(5, 0, 0)$$

y que contiene al punto $P = (1, 1, 1)$.

Solución 1.13.

El vector normal \vec{N} del plano que estamos buscando debe ser perpendicular a los vectores directores de las dos rectas l_1 y l_2 . El único vector ortogonal a los vectores \vec{v}_1 y \vec{v}_2 es el producto cruz $\vec{N} = \vec{v}_1 \times \vec{v}_2$.

$$\vec{N} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 0 & 2 & 3 \\ 5 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 15\hat{j} - 10\hat{k}; \quad \vec{N} = (0, 15, -10)$$

la ecuación del plano es: $0(x - 1) + 15(y - 1) - 10(z - 1) = 0$

$$15y - 10z = 5.$$

Observación. Para obtener la intersección entre una recta $l_1 : (x, y, z) = P + t\vec{v}$ y el plano $\pi_1 : a_1x_1 + b_1y + c_1z = d_1$, despejamos x, y, z en la ecuación de la recta y reemplazamos este despeje en la ecuación del plano. Resolvemos para t , si la solución es única, con este valor de t obtenemos en el punto de intersección, sustituyendo en la ecuación de la recta. Obsérvese que la ecuación en t , puede también tener infinitas soluciones (si la recta está en el plano) o no tener solución (si no hay intersección).

Ejemplo 1.14. Hallar el punto de intersección entre el plano $\pi : x - 2y + 3z$ y la recta $l : (x, y, z) = (1, 2, 1) + t(0, 2, 3)$.

Solución 1.14.

$$x = 1, \quad y = 2 + 2t, \quad z = 1 + 3t$$

reemplazamos en la ecuación del plano

$$1 - 2(2 + 2t) + 3(1 + 3t) = 1$$

$$1 - 4 - 4t + 3 + 9t = 1$$

$5t = 1$ luego $t = 1/5$, por consiguiente el punto de intersección $(1, 12/5, 8/5)$.

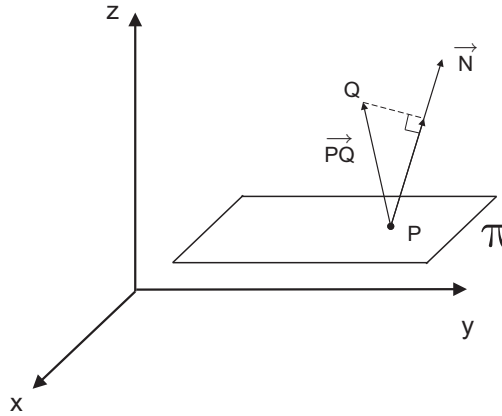
Observación. (Distancia de un punto a un plano y distancia de un punto a una recta)
Para calcular la distancia de un punto a un plano y la distancia de un punto a una recta, usamos conceptos geométricos.

Esta distancia se calcula como la longitud ortogonal del punto al plano o a la recta, por esta razón obtenemos fórmulas que tienen que ver con proyección ortogonal.

Distancia de un punto a un plano.

Sea π un plano con vector normal \vec{N} , que contiene a un punto P . La distancia $d(Q, \pi)$ es

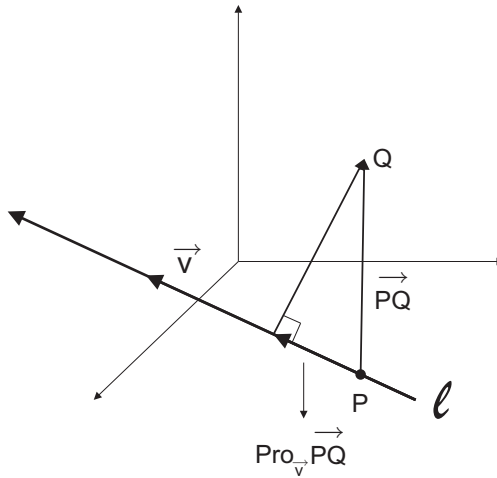
$$d(Q, \pi) = \|\text{Proy}_{\vec{N}} \overrightarrow{PQ}\| = \frac{\|(\vec{Q} - \vec{P}) \cdot \vec{N}\|}{\|\vec{N}\|}$$



Distancia de un punto a una recta.

Sea $l : (x, y, z) = P + t \vec{v}$, la distancia de un punto dado Q a la recta l que contiene a un punto P , es

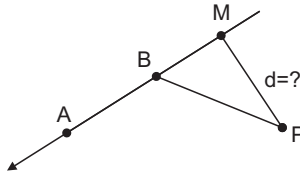
$$d(Q, l) = \|\vec{PQ} - \text{Proy}_{\vec{v}} \vec{PQ}\|.$$



Ejemplo 1.15. Halle la distancia del punto $P = (0, 4, 1)$ a la recta determinada por A y B donde $A = (2, -1, 2)$ y $B = (1, 2, 4)$.

Solución 1.15.

Denotemos la proyección ortogonal de \vec{BP} sobre \vec{BA} por \vec{v} .



Como triángulo BMP es rectángulo, entonces

$$\|\vec{BP}\|^2 = d^2 + \|\vec{v}\|^2$$

$$d = \sqrt{\|\vec{BP}\|^2 - \|\vec{v}\|^2}.$$

Calculemos $\|\vec{BP}\|^2$ y $\|\vec{v}\|^2$

$$\vec{BP} = P - B = (0, 4, 1) - (1, 2, 4) = (-1, 2, -3)$$

$$\|\vec{BP}\|^2 = (-1)^2 + (2)^2 + (-3)^2 = 14$$

$$\vec{BA} = A - B = (2, -1, 2) - (1, 2, 4) = (1, -3, -2)$$

$$\|\vec{BA}\| = \sqrt{(1)^2 + (-3)^2 + (-2)^2} = \sqrt{14}.$$

Por lo tanto

$$\|\vec{v}\| = \frac{|\vec{BP} \cdot \vec{BA}|}{\|\vec{BA}\|} = \frac{(-1, 2, -3) \cdot (1, -3, -2)}{\sqrt{14}} = \frac{|-1|}{\sqrt{14}} = \frac{1}{\sqrt{14}}$$

por consiguiente

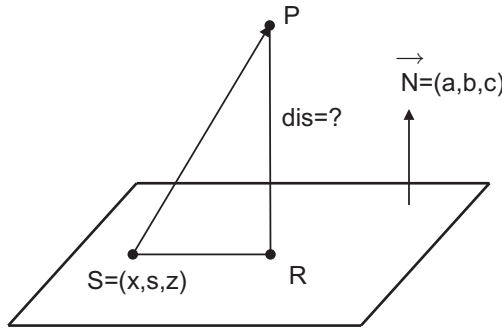
$$d = \sqrt{\|\vec{BP}\|^2 - \|\vec{v}\|^2} = \sqrt{14 - \frac{1}{14}} = \sqrt{\frac{195}{14}}.$$

Ejemplo 1.16.

Sea $ax + by + cz + d = 0$ la ecuación de un plano y $P = (x_o, y_o, z_o)$ un punto que no está en el plano. Demuestre que la distancia del punto P al plano es:

$$d_{ls} = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Solución 1.16.



Por definición tenemos que

$$d_{ls} = \|\text{Proy}_{\vec{N}} \vec{SP}\| = \frac{|\vec{SP} \cdot \vec{N}|}{\|\vec{N}\|}$$

$$\vec{SP} = P - S = (x_o, y_o, z_o) - (x, y, z) = (x_o - x, y_o - y, z_o - z)$$

$$\begin{aligned} \vec{SP} \cdot \vec{N} &= (x_o - x, y_o - y, z_o - z) \cdot (a, b, c) = a(x_o - x) + b(y_o - y) + c(z_o - z) \\ &= ax_o - ax + by_o - by + cz_o - cz = ax_o + by_o + cz_o + d \end{aligned}$$

donde $d = -ax - by - cz$,

$$\|\vec{N}\| = \sqrt{a^2 + b^2 + c^2}$$

luego se tiene la fórmula

$$d_{ls} = \frac{|ax_o + by_o + cz_o + d|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

1.3. Ejercicios resueltos del capítulo 1

Ejercicio 1.1. Dados los puntos $A = (0, 2, -1)$, $B = (2, -3, 2)$ y $C = (1, 3, 3)$.

- Halle un vector unitario \vec{U} en dirección del vector $\vec{AB} - 3\vec{CB}$.
- Halle todos los vértices del paralelogramo ABCD.
- Halle las coordenadas del punto medio de \vec{AC} .

Solución 1.1. (a)

$$\vec{AB} = B - A = (2, -3, 2) - (0, 2, -1) = (2, -5, 3)$$

$$\vec{CB} = B - C = (2, -3, 2) - (1, 3, 3) = (1, -6, -1)$$

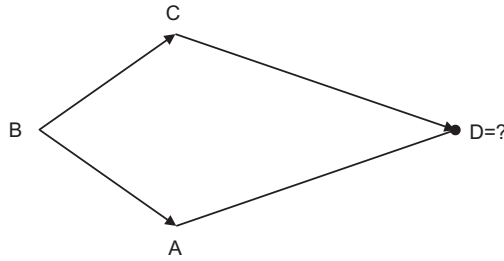
$$\vec{AB} - 3\vec{CB} = (2, -5, 3) - 3(1, -6, -1) = (-1, 13, 6)$$

$$\|\vec{AB} - 3\vec{CB}\| = \sqrt{(-1)^2 + (13)^2 + (6)^2} = \sqrt{206},$$

por consiguiente

$$\vec{U} = \frac{\vec{AB} - 3\vec{CB}}{\|\vec{AB} - 3\vec{CB}\|} = \frac{(-1, 13, 6)}{\sqrt{206}}.$$

(b)



$$\vec{BA} + \vec{BC} = \vec{BD}$$

$$(A - B) + (C - B) = D - B$$

$$A + C - B = D.$$

Por lo tanto

$$D = (0, 2, -1) + (1, 3, 3) - (2, -3, 2) = (-1, 8, 0)$$

Análogamente

$$\vec{CB} + \vec{CA} = \vec{CD}$$

$$(B - C) + (A - C) = D - C$$

$$B + A - C = D,$$

por lo tanto

$$D = (2, -3, 2) + (0, 2, -1) - (1, 3, 3) = (1, -4, 2)$$

finalmente la otra posibilidad es

$$\vec{AB} + \vec{AC} = \vec{AD}$$

$$(B - A) + (C - A) = D - A$$

$$B + C - A = D$$

esto es,

$$D = (2, -3, 2) + (1, 3, 3) - (0, 2, -1) = (3, -2, 6).$$

(c) Sea P el punto medio de \overrightarrow{AC} , esto implica que

$$\overrightarrow{AP} = \frac{1}{2}\overrightarrow{AC} \Rightarrow P - A = \frac{1}{2}(C - A)$$

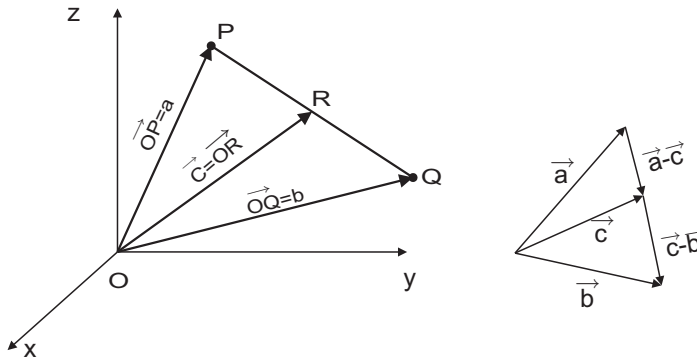
$$\text{luego} \quad \frac{1}{2}(C - A) + A = \frac{1}{2}C + \frac{1}{2}A = \frac{1}{2}(C + A).$$

Por consiguiente

$$P = \frac{(1, 3, 3) + (0, 2, -1)}{2} = \left(\frac{1}{2}, \frac{5}{2}, 1\right).$$

Ejercicio 1.2. Sean O, P, Q tres puntos en el espacio y R el punto medio de \overrightarrow{PQ} . Si $\overrightarrow{OP} = \vec{a}$, $\overrightarrow{OQ} = \vec{b}$ y $\overrightarrow{OR} = \vec{c}$, pruebe que

$$\vec{c} = \frac{1}{2}(\vec{a} + \vec{b}).$$



Solución 1.2.

Haciendo operaciones entre vectores obtenemos

$$\vec{a} - \vec{c} = \vec{c} - \vec{b} \Rightarrow \vec{a} + \vec{b} = 2\vec{c}$$

$$\vec{c} = \frac{\vec{a} + \vec{b}}{2}.$$

Ejercicio 1.3. Dados $\vec{A} = (2, -1, 2)$, $\vec{B} = (1, 2, -2)$. Hallar los vectores \vec{C} y \vec{D} tal que \vec{C} es perpendicular a \vec{B} y \vec{D} es perpendicular a \vec{B} y $\vec{A} = \vec{C} + \vec{D}$.

Solución 1.3.

$$\vec{A} = \vec{C} + \vec{D} \Rightarrow \vec{A} \cdot \vec{B} = \vec{C} \cdot \vec{B} + \vec{D} \cdot \vec{B}$$

luego

$$2 - 2 - 4 = \vec{C} \cdot \vec{B} \Rightarrow -4 = \vec{C} \cdot \vec{B}$$

como $\vec{C} = \lambda \vec{B}$ por ser vectores paralelos, y $\vec{D} \cdot \vec{B} = 0$ por ser vectores ortogonales, entonces

$$-4 = \lambda \vec{B} \cdot \vec{B} \Rightarrow -4 = \lambda \|\vec{B}\|^2$$

$$\lambda = -\frac{4}{\|\vec{B}\|^2}, \quad \text{puesto que } \|\vec{B}\|^2 = 9$$

$$\lambda = -\frac{4}{9}, \quad \text{luego } \vec{C} = -\frac{4}{9}(1, 2, -2).$$

Finalmente

$$\vec{D} = \vec{A} - \vec{C} = (2, -1, 2) + \frac{4}{9}(1, 2, -2) = \left(\frac{22}{9}, -\frac{1}{9}, \frac{10}{9}\right).$$

Ejercicio 1.4. Sean \vec{a} y \vec{b} vectores en \mathbb{R}^3 y $\pi/3$ el ángulo entre ellos, si $\|\vec{a}\| = 3$ y $\|\vec{b}\| = 2$, calcule $\|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})\|$.

Solución 1.4.

$$\begin{aligned} (\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b}) &= (\vec{a} \times \vec{a}) + (\vec{b} \times \vec{a}) - (\vec{a} \times 3\vec{b}) - (\vec{b} \times 3\vec{b}) \\ &= \vec{0} - (\vec{a} \times \vec{b}) - 3(\vec{a} \times \vec{b}) - 3(\vec{b} \times \vec{b}) \\ &= \vec{0} - \vec{a} \times \vec{b} - 3(\vec{a} \times \vec{b}) - 3\vec{0} \\ &= -4(\vec{a} \times \vec{b}). \end{aligned}$$

Así que

$$\begin{aligned} \|(\vec{a} + \vec{b}) \times (\vec{a} - 3\vec{b})\| &= \|-4(\vec{a} \times \vec{b})\| = 4\|\vec{a} \times \vec{b}\| = 4\|\vec{a}\| \|\vec{b}\| \sin \pi/3 \\ &= 4(3)(2) \frac{\sqrt{3}}{2} = 12\sqrt{3}. \end{aligned}$$

Ejercicio 1.5. Si $\|\vec{a}\| = 3$ y $\|\vec{b}\| = 5$, determine λ tal que $\vec{a} + \lambda\vec{b}$ y $\vec{a} - \lambda\vec{b}$ son perpendiculares.

Solución 1.5.

$$(\vec{a} + \lambda \vec{b}) \cdot (\vec{a} - \lambda \vec{b}) = 0$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} - \lambda \vec{a} \cdot \vec{b} + \lambda \vec{b} \cdot \vec{a} - \lambda^2 \vec{b} \cdot \vec{b} = 0$$

$$\|\vec{a}\|^2 - \lambda \|\vec{b}\|^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda^2 = \frac{\|\vec{a}\|^2}{\|\vec{b}\|^2}$$

$$\lambda = \pm \sqrt{\frac{9}{25}} = \pm \frac{3}{5}.$$

Ejercicio 1.6. El vector \vec{a} que está en el primer octante tiene $\|\vec{a}\| = 2$ y forma con el eje x un ángulo de $\alpha = \pi/6$ y con el eje z un ángulo de $\gamma = \pi/3$, $\vec{b} = (0, 1, 1)$ y $\vec{c} = (3, 2, -3)$. Halle $\|\vec{a} \times \vec{c}\|$, $\|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\|$.

Solución 1.6.

$$\cos^2 \alpha + \cos^2 \beta + \cos^2 \gamma = 1$$

$$(\cos \pi/6)^2 + \cos^2 \beta + (\cos \pi/3)^2 = 1$$

$$\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \cos^2 \beta = 1 \quad \Rightarrow \quad \cos^2 \beta = 0$$

esto implica que $\beta = \pi/2$.

$$\vec{a} = (\|\vec{a}\| \cos \alpha, \|\vec{a}\| \cos \beta, \|\vec{a}\| \cos \gamma) = (2 \cos \pi/6, 2 \cos \pi/2, 2 \cos \pi/3)$$

$$\vec{a} = 2 \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, 0, 1 \right)$$

$$\vec{a} \times \vec{c} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ \sqrt{3} & 0 & 1 \\ 3 & 2 & -3 \end{vmatrix} = -2\hat{i} - \hat{j}(-3\sqrt{3} - 3) + \hat{k}2\sqrt{3}$$

$$\|\vec{a} \times \vec{c}\| = \sqrt{4 + (3\sqrt{3} + 3)^2 + 12} = \sqrt{16 + (3\sqrt{3} + 3)^2}.$$

$$\begin{aligned}
 \|\vec{a} - \vec{b} + \vec{c}\| &= \|(\sqrt{3}, 0, 1) - (0, 1, 1) + (3, 2, -3)\| \\
 &= \|(\sqrt{3} + 3, 1, -3)\| = \sqrt{(\sqrt{3} + 3)^2 + 1 + 9} \\
 &= \sqrt{10 + (\sqrt{3} + 3)^2}.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 1.7.

Si la proyección del vector \overrightarrow{AB} sobre el eje x es $(-1, 0)$, la proyección sobre el eje y es $(0, 5)$ y $B = (-1, 2)$. Halle las coordenadas del punto A .

Solución 1.7.

Sean $A = (a_1, a_2)$ y $\overrightarrow{AB} = (-1 - a_1, 2 - a_2)$

$$Proy_{(1, 0)} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot (1, 0)}{\|(1, 0)\|^2} = (-1, 0)$$

$$(-1 - a_1, 2 - a_2) \cdot (1, 0) = (-1, 0)$$

$$-1 - a_1 = -1 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 0$$

$$Proy_{(0, 1)} \overrightarrow{AB} = \frac{\overrightarrow{AB} \cdot (0, 1)}{\|(0, 1)\|^2} = (0, 5)$$

$$(-1 - a_1, 2 - a_2) \cdot (0, 1) = (0, 5)$$

$$2 - a_2 = 5 \quad \Rightarrow \quad a_2 = -3$$

luego $A = (0, -3)$.

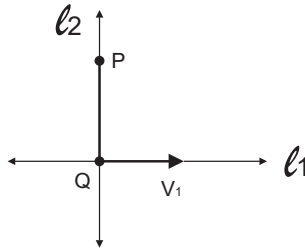
Ejercicio 1.8. Hallar la ecuación de la recta que pasa por el punto $(2, 1, 5)$ y corta en forma perpendicular a la recta

$$l_1 : \frac{x-1}{3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z-3}{2}.$$

Solución 1.8.

Como $P = (2, 1, 5)$ es un punto de la recta, falta encontrar el vector director. El vector director de la recta dada l_1 es

$$\vec{V}_1 = (3, 4, 2)$$



Sea $\vec{V}_2 = \overrightarrow{QP} = P - Q = (2 - a, 1 - b, 5 - c)$. Como l_1 y l_2 son perpendiculares, $\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = 0$

$$\vec{V}_1 \cdot \vec{V}_2 = (3, 4, 2) \cdot (2 - a, 1 - b, 5 - c) = 0$$

$$6 - 3a + 4 - 4b + 10 - 2c = 0$$

$$3a + 4b + 2c = 20,$$

el punto $Q = (a, b, c)$ pertenece a la recta dada, por lo tanto

$$a = 1 + 3t, \quad b = -2 + 4t \quad \text{y} \quad c = 3 + 2t$$

luego

$$3(1 + 3t) + 4(-2 + 4t) + 2(3 + 2t) = 20$$

$$3 + 9t - 8 + 16t + 6 + 4t = 20$$

$$29t = 19 \quad \Rightarrow \quad t = \frac{19}{29}$$

$$a = 1 + 3\left(\frac{19}{29}\right) \quad b = -2 + 4\left(\frac{19}{29}\right)$$

$$a = 1 + \frac{67}{29} = \frac{86}{29} \quad b = -2 + \frac{76}{29} = \frac{18}{29}$$

$$c = 3 + 2\left(\frac{19}{29}\right) = 3 + \frac{38}{29} = \frac{125}{29},$$

por consiguiente

$$\vec{V}_2 = P - Q = \left(2 - \frac{86}{29}, 1 - \frac{19}{29}, 5 - \frac{125}{29}\right) = \left(\frac{28}{29}, \frac{11}{29}, \frac{20}{29}\right).$$

Luego la ecuación vectorial de la recta es

$$X(t) = P + t \vec{V}_2 = (2, 1, 5) + \frac{t}{29}(28, 11, 20)$$

y su ecuación simétrica es

$$\frac{x-2}{28} = \frac{y-1}{11} = \frac{z-5}{20}.$$

Ejercicio 1.9. Calcule el ángulo que forma la recta $\frac{x-3}{7} = \frac{y}{-1} = \frac{z-2}{3}$ con el plano $x + 3y - z + 1 = 0$.

Solución 1.9.

Llamamos $\pi/2 - \theta$ el ángulo tomado por las direcciones \vec{V} y \vec{N} sin tener en cuenta sus sentidos $\vec{V} = (7, -1, 3)$, $\vec{N} = (1, 3, -1)$, entonces

$$\cos(\pi/2 - \theta) = \frac{\|\vec{N} \cdot \vec{V}\|}{\|\vec{N}\| \|\vec{V}\|} = \frac{(1, 3, -1) \cdot (7, -1, 3)}{\|(1, 3, -1)\| \|(7, -1, 3)\|} = \frac{1}{\sqrt{649}} \approx 0,039$$

$$\pi/2 - \theta = \frac{87\pi}{180} \Rightarrow \theta = \pi/2 - \frac{87\pi}{180}.$$

Ejercicio 1.10. Calcule la distancia entre las dos rectas dadas:

$$l_1 : \begin{cases} x = 13 + 12t \\ y = 2 \\ z = 8 + 5t \end{cases} \quad l_2 : \begin{cases} x = 6 \\ y = 6 + t \\ z = -9. \end{cases}$$

Solución 1.10.

Halleemos el plano π , que contiene a l_1 y a l_2 . Sea \vec{V}_1 y \vec{V}_2 los vectores directores de las rectas l_1 y a l_2 respectivamente

$$\vec{V}_1 = (12, 0, 5) \quad \vec{V}_2 = (0, 1, 0)$$

el vector normal del plano π es

$$\vec{N} = (12, 0, 5) \times (0, 1, 0) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 12 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} = -5\hat{i} + 12\hat{k}$$

es decir, $\vec{N} = (-5, 0, 12)$. Escogemos un punto de la recta l_1 $(13, 2, 8)$, por lo tanto la ecuación del plano π es

$$\pi : -5(x - 13) + 0(y - 2) + 12(z - 8) = 0$$

esto es,

$$-5x + 12z - 31 = 0.$$

Sea $A = (6, 6, -9)$ un punto de la recta s

$$d_{ls}(l_1, l_2) = d_{ls}(\pi, l_2) = d_{ls}(A, \pi) = \frac{|-30 - 108 - 31|}{\sqrt{25 + 144}} = \frac{169}{13} = 13.$$

Ejercicio 1.11. Halle la ecuación del plano π que contiene a la recta

$$l = \begin{cases} x + y - z + 1 & = 0. \\ x + 2y + z & = 0. \end{cases}$$

y es ortogonal al plano $\pi : 2x - y + 3z + 1 = 0$.

Solución 1.11.

Encontremos un punto y un vector director de la recta l :

$$P = (1, -1, 1) \in l, \quad \text{esto implica que } (1, -1, 1) \in \pi_1$$

l : es la intersección de los dos planos, por lo tanto su vector director es

$$\vec{V} = (1, 1, 1) \times (1, 2, 1) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{vmatrix} = 3\hat{i} - 2\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{V} = (3, -2, 1).$$

Si el plano π_1 es ortogonal al plano que vamos a encontrar π_2 , entonces \vec{V} es paralelo a π_2 , por lo tanto, el vector normal de π_2 , lo cual lo denotamos por \vec{N}_2 es

$$\vec{N}_2 = (3, -2, 1) \times (2, -1, 3) = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ 3 & -2 & 1 \\ 2 & -1 & 3 \end{vmatrix} = -5\hat{i} - 7\hat{j} + \hat{k}$$

$$\vec{N}_2 = (5, 7, -1).$$

y la ecuación del plano π_2 es

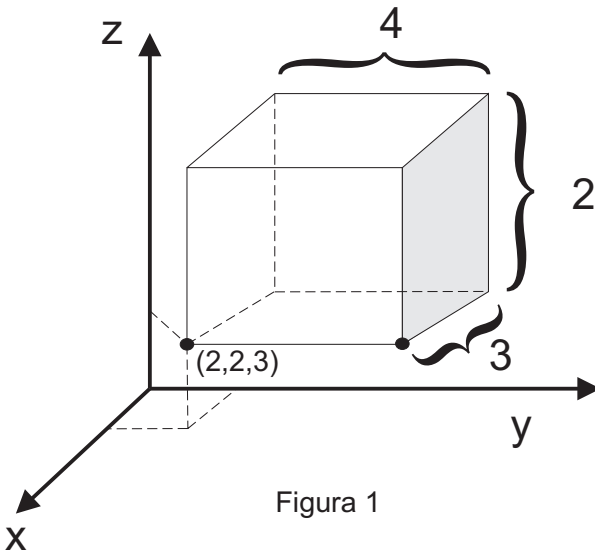
$$5(x - 1) + 7(y + 1) - 1(z - 1) = 0$$

es decir,

$$5x + 7y - z + 3 = 0.$$

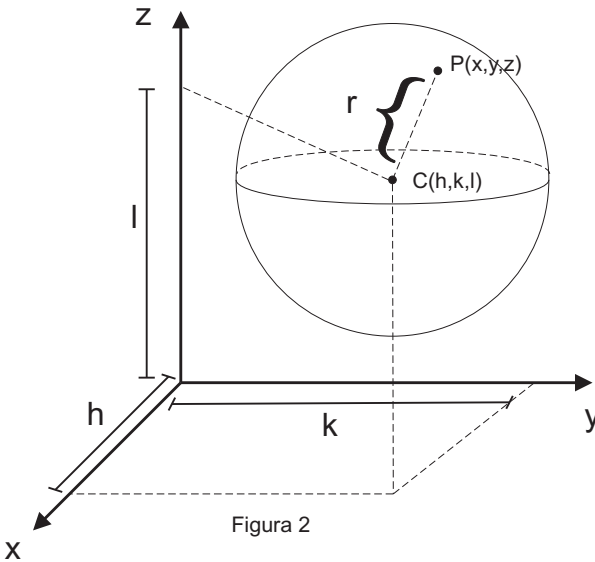
1.4. Ejecicios del capítulo 1

- 1) Un cuadrado de lado $2a$ tiene su centro en el origen y sus lados son paralelos a los ejes coordenados. Hallar las coordenadas de sus cuatro vértices.
- 2) Tres vértices de un rectángulo son los puntos $A(2, -1)$, $B(7, -1)$ y $C(7, 3)$. Hallar el cuarto vértice y el área del rectángulo.
- 3) Los vértices de un triángulo rectángulo son $A(1, -2)$, $B(4, -2)$ y $C(4, 2)$. Hallar: a) las longitudes de los catetos, b) el área del triángulo, c) la longitud de la hipotenusa y d) los puntos medios de cada uno.
- 4) Dos de los vértices de un triángulo equilátero son $A(-1, 1)$ y $B(3, 1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice. (Dos soluciones).
- 5) Uno de los extremos de un segmento rectilíneo de longitud 5 es $P(3, -2)$. Si la abscisa del otro extremo es 6, hallar su ordenada. (Dos soluciones).
- 6) Hallar la ecuación que expresa el hecho de que el punto $P(x, y)$ es equidistante de los puntos $A(-3, 5)$ y $B(7, 9)$.
- 7) Determinar en qué octante pueden estar situados los punto $P(x, y, z)$ si:
 - a) $xy > 0$.
 - b) $xz < 0$.
 - c) $xyz > 0$.
 - d) $xyz < 0$.
- 8) Dibujar el triángulo cuyos vértices se encuentran en los punto A , B y C . Determinar si el triángulo es isósceles, rectángulo de ambos tipos o de ninguno de ellos.
 - a) $A(2, 1, 0)$, $B(3, 3, 4)$, $C(5, 4, 3)$.
 - b) $A(-2, 6, 1)$, $B(5, 4, -3)$, $C(2, -6, 4)$.
 - c) $A(3, -4, 1)$, $B(5, -3, 0)$, $C(6, -7, 4)$.
- 9) Encuentre las longitudes de las medianas del triángulo con vértices en los puntos $A(1, 2, 3)$, $B(-2, 0, 5)$ y $C(4, 1, 5)$.
- 10) Considere la caja de la Figura 1.
 - a) Encuentre las coordenadas de los 7 vértices restantes.
 - b) Encuentre las coordenadas de los vértices si la caja se traslada 2 unidades en el sentido negativo de x , una unidad en el sentido positivo de y , 1 unidad en el sentido positivo de z . (Dibuje la caja).



Una esfera es el lugar geométrico de puntos en el espacio que se encuentran a una misma distancia r (llamada el radio) de un punto fijo C (llamado el centro).

Si el centro tiene coordenadas $C(h, k, l)$ y el radio es r y $P(x, y, z)$ es un punto cualquiera de la esfera. (Ver Figura 2).



La longitud del segmento PC es r , es decir:

$$\overline{PC} = r$$

$$\sqrt{(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2} = r$$

$$(x-h)^2 + (y-k)^2 + (z-l)^2 = r^2. \quad (1.1)$$

La igualdad (1.1) es la ecuación de una esfera con centro en (h, k, l) y radio r .

En particular, si el centro es el origen, la ecuación de la esfera es.

$$x^2 + y^2 + z^2 = r^2.$$

Ejemplos

- a. $x^2 + y^2 + z^2 = 4$ representa una esfera con centro en $(0, 0, 0)$ y radio 2. (Ver Figura 3.)

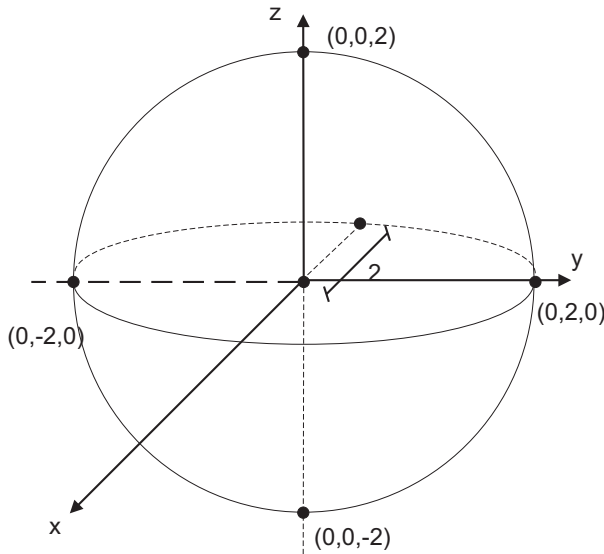


Figura 3

- b. Demuestre que la ecuación $2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + 4y - 4z = 2 - 4z$ es la ecuación de una esfera. Encuentre el centro y el radio.

Solución: Se divide la ecuación entre 2 y queda:

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2y - 2z = 1 - 2z$$

$$x^2 + 2x + y^2 + 2y + z^2 - 2z = 1 \quad \text{¿por qué?}$$

$$x^2 + 2x + 1^1 - 1^1 + y^2 + 2y + 1^1 - 1^1 + z^2 - 2z + 1^1 - 1^1 = 1 \quad \text{¿por qué?}$$

$$(x + 1)^2 + (y + 1)^2 + (z - 1)^2 = 4 \quad \text{¿por qué?}$$

Esta es la ecuación de una esfera con centro en el punto $(-1, -1, 1)$ y radio $r = 2$.

- 11) Encuentre la ecuación de la esfera con centro en C y radio r . Dibuje la esfera y encuentre otros 3 puntos de cada esfera.

a) $C(0, 1, -1), r = 4$.

b) $C(-6, -1, 2), r = 2\sqrt{3}$.

- 12) Demuestre que la ecuación dada representa una esfera; obtenga el centro, el radio y grafique.

a) $x^2 + y^2 + z^2 + 2x + 8y - 4z = 28$.

b) $x^2 + y^2 + z^2 = z$.

c) $x^2 + y^2 + z^2 + x - 2y + 6z - 2 = 0$.

- 13) Encuentre un vector \vec{V} con representación dada por el segmento lineal dirigido \overrightarrow{AB} . Dibuje \overrightarrow{AB} y la representación equivalente que empieza en el origen.

a) $A(1, 3), B(4, 4)$.

b) $A(3, -1), B(3, -3)$.

c) $A(0, 3, 1), B(2, 3, -1)$.

d) $A(1, -2, 0), B(1, -2, 3)$.

- 14) Considere los vectores del ejercicio (1). Encuentre:

a) Un vector unitario \vec{U} en la misma dirección de \vec{V} .

b) Un vector \vec{S} en la dirección opuesta a \vec{V} .

- 15) Encuentre un vector \vec{V} que tenga la magnitud y dirección dadas.

a) $\|\vec{V}\| = 3, \quad \theta = \frac{\pi}{6}$.

b) $\|\vec{V}\| = 6, \quad \theta = \frac{2\pi}{3}$.

c) $\|\vec{V}\| = 2, \quad \theta = \pi$.

- 16) Dos remolcadores llevan un barco grande a un puerto, como se muestra en la Figura 4. El remolcador mayor ejerce una fuerza de 4000 lbf sobre su cable y el menor ejerce una fuerza de 3200 lbf. Calcule el ángulo θ que debe formar la dirección del remolcador grande con respecto al segmento \overrightarrow{AB} para que el barco navegue a lo largo de la recta que va de A a B .

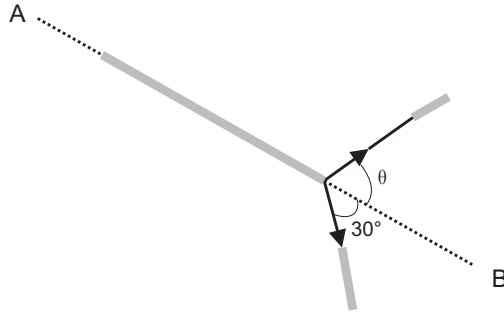


Figura 4

- 17) La Figura 5 muestra un aparato que se usa para simular las condiciones de gravedad en otros planetas. Se ata una cuerda a un astronauta que realiza maniobras sobre un ángulo inclinado a un ángulo de θ grados con la horizontal. El astronauta pesa 160 lb. Calcule las componentes x y y de la fuerza hacia abajo (Ver ejes en la Figura 5).

La componente y en la parte (a) es el peso del astronauta con respecto al plano inclinado. El astronauta pesaría 27 lbf en la luna y 60 lbf en Marte. Calcule los ángulos θ (con una precisión de un centésimo de grado) para que el aparato del plano inclinado simule la gravedad en esos lugares.

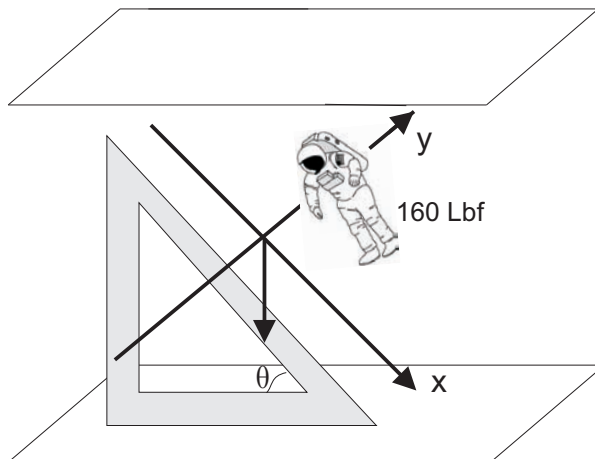


Figura 5

Demuestre que no existe un vector unitario cuyos ángulos directores sean $\frac{\pi}{6}$, $\frac{\pi}{3}$ y $\frac{\pi}{4}$.
¿Cuál debe ser el valor del 3^{er} ángulo para que exista tal vector?

- 18) Los tres ángulos directores de cierto vector unitario son los mismos y están entre 0 y $\frac{\pi}{2}$. ¿Cuál es el vector?
- 19) Encuentre el vector de magnitud 12 que tenga la misma dirección del vector del problema (6).
- 20) Considere los puntos A , B y C como en la Figura 6.

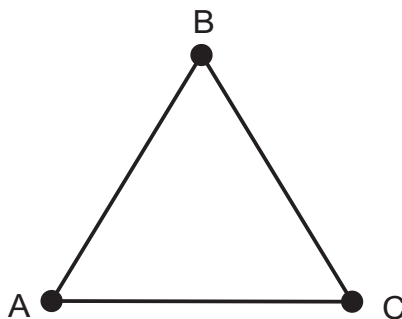


Figura 6

Observe que: $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BC} = \overrightarrow{AC} - \overrightarrow{AB}$. Ver figura 4.

Expresé de manera similar los vectores \overrightarrow{BA} , \overrightarrow{CA} y \overrightarrow{CB} de dos formas.

En los ejercicios 10, 11, 12 emplee un método análogo al que se usa en el siguiente ejemplo.

Ejemplo: Considere el triángulo con vértices A , B , y C . Sean D y E los puntos medios de los lados \overline{AB} y \overline{BC} respectivamente. (Ver Figura 6). Muestre que :

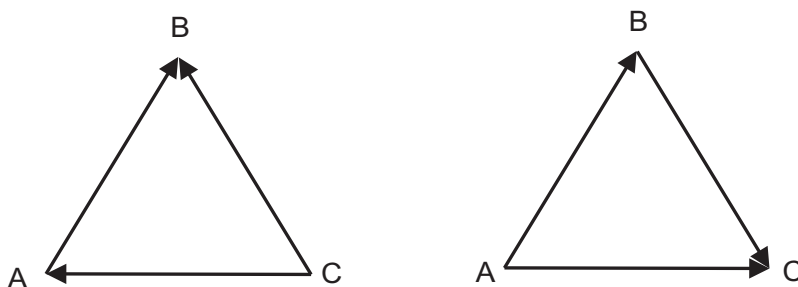


Figura 7

Solución: Tomando adecuadamente los vectores \overrightarrow{AB} , \overrightarrow{BC} y \overrightarrow{AC} , se observa que:

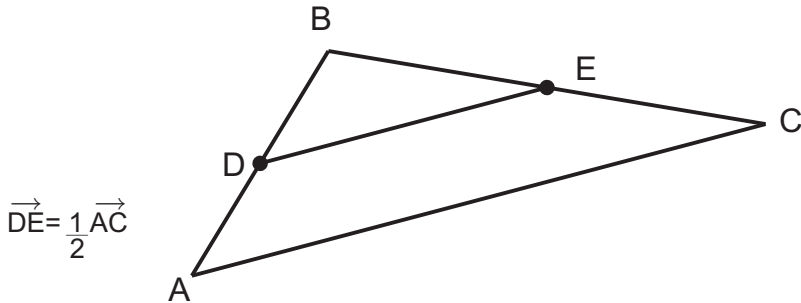


Figura 8

Puesto que D y E son los puntos medios de \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} entonces:
 $\overrightarrow{DB} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AB}$ y $\overrightarrow{BE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{BC}$. Es decir, $\overrightarrow{AB} = 2\overrightarrow{DB}$ y $\overrightarrow{BC} = 2\overrightarrow{BE}$. (Ver Figura 8).

Reemplazando en la anterior ecuación \overrightarrow{AB} y \overrightarrow{BC} se tiene:

$$2\overrightarrow{DB} + 2\overrightarrow{BE} = \overrightarrow{AC}$$

$$2(\overrightarrow{DB} + \overrightarrow{BE}) = \overrightarrow{AC} \quad \text{¿Por qué?}$$

$$2(\overrightarrow{DE}) = \overrightarrow{AC} \quad \text{¿por qué?}$$

$$\overrightarrow{DE} = \frac{1}{2} \overrightarrow{AC} \quad \text{¿por qué?}$$

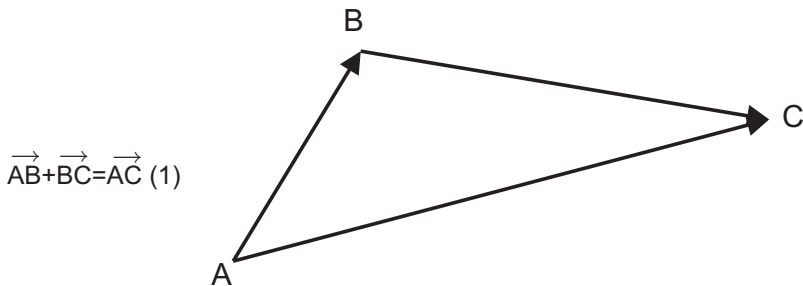


Figura 9

- 21) El polígono que resulta de unir los puntos medios de los lados de un cuadrilátero cualquiera es un paralelogramo.

(Ver Figura 10).

(Sugerencia: Debe mostrar que $\overrightarrow{EF} = \overrightarrow{HG}$ y $\overrightarrow{EH} = \overrightarrow{FG}$).

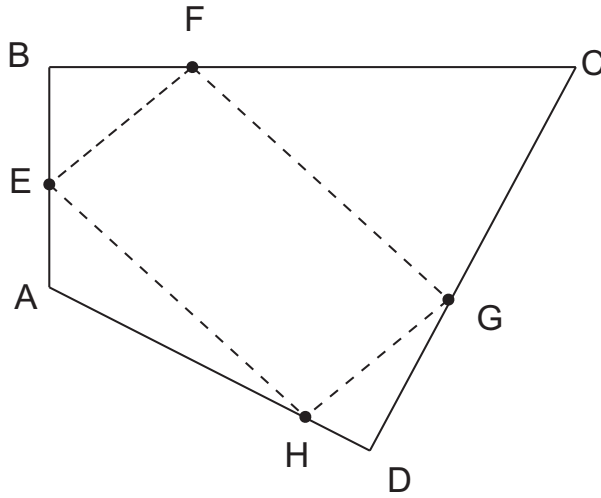


Figura 10

- 22) El segmento de recta que une los puntos medios de las diagonales de un trapecio es la mitad de la diferencia de las bases. (Ver Figura 11).

(Sugerencia: Debe mostrar que $\vec{EF} = \frac{1}{2}(\vec{AD} - \vec{BC})$. Considere el vector auxiliar \vec{AF} .)

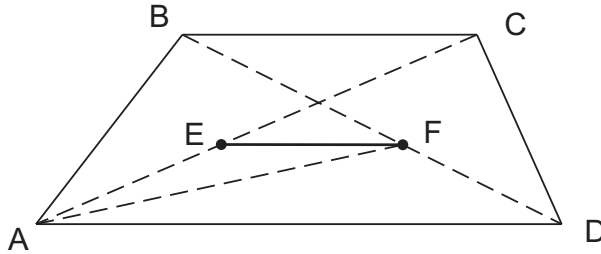


Figura 11

- 23) El segmento de recta que une los puntos de lados no paralelos de un trapecio es paralelo a las bases e igual a su semisuma. Ver Figura 12.

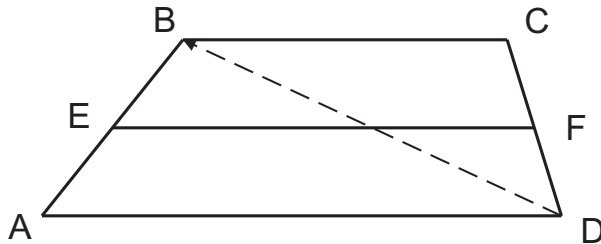


Figura 12

- 24) Sugerencia: debe demostrar que $\overrightarrow{EF} = \frac{1}{2}(\overrightarrow{AD} - \overrightarrow{BC})$, considere un vector auxiliar \overrightarrow{DB} .
- 25) Determine si los vectores dados son ortogonales, paralelos o ninguno de los dos.
- $\vec{u} = 3i + 5j$ $\vec{v} = -6i - 10j$.
 - $\vec{u} = (2, 3)$ $\vec{v} = (6, 4)$.
 - $\vec{u} = i - 2j + 2k$ $\vec{v} = -2i + 4j - 4k$.
- 26) Sean $\vec{u} = 3i + j$ y $\vec{v} = i + \alpha j$. Determine el valor de α (si existe) tal que:
- \vec{u} y \vec{v} son ortogonales.
 - \vec{u} y \vec{v} son paralelos.
 - El ángulo entre \vec{u} y \vec{v} es $\pi/4$.
 - El ángulo entre \vec{u} y \vec{v} es $\pi/3$.
 - El ángulo entre \vec{u} y \vec{v} es π .
- 27) Demuestre que los puntos $(0, 0, 0)$, $(1, 1, 0)$, $(1, 0, 1)$ y $(0, 1, 1)$ son los vértices de un tetraedro regular, mostrando que cada una de las aristas tiene longitud $\sqrt{2}$. Después utilice el producto punto para determinar el ángulo entre dos aristas del tetraedro.
- 28) Use vectores para demostrar que si \overline{AB} es el diámetro de una esfera con centro O y radio r , y si P es otro punto de la esfera, entonces APB es un triángulo rectángulo. (Sugerencia: Defina $\vec{V}_1 = \overrightarrow{OA}$, $\vec{V}_2 = \overrightarrow{OP}$, y escriba \overrightarrow{PA} y \overrightarrow{PB} en términos de \vec{V}_1 y \vec{V}_2). Ver Figura 13.

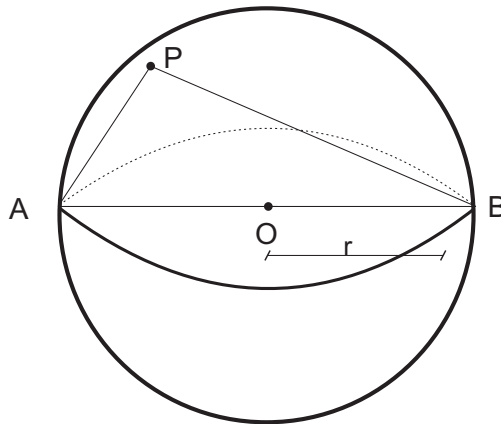


Figura 13

- 29) Sean \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} tres vectores arbitrarios. Explique por qué el producto $\vec{u} \cdot \vec{v} \cdot \vec{w}$ no está definido.

- 30) Sean \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} vectores no nulos tales que $\vec{w} = \|\vec{u}\| \vec{v} + \|\vec{v}\| \vec{u}$. Demuestre que \vec{w} bisecta el ángulo formado por \vec{u} y \vec{v} .
- 31) Los vectores \vec{a} y \vec{b} forman un ángulo de 120° , sabiendo que $\|\vec{a}\| = 3$ y $\|\vec{b}\| = 5$. Calcular $\|\vec{a} + \vec{b}\|$ y $\|\vec{a} - \vec{b}\|$. Sugerencia: $\|\vec{u}\|^2 = \vec{u} \cdot \vec{u}$.
- 32) Los vectores \vec{u} y \vec{v} son perpendiculares entre si. Si $\|\vec{u}\| = 5$ y $\|\vec{v}\| = 2$. Determine $\|\vec{u} + \vec{v}\|$ y $\|\vec{u} - \vec{v}\|$.
- 33) Demostrar la identidad

$$\|\vec{u} + \vec{v}\|^2 + \|\vec{u} - \vec{v}\|^2 = 2(\|\vec{u}\|^2 + \|\vec{v}\|^2).$$

- 34) Dados los vectores unitarios \vec{u} , \vec{v} y \vec{w} que satisfacen la condición $\vec{u} + \vec{v} + \vec{w} = 0$, calcular $\vec{u} \cdot \vec{v} + \vec{v} \cdot \vec{w} + \vec{u} \cdot \vec{w}$.
- 35) Sabiendo que $\|\vec{u}\| = 3$ y $\|\vec{v}\| = 5$, determinar para qué valores de α los vectores $\vec{u} + \alpha\vec{v}$, $\vec{u} - \alpha\vec{v}$ son perpendiculares entre sí.
- 36) Considere los vectores \vec{u} y \vec{v} . Encuentre $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$, la componente escalar del vector proyección. Grafique los vectores \vec{u} , \vec{v} y $Proy_{\vec{v}}\vec{u}$.
- a) $\vec{u} = (1, 1)$ $\vec{v} = (2, -3)$.
- b) $\vec{u} = 2i + j$ $\vec{v} = i - 2j$.
- c) $\vec{u} = 2i - 3j + 4k$ $\vec{v} = -2i - 3j + 5k$.
- d) $\vec{u} = i - 7j + 3k$ $\vec{v} = 3i + 4j + 5k$.

- 37) Supongamos que el vector fuerza de la Figura 14 está inclinado con un ángulo de 30° con respecto al suelo. Si el niño ejerce una fuerza constante de 20 libras. ¿Cuánto trabajo (en pies-libras) se realiza al halar el trineo una distancia de 100 pies a lo largo del suelo?

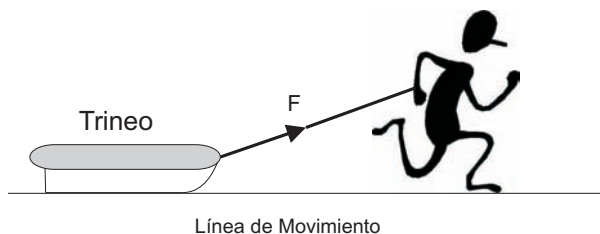


Figura 14

- 38) Supongamos que las componentes horizontal y vertical de los vectores que se muestran en la Figura 15 están balanceados (la suma algebraica de las componentes horizontales es cero, al igual que la suma de las componentes verticales). ¿Cuánto trabajo realiza la fuerza constante \mathbf{F} (Paralela al plano inclinado) al halar el peso mg hacia arriba del plano inclinado una altura vertical h .

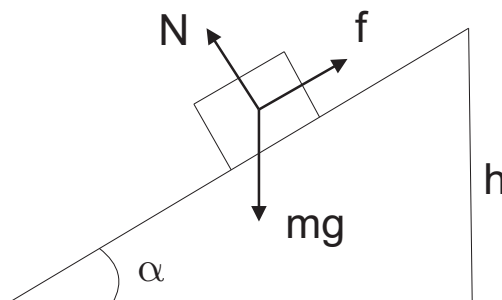


Figura 15

- Encuentre dos vectores unitarios ortogonales tanto a $\vec{u} = 2\mathbf{i} - 3\mathbf{j}$ como a $\vec{v} = 4\mathbf{j} + 3\mathbf{k}$.
Sugerencia: Escriba cada vector en términos de sus componentes como por ejemplo: $u = (u_1, u_2, u_3)$ y efectúe los cálculos.
- 39) Se dan los vértices de un triángulo $A(1, -1, 2)$, $B(5, -6, 2)$ y $C(1, 3, -1)$. Calcular la longitud de su altura desde el vértice B al lado AC de dos formas:
- Utilizando producto cruz.
 - Utilizando proyecciones.
- 40) Sean \vec{u} y \vec{v} vectores no paralelos si se tiene que $\vec{u} \cdot \vec{v} = 2$, $\|\vec{u}\| = 1$, $\|\vec{v}\| = 4$ y además $\vec{w} = 2(\vec{u} \times \vec{v}) - 3\vec{v}$, halle:
- $\vec{u} \cdot (\vec{v} + \vec{w})$.
 - $\|\vec{w}\|$. Sugerencia: Use el hecho de $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$ y el ejercicio 28.
 - El ángulo que forman \vec{u} y \vec{w} .
- 41) Suponga que $\vec{u} \neq \vec{0}$.
- Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$. ¿Se puede concluir que $\vec{u} = \vec{w}$?
 - Si $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$. ¿Se deduce de ello que $\vec{v} = \vec{w}$?
 - Si $\vec{u} \cdot \vec{v} = \vec{u} \cdot \vec{w}$ y $\vec{u} \times \vec{v} = \vec{u} \times \vec{w}$. ¿Se deduce de ello que $\vec{v} = \vec{w}$?
- 42) Pruebe que $(\vec{u} - \vec{v}) \times (\vec{u} + \vec{v}) = 2(\vec{u} \times \vec{v})$.
- 43) Sean \vec{u} y \vec{v} vectores ortogonales y unitarios de \mathbb{R}^3 . Si \vec{w} es vector de \mathbb{R}^3 tal que $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$, compruebe que:

a) \vec{u} es ortogonal a \vec{w} .

b) $\vec{u} \times (\vec{w} \times \vec{u}) = \vec{w}$.

c) $\vec{w} = \frac{\vec{u} \times \vec{v} + \vec{v}}{2}$.

Sugerencia: Use la igualdad $\vec{v} = \vec{w} + \vec{w} \times \vec{u}$ y el numeral (b).

d) $\|\vec{w}\| = \frac{\sqrt{2}}{2}$

Sugerencia: Use el numeral (c) y el hecho de que \vec{u} y \vec{v} son vectores ortogonales, unitarios y que $\|\vec{w}\|^2 = \vec{w} \cdot \vec{w}$.

- 44) La Figura 16 muestra un terreno poligonal, con los ángulos y longitudes medidas por un topógrafo. Determine primero las coordenadas de cada vértice y utilice después el producto vectorial para calcular el área del terreno.

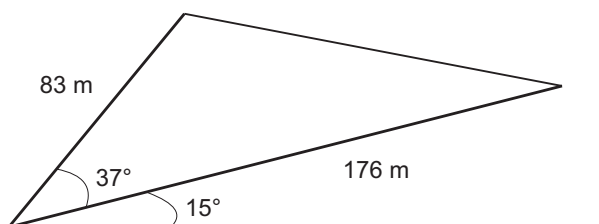


Figura 16

- 45) Repita el problema anterior con el terreno de la Figura 17.

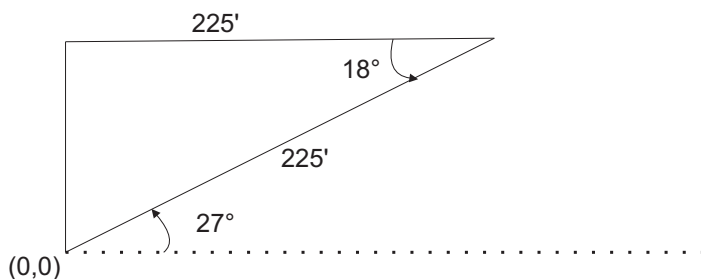


Figura 17

- 46) Utilice el triple producto escalar para verificar que:

a) Los vectores $\vec{u} = 2i + 3j + k$, $\vec{v} = i - j$ y $\vec{w} = 7i + 3j + 2k$ son coplanares.

b) Los puntos $P(1, 0, 1)$, $Q(2, 4, 6)$, $R(3, -1, 2)$ y $S(6, 2, 8)$ son coplanares.

- 47) Demuestre que la recta que pasa por los puntos $(2, -1, 5)$ y $(8, 8, 7)$ es paralela a la recta que pasa por los puntos $(4, 2, -6)$ y $(8, 8, 2)$.

- 48) Demuestre que la recta que pasa por los puntos $(0, 1, 1)$ y $(1, -1, 6)$ es perpendicular a la recta que pasa por los puntos $(-4, 2, 1)$ y $(-1, 6, 2)$.
- 49) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por el punto $(0, 2, 1)$ y es paralela a la recta que tiene ecuaciones paramétricas: $x = 1 + 2t, y = 3t$ y $z = 5 - t$.
- 50) Encuentre los puntos en los que la recta anterior intersecta a los planos coordenados.
- 51) Sea L_1 la recta dada por: $\frac{x-x_1}{a_1} = \frac{y-y_1}{b_1} = \frac{z-z_1}{c_1}$ y sea L_2 la recta dada por $\frac{x-x_1}{a_2} = \frac{y-y_1}{b_2} = \frac{z-z_1}{c_2}$. Demuestre que L_1 es ortogonal a L_2 si y sólo si $a_1a_2 + b_1b_2 + c_1c_2 = 0$.
- 52) Demuestre que las rectas $L_1 : x = 1 + t, y = -3 + 2t, z = -2 - t$ y $L_2 : x = 17 + 3s, y = 4 + s, z = -8 - s$. Tienen el punto $(2, -1, -3)$ en común.
- 53) Demuestre que las rectas $L_1 : x = 2 - t, y = 1 + t, z = -2t$ y $L_2 : x = 1 + s, y = -2s$ y $z = 3 + 2s$. No tienen un punto en común.
- 54) Deduzca una expresión para calcular la distancia entre dos rectas.
Sugerencia: La distancia se mide a lo largo del vector \vec{v} que es perpendicular tanto a L_1 como a L_2 . Sean P un punto en L_2 y Q un punto en L_1 . Entonces la magnitud del vector proyección de \vec{PQ} sobre \vec{v} ($Proy_{\vec{v}}\vec{PQ}$) es la distancia entre las rectas. Ver Figura 18.

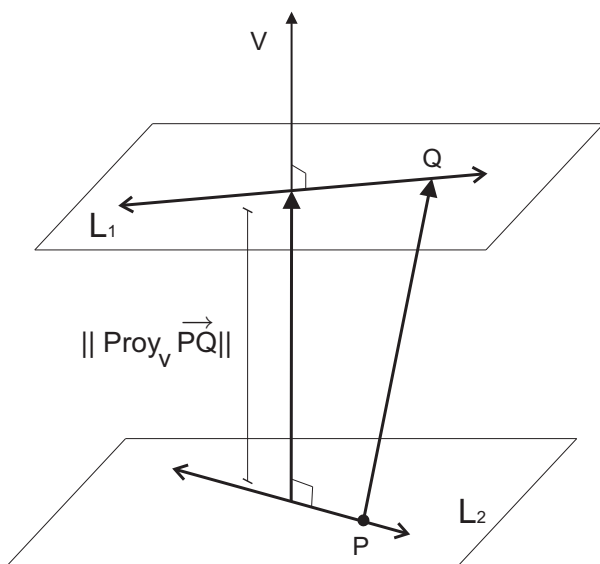


Figura 18

Halle la distancia entre las rectas:

a)

$$L_1 : \frac{x-2}{2} = \frac{y-5}{2} = \frac{z-1}{-1}$$

$$L_2 : \frac{x-4}{-4} = \frac{y-5}{4} = \frac{z+2}{1}.$$

b)

$$L_1 : \frac{x+2}{3} = \frac{y-7}{-4} = \frac{z-2}{4}$$

$$L_2 : \frac{x-1}{-3} = \frac{y+2}{4} = \frac{z+1}{1}.$$

55) a) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta que pasa por (5, 1, 0) y es perpendicular al plano $2x - y + z = 1$.

b) ¿En qué puntos esta recta intersecta a los planos coordenados?

56) Encuentre la ecuación del plano que pasa por los 3 puntos dados:

a) (0, 0, 0); (1, 1, 1); (1, 2, 3).

b) (1, 0, -3); (0, -2, -4); (4, 1, 6).

57) Encuentre la ecuación del plano que pasa por el punto dado y contiene a la recta indicada:

a) (1, 6, -4); $x = 1 + 2t, y = 2 - 3t, z = 3 - t$.

b) (0, 1, 2); $x = y = z$.

58) Encuentre el punto en que la recta intersecta al plano:

a) $x = 1 + t, y = 2t, z = 3t; x + y + z = 1$.

b) $x = 5, y = 4 - t, z = 2t + 4; 2x - y + z = 5$.

59) Determine si los planos dados son paralelos, perpendiculares o ninguno de los casos. En este último caso, encuentre el ángulo comprendido entre ellos.

a) $x + 4y - 3z = 1, -3x + 6y + 7z = 0$.

b) $2x + 4y - 2z = 1, -3z - 6y + 3z = 10$.

c) $x + z = 1, y + z = 1$.

60) Encuentre las ecuaciones paramétricas de la recta de intersección de los planos dados:

a) $z = x + y, 2x - 5y - z = 1$.

b) $2x + 5z + 3 = 0, x - 3y + z + 2 = 0$.

61) Encuentre la ecuación del plano que pasa por la recta de intersección de los planos $x + y - z = 2$ y $2x - y + 3z = 1$ y pasa por el punto $(-1, 2, 1)$.

62) Encuentre la distancia del punto a la recta indicada:

a) $(1, 2, 3), x = 2 + t, y = 2 - 3t, z = 5t$.

b) $(1, 0, -5); \frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{-1} = \frac{z}{3}$.

63) Demuestre que la distancia entre dos planos paralelos $ax + by + cz = d_1$ y $ax + by + cz = d_2$ está dada por

$$d = \frac{|d_1 - d_2|}{\sqrt{a^2 + b^2 + c^2}}.$$

Aplique esta fórmula para calcular la distancia entre los planos $3x + 6y - 9z = 4$ y $x + 2y - 3z = 1$.

64) a) Graficar los planos $y = 3, z = -1, x + y = 1, x = z, x + 2y + z = 4$.

b) Graficar en un mismo espacio, mostrando las intersecciones de los siguientes planos: $z + y = 1, z = 1$ y $y = 2$.

Capítulo 2

Matrices

Las matrices aparecen por primera vez hacia el año de 1850, introducida por J. J. Sylvester, y el desarrollo inicial de esta teoría, se debe al matemático W. R. Hamilton en 1853. Sin embargo fue A. Cayley quien introduce la notación matricial como una forma abreviada de escribir un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas.

El concepto de matriz es una herramienta del álgebra lineal que facilita el ordenamiento de datos, así como su manejo.

Definición 2.1. Una matriz A $m \times n$ es un arreglo rectangular de mn números reales (o complejos) ordenados en m filas horizontales y n columnas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}.$$

La i -ésima fila de n es $(a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in})$ donde $1 \leq i \leq m$. También se llama matriz de fila $1 \times n$.

La j -ésima columna de A es

$$\begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{mj} \end{pmatrix}.$$

donde $1 \leq j \leq n$, también se le llama matriz de columna $m \times 1$. Si $m = n$ decimos entonces que A es una matriz cuadrado $n \times n$. También designaremos las matrices mediante la notación abreviada $A = (a_{ij})$.

2.1. Operaciones entre matrices

Definición 2.2. Diremos que dos matrices $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son iguales si y sólo si, tienen el mismo número de filas, el mismo número de columnas, e iguales elementos $a_{ij} = b_{ij}$ para cada par (i, j) .

Definición 2.3. Si $A = (a_{ij})$ y $B = (b_{ij})$ son matrices $m \times n$ y si c es un número real cualquiera, definimos las matrices $A + B$ y cA de la siguiente forma.

$$A + B = a_{ij} + b_{ij} = c_{ij} \quad 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$$

$$cA = ca_{ij} = (ca_{ij}),$$

$A + B$ y cA tiene el mismo tamaño que las matrices A y B .

Ejemplo 2.1. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular $A + B$ y $-4A$

Solución 2.1.

$$A + B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 7 & -5 & 4 \\ -3 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & -2 & 3 \\ -3 & -4 & 8 \end{pmatrix}$$

$$(-4)A = (-4) \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 0 & -5 & 6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -12 & 4 \\ 0 & 20 & -24 \end{pmatrix}.$$

Definimos la matriz $O_{m \times n}$ como la matriz cuyas componentes son todas ceros. Por ejemplo la matriz O de orden 2×2 es

$$O_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Claramente el conjunto de matrices es conmutativo y asociativo con respecto a la suma.

Definición 2.4. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $m \times n$, entonces la matriz $A^T = a_{ij}^T$ de $n \times m$ donde $a_{ij}^T = a_{ji}$ $1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n$, es la transpuesta de la matriz A , esta matriz se obtiene intercambiando las filas por las columnas de A .

Ejemplo 2.2. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 0 & -1 \\ -2 & -4 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1/2 & 3 & -7 \\ 6 & -5 & 1 \\ 8 & 1/4 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } D = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Calcular la matriz transpuesta a cada matriz:

Solución 2.2.

$$A^T = \begin{pmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 6 \\ 2 & 7 \end{pmatrix}, \quad B^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 3 & -1 & 4 \end{pmatrix}, \quad C^T = \begin{pmatrix} 1/2 & 6 & 8 \\ 3 & -5 & 1/4 \\ -7 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

$$D^T = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

Teorema 2.1. Si $r \in \mathbb{R}$ y A y B son matrices entonces

- a) $(A^T)^T = A$
- b) $(A + B)^T = A^T + B^T$
- c) $(rA)^T = rA^T$.

Demostración 2.1.

La demostración se propone como ejercicio.

Definición 2.5. Sean $A = (a_{ij})$ una matriz $m \times p$ y $B = (b_{ij})$ una matriz $p \times n$. El producto AB se define como la matriz $C = (c_{ij})$ $m \times n$, cuyos elementos c_{ij} están definidos de la siguiente manera:

$$c_{ij} = \sum_{k=1}^p a_{ik} b_{kj}.$$

Esto significa que el i -ésimo elemento de la matriz producto AB , es el producto de la i -ésima fila de la A con la j -ésima columna de B .

$$\begin{array}{c} \text{Fila } i\text{-ésima} \end{array} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} & \cdots & b_{1j} & \cdots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2j} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ b_{p1} & b_{p2} & \cdots & b_{pj} & \cdots & b_{pn} \end{pmatrix},$$

Columna j -ésima.

Observe que el producto entre matrices, A y B sólo está definido cuando el número de filas de A es igual al número de columnas de B .

$$\begin{array}{c} A_{m \times p} \times B_{p \times n} = AB \\ \boxed{\begin{array}{c} \text{iguales} \end{array}} \\ \text{Tamaño de } AB \end{array}$$

Ejemplo 2.3. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$ calcular AB .

Solución 2.3.

Dado que A es una matriz 2×3 y B es una matriz 3×2 , entonces AB es una matriz 2×2 y esta representada por

$$\begin{aligned} AB &= \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & 2 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 6 \\ 0 & 7 \\ 3 & 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (1)(1) + (-1)(0) + (3)(3) & (1)(6) + (-1)(7) + (3)(5) \\ (2)(1) + (2)(0) + (4)(3) & (2)(6) + (2)(7) + (4)(5) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 10 & 14 \\ 14 & 46 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si A y B son matrices cuadradas del mismo tamaño, entonces AB y BA están definidas.

Por ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, esto implica que

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 & 1 & 9 \\ 9 & 7 & 12 \\ 5 & 1 & 15 \end{pmatrix}$$

$$BA = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 3 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 3 & 4 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 5 & -2 \\ 7 & 13 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

Observación. El producto de matrices no es conmutativo, es decir, $AB \neq BA$ y $(AB)^T = B^T A^T$.

Ejemplo 2.4. Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ y \end{pmatrix}$,

si $AB = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix}$. Halle x e y .

Solución 2.4.

$$AB = \begin{pmatrix} 1 & x & 3 \\ 2 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 + 4x + 3y \\ 4 - 4 + y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 \\ 6 \end{pmatrix},$$

entonces

$$\begin{aligned} 2 + 4x + 3y &= 12 \\ y &= 6 \end{aligned}$$

Por lo tanto $x = -2$.

El siguiente teorema muestra que la multiplicación de matrices satisface a las leyes asociativas y distributivas.

Teorema 2.2. *Dadas las matrices A , B y C . Si los productos (ABC) y $(AB)C$ están definidos, entonces:*

- a) $A(BC) = (AB)C$ (Ley asociativa).
- b) Suponga que A y B sean del mismo tamaño. Si AC y BC están definidas, entonces $(A + B)C = AC + BC$ (Ley distributiva por derecha).

Si CA y CB están definidas entonces $C(A + B) = CA + CB$ (Ley distributiva por izquierda).

Demostración 2.2.

La demostración se deja como ejercicio.

Definición 2.6. 1) La matriz escalar $n \times n$ denotada por:

$$I_n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}$$

tal que sus entradas en la diagonal principal son iguales a uno, y el resto de sus componentes es igual a cero, es la matriz identidad de orden n .

- 2) Si A es una matriz cuadrada, definimos la potencia entera de A por inducción como:

$$A^0 = I, \quad A^n = AA^{n-1} \text{ para tod } n \geq 1.$$

Ejemplo 2.5. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ demostrar que $A^2 = 2A - I$. Calcular A^{100}

Solución 2.5.

$$A^2 = 2A - I = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$A^3 = A^2 \cdot A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -3 & 1 \end{pmatrix}.$$

En general

$$A^{100} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -100 & 1 \end{pmatrix}.$$

2.2. Sistema de ecuaciones lineales

Un conjunto de m ecuaciones de la forma

$$\begin{aligned} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n &= b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n &= b_2 \\ &\vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n &= b_m. \end{aligned} \quad (1)$$

Se llama sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas. Una solución del sistema es una n -upla de números (x_1, x_2, \dots, x_n) que satisface todas las ecuaciones. Ahora, definimos las siguientes matrices

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

observemos que

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto el sistema (1) se puede representar de forma matricial de la forma $AX = b$, donde A es la matriz de coeficiente del sistema (1).

La matriz aumentada del sistema (1) se escribe como $[A:b]$. Recíprocamente, cualquier matriz con más de una columna se puede considerar la matriz aumentada de un sistema lineal. La matriz de coeficientes y la matriz aumentada son de gran importancia en nuestro método de solución de sistemas de ecuaciones lineales.

2.2.1. Solución de sistemas de ecuaciones lineales

Nuestro objetivo en esta sección es encontrar soluciones al sistema lineal no homogéneo $[A:b]$ (homogéneo si $b = 0$). El procedimiento que sugeriremos consiste en manipular la matriz aumentando $[A:b]$ que representa a un sistema de ecuaciones lineales dado, hasta llevarla a una forma mas sencilla en la cual se pueda deducir fácilmente las soluciones.

Definición 2.7. Una matriz de orden $m \times n$ está en forma escalonada reducida por filas, cuando satisface las siguientes propiedades:

- i) Todas las filas que constan sólo de ceros, si las hay están en la parte inferior de la matriz.
- ii) Al leer de izquierda a derecha, la primera entrada distinta de cero en cada fila (que no esté formada completamente de cero) es un 1, llamado la entrada principal de su fila.
- iii) Si las filas $i, i+1$ son dos filas sucesivas que no son ceros (todas sus componentes son ceros), entonces la entrada principal de la fila $i+1$ está a la derecha de la entrada principal de la fila i .
- iv) Si una columna contiene una entrada principal de alguna fila, entonces el resto de las entradas de estas columnas son iguales a cero.

Nota. Una matriz en forma escalonada reducida por filas podría no tener filas que consten completamente de ceros.

Ejemplo 2.6. Escribir tres matrices en forma escalonada reducida por filas

Solución 2.6.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1/2 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 2.7. Escribir tres matrices que no estén en forma escalonada reducida por filas

Solución 2.7.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 0 & 5 & 3 & 4 \\ 0 & 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 3 & 6 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 4 \end{pmatrix}.$$

No cumple (i)

No cumple (ii)

No cumple (iii)

Estudiaremos ahora, la manera de transforma una matriz dada en una matriz en forma escalonada reducida en filas.

Definición 2.8. Una operación elemental por fila sobre una matriz $A = (a_{ij})$ es una de las siguientes operaciones

- i) Intercambiamos las filas r y s de A . Esto es, reemplazar $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$ por $a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}$ y recíprocamente.
- ii) Multiplicar la fila r de A por $c \neq 0$. Esto es, reemplazar $a_{r1}, a_{r2}, \dots, a_{rn}$ por $ca_{r1}, ca_{r2}, \dots, ca_{rn}$.
- iii) Sumar d veces la fila r de A a la fila s de A , $r \neq s$. Esto es, reemplazar $a_{s1}, a_{s2}, \dots, a_{sn}$ por $a_{s1} + da_{r1}, a_{s2} + da_{r2}, \dots, a_{sn} + da_{rn}$.

Ejemplo 2.8. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix},$$

al intercambiar las filas 1 y 2 de A obtenemos la matriz B , al multiplicar la tercera fila de A por 2, obtenemos la matriz C y al sumar 3 veces la fila uno de A a la fila 3 de A obtenemos la matriz D . Halle B , C y D .

Solución 2.8.

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 5 & 6 \end{pmatrix}, C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 0 & 10 & 12 \end{pmatrix}, D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & 2 \\ 3 & 11 & 13 \end{pmatrix}.$$

Definición 2.9. Una matriz A de orden $m \times n$ es equivalente por filas a una matriz B de orden $m \times n$, si B se puede obtener al aplicar una serie finita de operaciones elementales, por filas a A .

Ejemplo 2.9. Diga si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 2 & -1 \\ -2 & 3 & 1 \end{pmatrix}$ es equivalente por filas a la matriz

$$B = \begin{pmatrix} 5 & 7 & 2 \\ -2 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & -1 \end{pmatrix}.$$

Solución 2.9.

Si, pues la matriz B se obtiene de la matriz A al hacer dos operaciones elementales: la primera operación es reemplazar la fila uno por 3 veces la fila 2 más la fila 1. La otra operación elemental es intercambiar las filas dos y tres.

Teorema 2.3. *Toda matriz A de orden $m \times n$ distinta de cero, es equivalente por filas a una única matriz en forma escalonada reducida por filas.*

Demostración 2.3.

La demostración se propone como ejercicio.

Explicamos el teorema presentando los pasos que se le deben realizar a una matriz dada A , para obtener una matriz en forma escalonada reducida por filas que sea equivalente por filas a la matriz A . Utilicemos el siguiente ejemplo para ilustrar los pasos.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -5 & 4 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Paso I: Obtener un 1 en el vértice superior izquierdo de la matriz A . Podemos hacerlo intercambiando la primera fila y la segunda de la matriz A . Otra opción es multiplicar la primera fila por $\frac{1}{2}$. Intercambiamos las filas uno y dos

$$A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & -5 & 4 \\ 1 & -4 & 6 \end{pmatrix}.$$

- Paso II: Convertir todos los restantes elementos de la primera columna en ceros, dejando el primero quieto. Basta para ello multiplicar la primera fila por -2 y sumar el resultado a la segunda fila. Luego multiplicamos la primera fila por -1 y sumamos el resultado a la tercera. Después obtenemos la matriz

$$A_2 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Paso III: Repetimos el proceso en la matriz $\begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$ que aparece junto a los dos ceros. Podemos obtener 1 en su vértice superior izquierdo multiplicando la segunda fila por -1. Por consiguiente obtenemos la matriz

$$A_3 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 5 \end{pmatrix}.$$

- Paso IV: Multiplicamos la segunda fila por 2 y sumando esta en la tercera fila obtenemos la matriz

$$A_4 = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Finalmente llegamos a la matriz A_4 la cual es una matriz escalonada reducida por filas. Esta matriz A_4 es equivalente en este sentido a la matriz A .

2.2.2. Inversas de matrices cuadradas

En esta sección vamos a definir la inversa de una matriz cuadrada, y explicaremos un procedimiento para calcular dicha matriz. Finalmente vamos a utilizar la inversa de una matriz cuadrada para resolver un sistema lineal de forma $Ax = b$.

Definición 2.10. Una matriz A de orden $n \times n$ es invertible (no singular) si existe una matriz B de orden $n \times n$ tal que

$$BA = AB = I_n.$$

Donde I_n es la matriz identidad de orden $n \times n$. La matriz B es la inversa de A . Si no existe tal matriz B no es invertible (matriz singular). La inversa de la matriz A se denota por A^{-1} .

Ejemplo 2.10. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$.

Calculemos AB y BA :

Solución 2.10.

$$AB = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

$$BA = \begin{pmatrix} -1 & 3/2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = I_2.$$

Por lo tanto concluimos que B es la inversa de A o que A es la inversa de B .

Teorema 2.4. Si una matriz A de orden $n \times n$ tiene inversa, entonces la inversa es única.

Demostración 2.4.

La demostración se hará en la sección de ejercicios.

Ejemplo 2.11. Sea $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ una matriz 2×2 . Calculemos la inversa de A .

Solución 2.11.

Debemos de encontrar $A^{-1} = \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix}$ tal que

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$AA^{-1} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} w & x \\ y & z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} aw + by & ax + bz \\ cw + dy & cx + dz \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Al igualar las componentes de las matrices, obtenemos

$$\begin{aligned} aw + bx &= 1 \\ cw + dy &= 0 \\ ax + bz &= 0 \\ cx + dz &= 1. \end{aligned}$$

Tenemos dos sistemas de ecuaciones 2×2

$$1) \begin{cases} aw + by = 1 \\ cw + dy = 0 \end{cases} \quad 2) \begin{cases} ax + bz = 0 \\ cx + dz = 1. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema 1) obtenemos

$$w = \frac{d}{ad - bc} \quad y \quad y = \frac{-c}{ad - bc}.$$

Resolviendo el sistema 2) obtenemos

$$x = \frac{-b}{ad - cb} \quad y \quad z = \frac{a}{ad - cb}.$$

Por consiguiente

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{d}{ad-bc} & \frac{-b}{ad-bc} \\ \frac{-c}{ad-bc} & \frac{a}{ad-cb} \end{pmatrix} = \frac{1}{ad - bc} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Es claro que A^{-1} tiene sentido si $ad - bc \neq 0$. Este resultado nos dice que se puede caracterizar la inversa de una matriz 2×2 .

Teorema 2.5. Sean A y B matrices invertibles del mismo orden, entonces

1) A^{-1} es invertible y

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

2) AB es invertible y

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3) A^T es invertible y

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Demostración 2.5.

1) A^{-1} es invertible si podemos encontrar una matriz B tal que

$$A^{-1}B = BA^{-1} = I_n,$$

como $A^{-1}A = AA^{-1}$, entonces $B = A$ es una inversa de A^{-1} y como la inversa es única se concluye que $(A^{-1})^{-1} = A$.

2) Por definición de matriz invertible tenemos

$$(AB)(B^{-1}A^{-1}) = A(BB^{-1})A^{-1} = AI_nA^{-1} = AA^{-1} = I_n.$$

$$(B^{-1}A^{-1})(AB) = B^{-1}(A^{-1}AB) = B^{-1}I_nB = B^{-1}B = I_n.$$

Por lo tanto AB es invertible y como la inversa de una matriz es única, entonces

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

3) Por definición de matriz invertible de A , tenemos $AA^{-1} = I_n = A^{-1}A$.

Al calcular la matriz transpuesta se obtiene lo siguiente:

$$(AA^{-1})^T = I_n^T = I_n \quad \text{y} \quad (A^{-1}A)^T = I_n^T = I_n,$$

entonces,

$$(A^{-1})A^T = I_n \quad \text{y} \quad A^T(A^{-1})^T = I_n.$$

Por consiguiente

$$(A^T)^{-1} = (A^{-1})^T.$$

Queda como ejercicio demostrar que si A_1, A_2, \dots, A_n son matrices invertibles $n \times n$, entonces $A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_p$ es una matriz invertible y

$$(A_1 \cdot A_2 \cdot \dots \cdot A_p)^{-1} = A_p^{-1}A_{p-1}^{-1} \dots A_1^{-1}.$$

2.2.3. Método para determinar A^{-1}

Sean $A = (a_{ij})$ una matriz invertible y $A^{-1} = (b_{ij})$ su inversa. Los elementos de A y A^{-1} están ligados por las n^2 ecuaciones, de la forma

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}, \quad (2.1)$$

donde $\delta_{ij} = 1$ si $i = j$ y $\delta_{ij} = 0$ si $i \neq j$. Para cada a_{ik} fijo, consideramos el sistema no homogéneo

$$\sum_{k=1}^n a_{ik} b_{kj} = \delta_{ij}$$

de n ecuaciones lineales y con n incógnitas $b_{1j}, b_{2j}, \dots, b_{nj}$.

Ahora, dado que A es una matriz invertible, cada uno de estos sistemas lineales, tienen la misma matriz de coeficientes A y difieren sólo en sus segundos miembros. Por ejemplo, si A es una matriz 3×3 , existen 9 ecuaciones lineales en 2.1 que pueden representar como 3 sistemas lineales que tienen las siguientes matrices ampliadas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & 0 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & 1 \end{pmatrix}$$

Si llevamos las matrices ampliadas

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & b_{11} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b_{21} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b_{31} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & b_{12} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b_{22} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b_{32} \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & \vdots & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & \vdots & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & \vdots & b_{33} \end{pmatrix},$$

o la forma escalonada reducida por filas y usamos el hecho de que los tres sistemas tienen la misma matriz de coeficientes y resolvemos los tres sistemas al mismo tiempo, trabajando con la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \vdots & 1 & 0 & 1 \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \vdots & 0 & 0 & 1 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \vdots & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Este proceso nos conduce a

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ 0 & 1 & 0 & b_{21} & b_{22} & b_{23} \\ 0 & 0 & 1 & b_{31} & b_{32} & b_{33} \end{array} \right).$$

Finalmente obtenemos que la matriz de la parte derecha de la barra vertical es la matriz deseada y la matriz de la izquierda es la matriz identidad. Note que si A no es una matriz invertible podemos llevar esta matriz a la forma escalonada reducida por filas, pero en este proceso uno de los elementos de la diagonal se convierte en cero, por lo tanto no será posible convertir la matriz de A a la matriz identidad. Resumiendo, podemos decir que un procedimiento práctico para calcular la inversa de la matriz A es el siguiente:

- Paso 1: Forma la matriz $n \times 2n$ $[A:I_n]$ obtenido al juntar la matriz identidad de I_n con la matriz dada A .
- Paso 2: Transformar la matriz obtenida en el paso 1 a su forma escalonada reducida por filas, mediante operaciones elementales por filas. Todo lo que se le haga a una fila de la matriz A , también se le debe hacer a la fila correspondiente de I_n .
- Paso 3: Suponga que en el paso 2 se obtuvo la matriz $[C:D]$ en forma escalonada reducida por filas
 - a) Si $C = I_n$ entonces $D = A^{-1}$.
 - b) Si $C \neq I_n$, entonces C tiene una fila o columna llena de ceros y en este caso, A es no invertible, es decir, A^{-1} no existe.

Ejemplo 2.12. Determine la inversa de la matriz A , dada por

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 2 & -1 & 4 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Solución 2.12.

La fila dos se cambia por la suma de -2 veces la fila uno más la fila dos, y se coloca al frente de la fila dos la notación $-2F_2 + F_2$

$$\begin{aligned} & \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_2 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow[\begin{array}{c} F_3 \\ F_2 \end{array}]{F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & -3 & -2 & -2 & 1 & 0 \end{array} \right) \\ & \xrightarrow{3F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -5 & -2 & 1 & -3 \end{array} \right) \xrightarrow{-\frac{1}{3}F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right) \end{aligned}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} & -\frac{-9}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right) \xrightarrow{-F_2 + F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1 & 0 & -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{-7}{5} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right).$$

Por lo tanto la matriz inversa A^{-1} de A es

$$A^{-1} = \left(\begin{array}{ccc} -\frac{3}{5} & \frac{4}{5} & -\frac{-7}{5} \\ \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & -\frac{2}{5} \\ -\frac{2}{5} & -\frac{1}{5} & \frac{3}{5} \end{array} \right) = \frac{1}{5} \left(\begin{array}{ccc} -3 & 4 & -7 \\ 2 & -1 & -2 \\ 2 & -1 & 3 \end{array} \right).$$

2.2.4. Sistemas de ecuaciones lineales y matrices inversas

Si A es una matriz $n \times n$, entonces el sistema lineal $Ax = b$ es un sistema con n ecuaciones y n incógnitas. Supongamos que A es invertible, es decir A^{-1} existe, entonces al multiplicar la ecuación $Ax = b$ por A^{-1} , obtenemos

$$\begin{aligned} A^{-1}(Ax) &= A^{-1}b \\ (A^{-1}A)x &= A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b. \end{aligned}$$

Por consiguiente $x = A^{-1}b$ es solución del sistema lineal $Ax = b$, esta solución $x = A^{-1}b$ es única puesto que A es invertible.

Teorema 2.6. Si A es una matriz $n \times n$, entonces el sistema $Ax = 0$ tiene solución no trivial si y sólo si A es no invertible (una solución no trivial es una solución distinta de cero).

Demostración 2.6. (Demostración por contradicción) Supongamos que A es invertible, entonces A^{-1} existe y al multiplicar ambos lados de la ecuación $Ax = b$ por A^{-1} obtenemos:

$$\begin{aligned} A^{-1}(Ax) &= A^{-1}b \Rightarrow (A^{-1}A)x = 0 \\ I_n x &= 0 \Rightarrow x = 0, \end{aligned}$$

lo cual es una contradicción.

La proposición: si A es no invertible, entonces $Ax = b$ tiene solución no trivial, se propone como ejercicio.

Ejemplo 2.13. Consideramos el sistema

$$\begin{cases} x + 2y - 3z = 0 \\ x - 2y + z = 0 \\ 5x - 2y - 3z = 0. \end{cases}$$

Encuentre la o las soluciones del sistema homogéneo.

Solución 2.13.

La matriz ampliada de coeficientes del sistema está dada por

$$A = \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right),$$

llevemos la matriz A a la forma escalonada reducida por filas

$$\begin{aligned} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & -2 & 1 & 0 \\ 5 & -2 & -3 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow[-5F_1 + F_3]{-F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -4 & 4 & 0 \\ 0 & -12 & 12 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow[-\frac{1}{12}F_3]{-\frac{1}{4}F_2} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{-F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-3F_2 + F_1} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) &\xrightarrow{F_1 + F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right). \end{aligned}$$

Recuperamos el sistema

$$\begin{aligned} x - z &= 0 \\ y - z &= 0. \end{aligned}$$

Notemos que este sistema es equivalente al sistema inicial, es decir, tienen las mismas soluciones. En general si tenemos un sistema de la forma $Ax = b$ (donde b -puede ser cero), y llevamos la matriz aumentada $[A:b]$ a la forma escalonada reducida por filas a una matriz aumentada $[A':c]$, entonces el sistema $Bx = c$ tiene las mismas soluciones que el sistema $Ax = b$.

Solucionando nuestro sistema, obtenemos

$$\begin{aligned} x &= z \\ y &= z. \end{aligned}$$

Si hacemos $z = t$ donde $t \in \mathbb{R}$, entonces

$$x = t$$

$$y = t,$$

luego la solución es $(x, y, z) = (t, t, t) = t(1, 1, 1)$, $t \in \mathbb{R}$; esto significa que el sistema tiene infinitas soluciones.

Teorema 2.7. Si A es una matriz $n \times n$, entonces A es invertible si y sólo si el sistema lineal $Ax = b$ tiene una única solución para cada matriz b de $n \times 1$.

Demostración 2.7. Si A es invertible, podemos multiplicar la ecuación $Ax = b$ por A^{-1} , esto implica

$$\begin{aligned} A^{-1}(Ax) &= A^{-1}b \Rightarrow (A^{-1}A)x = A^{-1}b \\ I_n x &= A^{-1}b \Rightarrow x = A^{-1}b, \end{aligned}$$

es decir, $x = A^{-1}b$ es la única solución.

Supongamos que $Ax = b$ tiene solución única y demostremos que A es invertible. Argumentemos por contradicción, supongamos que x_1 y x_2 son dos soluciones distintas de $Ax = b$.

$$Ax_1 = b \quad \text{y} \quad Ax_2 = b$$

restando ambas ecuaciones

$$Ax_1 - Ax_2 = 0 \Rightarrow A(x_1 - x_2) = 0$$

como $x_1 - x_2 \neq 0$, entonces por el Teorema anterior, A no es invertible.

Podemos resumir los resultados que relacionan matrices con sistemas lineales $Ax = b$ y $Ax = 0$, mediante las siguientes afirmaciones equivalentes

- 1) A es invertible.
- 2) $Ax = b$ sólo tiene la solución trivial.
- 3) A es equivalente por filas a la matriz I_n .
- 4) El sistema lineal $Ax = b$ tiene solución única para cada matriz b $n \times 1$.

Estas cuatro afirmaciones equivalentes, significan que al resolver un problema que involucra matrices o sistemas de ecuaciones lineales, podemos utilizar cualquiera de las cuatro afirmaciones anteriores.

2.3. Ejercicios resueltos del capítulo 2

Ejercicio 2.1. ¿Cuáles de los siguientes sistemas lineales tienen una solución no trivial?

$$\begin{array}{ll} a) & x + y + 2z = 0 \\ & 2x + y + z = 0 \\ & 3x - y + z = 0 \end{array} \quad \begin{array}{l} b) \quad x - y + z = 0 \\ 2x + y = 0 \\ 2x - 2y + 2z = 0. \end{array}$$

Solución 2.1.

a) Formamos la matriz ampliada

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 1 & \vdots & 0 \\ 3 & -1 & -1 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2F_1 + F_2 \\ -3F_1 + F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & -4 & -5 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \\ \xrightarrow{-4F_2 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 2 & \vdots & 0 \\ 0 & -1 & -3 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 7 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Como A se puede llevar a la forma escalonada reducida por filas, entonces A es invertible, por lo tanto tiene solución trivial.

b)

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & -2 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Llevamos a la matriz A a la forma escalonada reducida por filas,

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \vdots & 0 \\ 2 & -2 & 2 & \vdots & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-2F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3}} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & \vdots & 0 \\ 0 & 3 & -2 & \vdots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{pmatrix},$$

al encontrarse una fila de cero en la matriz equivalente por filas a la matriz A , por consiguiente A no es invertible, por lo tanto tiene solución no trivial.

Ejercicio 2.2. Determine todos los valores de a para los cuales la inversa de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & a \end{pmatrix}$$

exista. ¿Cuánto vale A^{-1} ?

Solución 2.2.

Calculemos la inversa de A , usando el procedimiento visto en este capítulo

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & a & : & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1+F_3]{-F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & a & : & -1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_2+F_3} \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & : & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & : & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1+F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & : & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & a & : & -2 & 1 & 1 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow[-\frac{1}{a}F_3]{-F_2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & : & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & : & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & : & -\frac{2}{a} & \frac{1}{a} & \frac{1}{a} \end{pmatrix} \quad \text{donde } a \neq 0. \end{aligned}$$

Ejercicio 2.3. ¿Para qué valores de λ tiene solución no trivial?

$$\begin{aligned} (\lambda - 1)x + 2y &= 0 \\ 2x + (\lambda - 1)y &= 0. \end{aligned}$$

Solución 2.3.

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} \lambda - 1 & 2 & : & 0 \\ 2 & \lambda - 1 & : & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow[-F_1]{F_2} \begin{pmatrix} 2 & \lambda - 1 & : & 0 \\ \lambda - 1 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{\frac{1}{2}F_2} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda - 1}{2} & : & 0 \\ \lambda - 1 & 2 & : & 0 \end{pmatrix} \\ &\xrightarrow{F_2 - (\lambda - 1)F_1} \begin{pmatrix} 1 & \frac{\lambda - 1}{2} & : & 0 \\ 0 & -\frac{(\lambda - 1)(\lambda - 1)}{2} + 2 & : & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Si $-\frac{(\lambda - 1)^2}{2} + 2 \neq 0$, entonces A tiene solución no trivial

$$\begin{aligned} -\frac{(\lambda^2 - 2\lambda + 1)}{2} \neq -2 &\Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda + 1 \neq 4 \Rightarrow \lambda^2 - 2\lambda - 3 \neq 0 \\ (\lambda - 3)(\lambda + 1) \neq 0 &\Rightarrow \lambda \neq 3 \quad \text{y} \quad \lambda \neq -1, \end{aligned}$$

es decir, el sistema tiene solución única si $\lambda \neq -1$ y $\lambda \neq 3$.

Ejercicio 2.4. Sean A , B y C matrices $n \times n$

- a) ¿Cuándo ocurre que $(A + B)(A - B) = A^2 - B^2$?
- b) Si $AC = CA$ y $BC = CB$. Verifique que $(AB)C = C(AB)$.

Solución 2.4.

a)

$$\begin{aligned} (A + B)(B - A) &= AA + A(-B) + BA + B(-B) \\ &= A^2 - AB + BA - B^2, \end{aligned}$$

El producto entre matrices no siempre es conmutativo, pero si $AB = BA$ se tiene la igualdad

$$(A + B)(A - B) = A^2 - B^2.$$

b) Verifiquemos que $(AB)C = C(AB)$

$$\begin{aligned} (AB)C = A(BC) &= A(CB) \quad \text{por ser } BC = CB \\ &= (AC)B \quad \text{por ser } AC = CA \\ &= CAB \\ &= C(AB). \end{aligned}$$

Ejercicio 2.5. Dé condiciones sobre a , tales que el sistema de ecuaciones lineales

$$\begin{cases} x + 2y - z = 1 \\ 2x + 5y - z = 3 \\ x + (a + 2)y + (a^2 - 1)z = 20. \end{cases}$$

- a) No tenga solución.
- b) Tenga infinitas soluciones (dar solución general).
- c) Tenga solución única (dar la solución).

Solución 2.5.

Llevamos la matriz de coeficientes ampliada a la forma escalonada reducida

$$A = \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 2 & 5 & -1 & \vdots & 3 \\ 1 & a+2 & a^2-1 & \vdots & 2a \end{array} \right) \xrightarrow[\begin{array}{c} -2F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3 \end{array}]{\begin{array}{c} -2F_1 + F_2 \\ -F_1 + F_3 \end{array}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & a & a^2 & \vdots & 2a-1 \end{array} \right)$$

$$\xrightarrow{-aF_2 + F_3} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & a^2-a & \vdots & a-1 \end{array} \right).$$

Analizando la última fila de la última matriz

$$(a^2 - a)z = a - 1$$

tenemos que:

Si

$$a^2 - a = a(a - 1) = 0 \quad \text{y} \quad a - 1 \neq 0,$$

entonces el sistema no tendrá solución, ya que

$$0 \cdot z = 0 = a - 1 \neq 0$$

lo cual es una contradicción. Ahora como

$$a(a - 1) = 0 \quad \text{y} \quad a - 1 \neq 0,$$

esto implica que $a = 0$, luego el sistema no tiene solución si $a = 0$. Si

$$a(a - 1) = 0 \quad \text{y} \quad a - 1 = 0$$

el sistema tendrá infinitas soluciones, puesto que al llevar la matriz A a la forma escalonada reducida por filas, obtenemos una matriz con una fila llena de ceros.

$$a(a - 1) = 0 \quad \text{y} \quad a - 1 = 0 \Rightarrow a = 1,$$

es decir, para que el sistema tenga infinitas soluciones $a = 1$

$$\left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & -1 & \vdots & 1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array} \right) \xrightarrow{-2F_2 + F_1} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -3 & \vdots & -1 \\ 0 & 1 & 1 & \vdots & 1 \\ 0 & 0 & 0 & \vdots & 0 \end{array} \right).$$

Nuestro sistema de ecuaciones lineales es equivalente al sistema

$$\begin{aligned}x - 3z &= -1 &\Rightarrow x &= -1 + 3z \\y + z &= 1 &\Rightarrow y &= 1 - z.\end{aligned}$$

Si $z = t$ donde $t \in \mathbb{R}$, entonces la solución es

$$(x, y, z) = (-1 + 3t, 1 - t, t) = (-1, 1, 0) + t(3, -1, 1) \quad t \in \mathbb{R}.$$

Si $a(a - 1) \neq 0$, es decir, si $a \neq 0$ y $a \neq -1$, entonces el sistema tiene solución única y la solución es

$$\begin{aligned}x + 2y - z &= 1 \\y + z &= 1 \\a^2 - az &= a - 1\end{aligned}$$

de la última ecuación tenemos $z = \frac{a-1}{a^2-a} = \frac{a-1}{a(a-1)} = \frac{1}{a}$.

$$\begin{aligned}z &= \frac{1}{a}, & y + z &= 1 &\Rightarrow y &= 1 - z, & y &= 1 - \frac{1}{a} \\x + 2y - z &= 1 &\Rightarrow x &= 1 + z - 2y &\Rightarrow x &= 1 + \frac{1}{a} - 2\left(1 - \frac{1}{a}\right) \\x &= -1 + \frac{3}{a}.\end{aligned}$$

Ejercicio 2.6. Dado el sistema

$$\begin{cases}x + 2y - 3z - 4w = 6 \\x + 3y - z - 2w = 4 \\2x + 5y - 2z - 5w = 10.\end{cases}$$

- Halle la solución del sistema no homogéneo y dé dos soluciones particulares de éste.
- Dé la solución general del sistema homogéneo asociado y dos soluciones particulares del sistema homogéneo.

Solución 2.6.

- Hallamos la solución general del sistema no homogéneo, formando la matriz ampliada de coeficientes

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & \vdots & 6 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & \vdots & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & \vdots & 10 \end{pmatrix}$$

llevamos esta matriz a una matriz escalonada reducida por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & \vdots & 6 \\ 1 & 3 & -1 & -1 & \vdots & 4 \\ 2 & 5 & -2 & -5 & \vdots & 10 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{-F_1 + F_2 \\ -2F_1 + F_3}} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 1 & 4 & 3 & \vdots & -2 \end{pmatrix}$$

$$\xrightarrow{-F_1 + F_3} \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 & -4 & \vdots & 6 \\ 0 & 1 & 2 & 2 & \vdots & -2 \\ 0 & 0 & 2 & 1 & \vdots & 0 \end{pmatrix}$$

recuperando el sistema inicial obtenemos

$$\begin{cases} x + 2y - 3z - 4w = 6 \\ y + 2z + 2w = -2 \\ 2z + w = 0. \end{cases}$$

De la última ecuación se tiene que $z = -\frac{1}{2}w$, y de la segunda ecuación tenemos

$$y + 2z + 2w = -2.$$

Por consiguiente

$$y + 2(-\frac{1}{2}w) + 2w = -2, \quad y - w + 2w = -2$$

$$y + w = -2, \quad \Rightarrow \quad y = -2 - w.$$

De la primera ecuación se tiene que

$$x + 2y - 3z - 4w = 6$$

$$x = 6 - 2y + 3z + 4w \Rightarrow x = 6 - 2(-2 - w) + 3(-\frac{1}{2}w) + 4w$$

$$x = 6 + 4 + 2w - \frac{3}{2}w + 4w \Rightarrow x = 10 + \frac{9}{2}w.$$

Así que la solución general del sistema es

$$\begin{cases} x = 10 + \frac{9}{2}w \\ y = -2 - w \\ z = -\frac{1}{2}w \\ w = w. \end{cases}$$

Esta solución se puede representar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned}(x, y, z, w) &= \left(10 + \frac{9}{2}w, -2 - w, -\frac{1}{2}w, w\right) \\ &= \left(10, -2, -\frac{1}{2}, 0\right) + w\left(\frac{9}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 1\right) \quad w \in \mathbb{R}.\end{aligned}$$

El sistema tiene infinitas soluciones puesto que para un cualquier valor de w tenemos una solución. Por ejemplo, si $w = 0$ entonces la solución es

$$(x, y, z, w) = (10, -2, 0, 0).$$

Si $w = 4$ la solución es $(x, y, z, w) = (28, -6, -2, 4)$.

- b) En general tenemos que si un sistema de ecuaciones lineales tiene infinitas soluciones, la solución general se puede expresar como la suma de la solución del sistema homogéneo asociado al sistema, más una solución particular (formada por los coeficientes independientes, estos es, los coeficientes que no dependen del parámetro) del sistema no homogéneo.

$$(x, y, z, w) = \underbrace{(10, -2, 0, 0)}_1 + w \underbrace{\left(\frac{9}{2}, -1, -\frac{1}{2}, 1\right)}_2.$$

1: Solución particular del sistema no homogéneo.

2: Solución del sistema homogéneo.

Ejercicio 2.7. Sean

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & 3 \end{pmatrix}, B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \quad y \quad C = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Simplifique y calcule $X = 4A^{-1}(AB^{-1}C + AC)(2B^{-1}C^{-1})^{-1}$.

Solución 2.7.

Para simplificar nuestra expresión, factorizamos A a la izquierda y C a la derecha del segundo factor, aplicamos las propiedades de la inversa y del producto de matrices.

$$\begin{aligned}
 X &= 4A^{-1}(AB^{-1}C + AC)(2B^{-1}C)^{-1} \\
 &= 4^{-1}A(B^{-1} + I)C\left(\frac{1}{2}C^{-1}(B^{-1})^{-1}\right) \\
 &= 4I(B^{-1} + I)\frac{1}{2}CC^{-1}B \\
 &= 4I(B^{-1} + I)\frac{1}{2}B = 2(B^{-1}B + B) \\
 &= 2(I + B) = 2I + 2B.
 \end{aligned}$$

Por lo tanto

$$X = 2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} + 2 \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 2 \\ 2 & 6 & 4 \\ 2 & 4 & 4 \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 2.8. Muestre que si A es una matriz simétrica e invertible, entonces A^{-1} es simétrica.

Solución 2.8.

Como A es simétrica, entonces $A^t = A$ (definición de la matriz simétrica) y como A es invertible, entonces A^{-1} existe. Debemos demostrar que A^{-1} es simétrica, es decir, $(A^{-1})^t = A^{-1}$.

Tomando la inversa en $A = A^t$ se tiene

$$A^{-1} = (A^t)^{-1} = (A^{-1})^t \quad \text{luego } A^{-1} \text{ es simétrica.}$$

Ejercicio 2.9. Sea A una matriz $n \times n$ tal que $A^4 = 0$. Verifique que

$$(I - A)^{-1} = I + A + A^2 + A^3.$$

Solución 2.9.

Debemos demostrar que la inversa de $I + A + A^2 + A^3$ es $I - A$

$$\begin{aligned}
 (I - A)(I + A + A^2 + A^3) &= I + A + \cancel{A^2} + \cancel{A^3} - A - \cancel{A^2} - \cancel{A^3} - A^4 \\
 &= I - A^4 = I.
 \end{aligned}$$

Ejercicio 2.10. Pruebe que si $A^k = 0$ para $k \in \mathbb{Z}^+$ y $AB = B$, entonces $B = 0$.

Solución 2.10.

Como $AB = B$ entonces $A(AB) = AB = B$ luego $A^2B = B$. Multiplicando de nuevo por A en ambos lados, $A(A^2B) = AB$, esto implica que $A^3B = B$, siguiendo el mismo proceso, se obtiene que

$$A^{k-1}B = B$$

y multiplicando por A a ambos lados, obtenemos

$$A(A^{k-1}B) = AB \quad \Rightarrow \quad A^k B = B$$

y como $A^k = 0$ se concluye que $0B = 0 = B$.

2.4. Ejercicios del capítulo 2

1)

a) Determine la matriz 2×2 , $A = [a_{ij}]$ para la cual $a_{ij} = i + j - 2$.

b) Determine la matriz 3×4 , $A = [a_{ij}]$ para la cual:

$$a_{ij} = \begin{cases} i + j & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

c) Considere la gráfica que une los 4 puntos de la Figura 19. Construya una matriz de 4×4 que tenga la propiedad de que $a_{ij} = 0$ si el punto i no está conectado (unido por línea) con el punto j y $a_{ij} = 1$ si el punto i está conectado con el punto j .

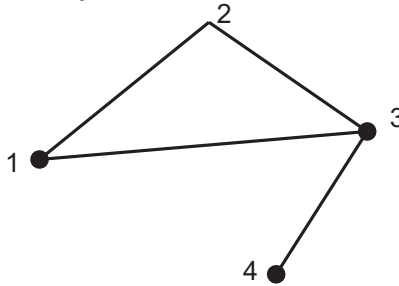


Figura 19

2) Considere las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} \quad B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & 1 \\ -1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \quad C = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 9 & 8 & 7 \end{pmatrix}$$

$$E = \begin{pmatrix} 3 & 4 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \quad F = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \quad G = \begin{pmatrix} 4 & 1 & 3 \end{pmatrix}.$$

Calcule cuando sea posible las siguientes operaciones entre matrices y escalares. Cuando no sea posible realizar la operación explique por qué. $A + F$, $A + B$, $3B$, $3B - 2E$, $B + O$ donde $O = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A + O$, BD , BC , $2BE$, $5GC$, CG , ED .

3) Sea A una matriz cuadrada. Entonces A^2 se define simplemente como AA . Calcule A^2 sí:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 4 \\ 2 & 0 & 3 \\ 1 & 1 & 5 \end{pmatrix}.$$

Así mismo calcule A^3 .

4) Sean $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & 0 \\ 0 & d_2 & 0 \\ 0 & 0 & d_3 \end{pmatrix}$ una matriz diagonal.

Calcule AD , DA y D^4 . ¿Qué puede concluir? ¿Puede generalizar el resultado?.

5) ¿Es siempre cierto que $(A - B)(A + B) = A^2 - B^2$?

6) Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ -1 & 1 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$ y $D = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ 1 & 2 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$.

Calcule AB , AD , $B + D$ y compare $A(B + D)$ con $AB + AD$.

7) Un torneo de tenis se puede organizar de la siguiente manera. Cada uno de los n tenistas juega contra todos los demás y se registran los resultados en una matriz $R_{n \times n}$ de la siguiente manera:

$$R_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si el tenista } i \text{ le gana al tenista } j \\ 0 & \text{si el tenista } i \text{ pierde con el tenista } j. \end{cases}$$

Después se asigna al tenista i la calificación

$$S_i = \sum_{j=1}^n R_{ij} + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^n (R^2)_{ij},$$

R^2_{ij} es la componente ij de la matriz R^2 .

Para un torneo entre 4 tenistas $R = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Clasifique los tenistas según sus calificaciones.

8) La Figura 20 representa la conexión de líneas telefónicas entre 4 pueblos. Si a_{ij} la línea telefónica que conecta el pueblo i con el pueblo j . Construya la matriz $A = (a_{ij})$. Evalúe A^2 y pruebe que el elemento ij de esa matriz representa el número de líneas telefónicas entre el pueblo i y el pueblo j que pasa exactamente a través de el pueblo intermedio. ¿Qué representan los elementos de $A + A^2$?

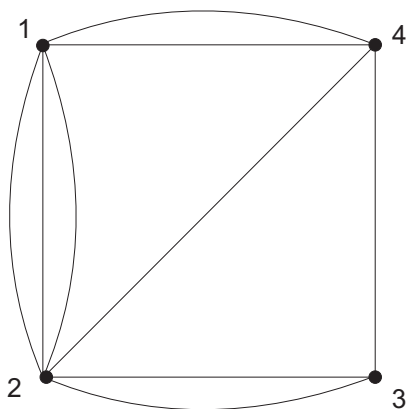


Figura 20

- 9) La matriz $A_{n \times n}$ se llama nilpotente si $A^k = 0$, la matriz cero, para algún $k \geq 1$. Demuestre que las siguientes matrices son nilpotentes y encuentre el k más pequeño tal que $A^k = 0$.

$$a) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \quad b) \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 4 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

- 10) La matriz A se llama idempotente si $A^2 = A$, de ejemplos de matrices idempotentes.
- 11) Escriba un sistema de ecuaciones adecuado para cada situación. No resuelva el problema.
- Una tienda de helados vende sólo helados con soda y malteadas. Se pone 1 onza de jarabe y 3 onzas de helado con malteada. Si la tienda usa 4 galones de helado y 5 cuartos de jarabe en un día, ¿Cuántos helados con soda y cuántas malteadas verde? (Sugerencia: 1 cuarto=32 onzas; 1 galón=128 onzas).
 - Una compañía trata de adquirir y almacenar dos tipos de artículos x y y . Cada artículo x cuesta \$3 y cada artículo y cuesta \$2.50. Cada artículo x ocupa 2 pies cuadrados del espacio del piso y cada artículo y ocupa un espacio de 1 pie cuadrado del piso. ¿Cuántas unidades de cada tipo pueden adquirirse y almacenarse si se dispone de \$400 para adquisición y 240 pies cuadrados de espacio para almacenar estos artículos?
 - Se desea obtener 200 litros de una solución de ácido nítrico al 34%. Si tiene soluciones al 28%, 40% y 45%, y se requiere que la cantidad a utilizar de la solución que está al 28% sea dos veces la cantidad de la solución al 40%. ¿Qué cantidad de cada solución se debe usar?

- d) Para terminar su grado de magister una persona completó 20 cursos en los cuales recibió calificaciones de A , B y C . Su promedio final fue de 3.5. Si la cantidad de calificaciones de A que recibió fue el doble que las de B y las de B fueron el triple de las de C , ¿Cuántas calificaciones de A , B y C respectivamente recibió, si por cada A recibe 4 puntos, por cada B recibe 3 puntos y por cada C recibe 2?
- e) Una firma de transporte posee tres tipos distintos de camiones A , B y C . Los camiones están equipados para el transporte de 2 clases de maquinaria pesada. El número de máquinas de cada clase que puede transportar cada camión es:

		Camión		
		Tipo A	Tipo B	Tipo C
Máquina	Clase 1	2	1	1
	Clase 2	0	1	2

Figura 21

- La firma consigue una orden para 32 máquinas de la clase 1 y 10 máquinas de la clase 2. Encuentre el número de camiones de cada tipo que se requieren para cumplir la orden, asumiendo que, cada camión debe estar completamente cargado y el número exacto de máquinas pedidas es el que se debe despachar. Si la operación de cada tipo de camión tiene el mismo costo para la firma, ¿Cuál es la solución más económica?.
- f) Un problema de administración de recursos. Un departamento de pesca y caza del Estado proporciona tres tipos de comida a un lago que alberga tres tipos de peces. Cada pez de la especie uno consume cada semana un promedio de 1 unidad del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 2 unidades del alimento 3. Cada pez de la especie 2 consume cada semana un promedio de 3 unidades de alimento 1, 4 del 2 y 5 del 3. Para un pez de la especie 3, el promedio semanal de consumo es de 2 unidades del alimento 1, 1 unidad del alimento 2 y 5 unidades del 3. Cada semana se proporcionan al lago 25.000 unidades del alimento 1, 20.000 unidades del alimento 2 y 55.000 del 3. Si se supone que los peces se comen todo el alimento, ¿Cuánto peces de cada especie pueden coexistir en el lago?
- g) Análisis de flujo de tráfico. Sea una red de calles de un solo sentido en una ciudad grande. Se quiere analizar el flujo de tráfico y la dirección del tráfico de cada una de las calles, está dada en la siguiente figura

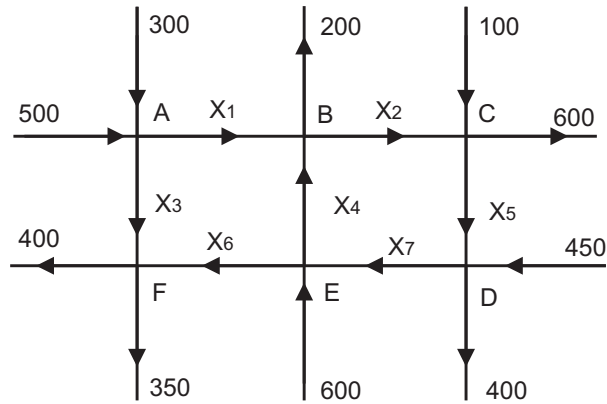


Figura 22

En varios sitios se han colocado contadores, y el número de carros que pasan por cada uno de ellos en el periodo de 1 hora, aparece también en la Figura 22. Las variables x_1, x_2, \dots, x_6 y x_7 representan el número de carros por hora que pasan de la intersección A a la intersección B , de la intersección B a la intersección C , etc.

Primero se determinan los valores de cada x_i , asumiendo que no hay parada en el tráfico, el número de carros que llega a una intersección debe ser igual al número de carros que sale de la intersección. Con base en este supuesto que tiene el siguiente sistema:

$$x_1 + x_3 = 800 \quad \text{Flujo de tráfico en la intersección } A$$

$$x_1 - x_2 + x_4 = 200 \quad \text{Flujo de tráfico en la intersección } B$$

$$x_2 - x_5 = 500 \quad \text{Flujo de tráfico en la intersección } C$$

$$x_3 + x_6 = 750 \quad \text{Flujo de tráfico en la intersección } F$$

$$x_4 + x_6 - x_7 = 600 \quad \text{Flujo de tráfico en la intersección } E$$

$$-x_5 + x_7 = 50 \quad \text{Flujo de tráfico en la intersección } D.$$

En el diagrama de la figura anterior, se reproduce una red de calles de una sola vía con el flujo de tráfico en las direcciones indicadas. El número de carros está dado como promedio de carros por hora.

Asumiendo que el flujo que llega a una intersección es igual al flujo que sale de ella, construya un modelo matemático del flujo de tráfico. Si la calle que va de C a A estuviera en reparación, ¿Cuál sería el mínimo tráfico que se podría permitir? ¿Cómo podría obtenerse este mínimo?.

- 12) Escriba los siguientes sistemas en forma matricial ($Ax = b$).

$$\text{a) } \begin{cases} 2x + 3y + 4z = 1 \\ x - 3z = 4 \\ 4x + y - z = 6. \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} (2 + i)x_1 - 5x_2 = 0 \\ x_1 + (-2 + i)x_2 = 0. \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 4 \\ 3x_1 + 4x_2 - 2x_3 = 7. \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} (\sin \theta)x_1 + (\cos \theta)x_2 = a \\ (\cos \theta)x_1 - (\sin \theta)x_2 = b \\ x_3 = c. \end{cases}$$

- 13) En las matrices A , B y C efectúe las siguientes operaciones elementales en el orden indicado, sobre la matriz que se vaya obteniendo.

$$f_1 \leftrightarrow f_2, \quad 3f_2, \quad f_3 - 2f_1, \quad f_1 + f_2, \quad f_2 + af_1$$

$$A = \begin{pmatrix} 4 & 1 & -1 \\ 1 & -2 & 3 \\ 2 & -1 & 3 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -a \\ b & -1 & 3 \\ 2 & -5 & 21 \end{pmatrix}$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & i & 0 \\ -i & 0 & 1 \\ 1 + i & 0 & 1 - i \end{pmatrix}.$$

- 14) Utilice el método de eliminación gaussiana para encontrar todas las soluciones, si existen, para los sistemas dados. (Si un sistema tiene infinitas soluciones, escriba 3 de ellas).

$$\text{a) } \begin{cases} x_1 - 2x_2 + 3x_3 = 11 \\ 4x_1 + x_2 - x_3 = 4 \\ 2x_1 - x_2 + 3x_3 = 10 \end{cases}$$

$$\text{b) } \begin{cases} 3x_1 + 6x_2 - 6x_3 = 9 \\ 2x_1 - 5x_2 + 4x_3 = 6 \\ -x_1 + 16x_2 - 14x_3 = -3 \end{cases}$$

$$\text{c) } \begin{cases} 6x_1 + x_2 + 3x_3 = 20 \\ 4x_1 - x_2 + 5x_3 = 4 \\ 2x_1 + x_2 - x_3 = 7 \end{cases}$$

$$\text{d) } \begin{cases} x_1 + 2x_2 - 4x_3 = 4 \\ -2x_1 - 4x_2 + 8x_3 = -9 \end{cases}$$

$$\text{e) } \begin{cases} x_1 + x_2 = 4 \\ 2x_1 - 3x_2 = 7 \\ 3x_1 + 2x_2 = 8 \end{cases}$$

- 15) a) Resuelva el numeral e), del punto 11 e interprete la respuesta en términos del número de camiones.
b) Resuelva el numeral f) del punto 11.
c) Resuelva el numeral g) del punto 11.

- 16) Determine cuáles de las siguientes matrices están en la forma escalonada reducida por filas, cuáles en la forma escalonada y en cuáles ninguna de las dos.

$$\begin{array}{lll} \text{a)} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \end{pmatrix} & \text{b)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{c)} \begin{pmatrix} 1 & 1/2 & 1/4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \\ \text{d)} \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix} & \text{e)} \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} & \text{f)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \end{array}$$

- 17) Asuma que la matriz dada, es la matriz aumentada de un sistema reducido de ecuaciones lineales.

$$\begin{array}{ll} \text{(a)} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & : & 4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & : & 2 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & : & 0 \end{pmatrix} & \text{(b)} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 & -2 & 0 & : & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -4 & -1 & : & 4 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & : & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & : & 0 \end{pmatrix}. \end{array}$$

- a) Escriba el sistema reducido de ecuaciones correspondiente a la matriz dada.
- b) Encuentre, si existen, las soluciones al sistema.
- 18) Determine el valor de las constantes que aparecen en cada sistema (si existen) de modo que este:
- a) Tenga solución única (hállela).
- b) Sea inconsistente.
- c) Tenga infinitas soluciones (Dar la solución general).

$$\begin{array}{ll} \text{a)} \begin{cases} 2x - y + 3z = 1 \\ 3x + 2y - z = -b \\ x + ay - 6z = -10 \end{cases} & \text{b)} \begin{cases} 5x - y + z = 8 \\ (5 + k)y + (5 + k)z = 7 \\ (k - 5)z = (k - 5) \end{cases} \\ \text{c)} \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (a^2 - 14)z = a + 2 \end{cases} & \text{d)} \begin{cases} 8x + 4y = 1 \\ kx + 3y = 1 \\ 3x + ky = 3. \end{cases} \end{array}$$

- 19) Considere el siguiente sistema: $\begin{cases} 2x + y - 4z = 0 \\ -2x + y + z = 0 \end{cases}$

- a) Encuentre una solución no trivial del sistema.
- b) ¿Cuál es el significado geométrico de esta solución?
- c) Pertenece el punto $(1,2,1)$ al conjunto solución.
- 20) Determine si la matriz dada es invertible, si lo es calcule la inversa.
- a) $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$
- b) $\begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}$
- c) $\begin{pmatrix} i & 2 \\ 1 & -i \end{pmatrix}$
- d) $\begin{pmatrix} \sin \theta & \cos \theta & 0 \\ \cos \theta & -\sin \theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \theta \in \mathbb{R}.$
- 21) Muestre que si A, B, C son matrices invertibles, entonces ABC es invertible y $(ABC)^{-1} = C^{-1}B^{-1}A^{-1}$.
- 22) Muestre que si una matriz cuadrada de A satisface $A^2 - 3A + I = O$, entonces $A^{-1} = 3I - A$, (I es la matriz identidad).
- 23) Responda verdadero o falso, justificando su respuesta.
- a) Si A es una matriz $n \times n$ invertible, entonces $(\alpha A)^{-1} = \frac{1}{\alpha}A^{-1}$, donde α escalar distinto de cero.
- b) Si la matriz A es de tamaño $n \times n$ y satisface $A^2 - 2A + I = O$, entonces A^{-1} existe y es igual a $A - I$. (I : matriz identidad).
- c) Sean A, B y C matrices $n \times n$. Si $AB = AC$, entonces $B = C$.
- d) Si $A^2 = A$, entonces $(AB - ABA)^2 = O$ para toda matriz B .
- e) Si A, B y C son matrices invertibles, entonces $A^{-1}(A + B)B^{-1} = A^{-1} + B^{-1}$.
- f) Si $A = \begin{pmatrix} d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & d_n \end{pmatrix}$, entonces $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/d_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1/d_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1/d_n \end{pmatrix}$.
- g) Si A y B son matrices invertibles $n \times n$, entonces $A + B$ es invertible.

Capítulo 3

Determinantes

El determinante de una matriz cuadrada $A_{n \times n}$ es un número real asignado a ella. El determinante se suele denotar por: $\det(A)$ o también por $|A|$.

$$\det : M_{n \times n} \longrightarrow \mathbb{R} \quad , \quad \det(A) = |A|$$

donde $M_{n \times n}$ es el conjunto de matrices cuadradas $n \times n$.

El determinante de una matriz es un número que mide, entre otras cosas, si una matriz es invertible. En este capítulo veremos como se calcula el determinante de matrices 2×2 , 3×3 , y después pasaremos al caso general de matrices $n \times n$.

Definición 3.1. Definimos el determinante de una matriz $n \times n$ en los siguientes casos:

- Para $n = 1$ y $A = (a)$: $\det(A) = a$.
- Para $n = 2$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$: $\det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$.
- Para $n = 3$ y $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$:

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{31}a_{13} + a_{31}a_{23}a_{12} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{23}a_{33}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}.$$

Ejemplo 3.1. Calcule el determinante de

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 5 \end{pmatrix} \quad , \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ -5 & 10 \end{pmatrix}.$$

Solución 3.1.

$$\det(A) = (1)(5) - (4)(3) = 5 - 12 = -7,$$

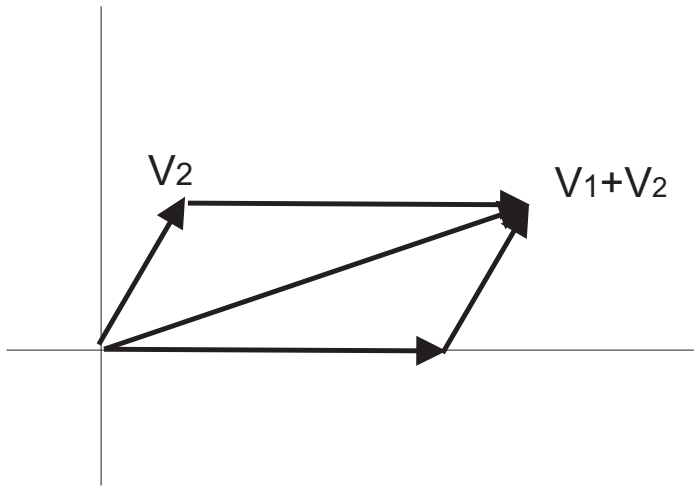
$$\det(B) = (-1)(10) - (2)(-5) = -10 + 10 = 0.$$

3.1. Geometría del determinante 2×2

Sea $A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ el área del paralelogramo con vértices $P(0, 0)$, $Q(a_{11}, a_{21})$, $R(a_{12}, a_{22})$ y $S(a_{11} + a_{12}, a_{21} + a_{22})$ es el valor absoluto de $\det(A)$.

Veamos un par de ejemplos donde se utiliza esto.

Ejemplo: Calcule el área del paralelogramo con lados $V_1 = (3, 0)$ y $V_2 = (1, 2)$



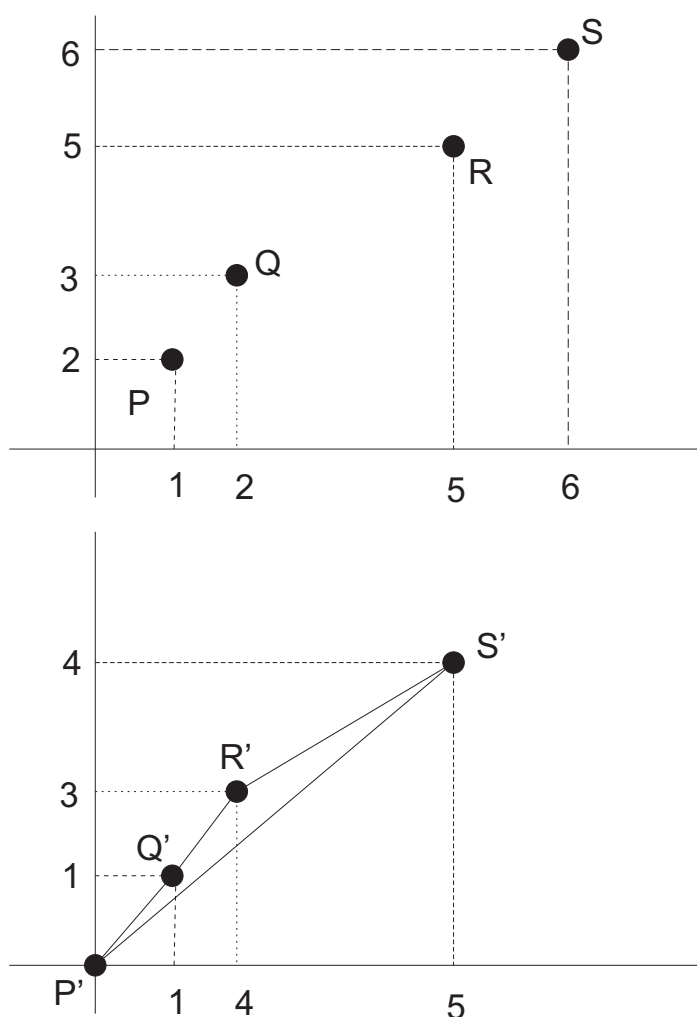
Ejemplo 3.2. Determine el área del paralelogramo formado por los puntos $P(1, 2)$, $Q(2, 3)$, $R(5, 5)$ y $S(6, 6)$.

Solución 3.2.

Traslademos el paralelogramo de manera que uno de sus vértices sea $O(0, 0)$. Para ello elegimos cualquiera de sus vértices y se lo restamos a sus cuatro esquinas. Digamos que se elije $P(1, 2)$. Así el paralelogramo trasladado tendrá como esquinas a:
Observemos, si efectivamente es un paralelogramo al cumplirse que

$$S'(5, 4) = Q'(1, 1) + R'(4, 3)$$

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} = |3 - 4| = |-1| = 1$$



3.2. Regla de Sarros para un determinante 3×3

La regla de Sarros nos permite calcular el determinante de una matriz 3×3 , esta regla consiste en copiar la primera y la segunda columna de la matriz y colocarla inmediatamente a la derecha de la matriz. Posteriormente calcular los productos en diagonal de tres elementos como se indica en la figura.

Los productos de izquierda-arriba con los elementos derecha abajo (flecha negra) se multiplican por +1, mientras que los de izquierda abajo con los elementos derecha arriba (flecha azul) se multiplican por -1; todos los resultados se suman.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

Ejemplo 3.3. Calcule el determinante de $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{pmatrix}$.

Solución 3.3. Usando la regla de Sarros

$$\begin{aligned} |A| &= \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 0 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (1)(0)(4) + (2)(1)(-1) + (1)(3)(2) - (-1)(0)(1) - (2)(1)(1) - (4)(3)(2) \\ &= 0 - 2 + 6 - 2 - 24 = -22. \end{aligned}$$

3.3. El menor (i, j) de una matriz

Suponga que A es una matriz $n \times n$, el menor (i, j) de la matriz A , representado por A_{ij} es el determinante de la matriz que se obtiene de A eliminando la fila i y la fila j .

Ejemplo 3.4. Calcule los determinantes A_{32} y A_{13} de la matriz

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{vmatrix}.$$

Solución 3.4. Para calcular A_{32} , de A no consideramos ni la fila 3 ni la columna 2, y calculamos el determinante de la matriz resultante

$$A = \left[\begin{array}{c|c|c} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{array} \right], \quad A_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 2 - 12 = -10.$$

Para calcular A_{13} , de A no consideramos ni la fila de 1, ni la columna de 3 y calculamos el determinante de la matriz resultante:

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 \\ 5 & 6 & 3 \end{array} \right] , \quad A_{32} = \left[\begin{array}{cc} 4 & 1 \\ 5 & 6 \end{array} \right] = 54 - 5 = 21.$$

3.4. El cofactor de (i, j) de una matriz

Definición 3.2. Suponga que tenemos una matriz A $n \times n$, el cofactor (i, j) de la matriz A se define como:

$$C_{ij} = (-1)^{i+j} A_{ij}.$$

Ejemplo 3.5. Determine C_{32} de la matriz A :

$$A = \left[\begin{array}{ccc} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right].$$

Solución 3.5.

Calculemos primero A_{32} :

$$A = \left[\begin{array}{cc|c} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{array} \right] , \quad A_{32} = \left[\begin{array}{cc} 1 & -1 \\ 3 & 0 \end{array} \right] = (1)(0) - (3)(-1) = 0 + 3 = 3.$$

Por lo tanto $C_{32} = (-1)^{3+2} A_{32} = (-1)^5 (3) = -3$.

3.5. Definición del determinante

La definición formal del determinante de una matriz es la siguiente:

Definición 3.3. Sea A una matriz cuadrada $n \times n$. El determinante de A , el cual se simboliza por $|A|$ o por $\det(A)$, se define como: la suma de los productos de los elementos de la primera fila de A , por sus cofactores correspondientes. Es decir:

$$|A| = \sum_{j=1}^n a_{1j} C_{1j}.$$

Observación A pesar de que la definición formal del determinante hace referencia a la fila uno, el resultado fundamental es que puede calcularse sobre cualquier fila o columna, es decir, si el desarrollo es sobre la fila i el determinante de una matriz A de orden $n \times n$ es:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix}.$$

$$|A| = a_{i1}C_{i2} + a_{i2}C_{i2} + \cdots + a_{in}C_{in} = \sum_{j=1}^n a_{ij}C_{ij}.$$

Desarrollo sobre la columna j

$$|A| = a_{1j}C_{1j} + a_{2j}C_{2j} + \cdots + a_{nj}C_{nj} = \sum_{i=1}^n a_{ij}C_{ij}.$$

Ejemplo 3.6. Determine mediante el desarrollo sobre la fila 2, $|A|$ para

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 3 & 4 & 0 \\ 0 & 1 & -4 \end{bmatrix}.$$

Solución 3.6. Calculemos los menores sobre la fila 2

$$A_{21} = \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1 & -4 \end{vmatrix} = 2(-4) - (-1)(1) = -8 + 1 = -7, \quad A_{22} = \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 0 & -4 \end{vmatrix} = 1(-4) - (-1)(0) = -4$$

$$A_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1(1) - 2(0) = 1,$$

por consiguiente

$$|A| = 3(-1)^{2+1}(-7) + 4(-1)^{2+2}(-4) + 0(-1)^{2+3}(-7) = 21 - 16 + 0 = 5.$$

Cuando se usa el método de cofactores para el cálculo de determinantes es importante escoger una fila o una columna con la mayor cantidad de ceros posibles. Esto se debe a que los cofactores correspondientes a los coeficientes que son ceros, no hace falta calcularlos.

Ejemplo 3.7. Determine el o los valores de λ que hacen cero el determinante de la matriz

$$A = \begin{bmatrix} 2 - \lambda & 0 & 0 \\ 1 & 3 - \lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1 - \lambda \end{bmatrix}.$$

Solución 3.7.

Calculemos el determinante de A . Como la última columna de A tiene muchos ceros, desarrollemos el determinante sobre ella.

$$\begin{aligned} |A| &= a_{13}C_{13} + a_{23}C_{23} + a_{33}C_{33} = a_{33}C_{33} \\ &= (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 1 & 3-\lambda \end{vmatrix} (1-\lambda) \\ &= (2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda). \end{aligned}$$

Por consiguiente, los únicos valores para λ que hace $|A| = 0$ son $\lambda_1 = 2$, $\lambda_2 = 3$ y $\lambda_3 = 1$.

Teorema 3.1 (Propiedades de los determinantes). Sean $A, B \in M_{n \times n}$

- 1) $\det(A) = \det(A^t)$ para toda matriz $A_{n \times n}$.
- 2) Si se intercambian entre sí dos filas o columnas, el determinante cambia de signo.
- 3) Si una matriz tiene dos filas (o columnas) iguales, su determinante es cero.
- 4) Si se multiplica una fila (o columna) de A por un escalar λ , el determinante de la matriz resultante es igual a λ por $\det(A)$.
- 5) Si $\lambda \in \mathbb{K}$ (donde \mathbb{K} es un campo), entonces

$$\det(\lambda A) = \lambda^n \det(A).$$

- 6) El determinante de una matriz no varía si a una fila (o columna) se le suma una combinación lineal de las resultantes.
- 7) Si una matriz tiene una fila (o columna) nula, su determinante es nulo.
- 8) $\det(AB) = \det(A) \cdot \det(B)$. Frecuentemente $\det(A+B) \neq \det(A) + \det(B)$.
- 9) A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
- 10) Si A es invertible, entonces $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}$.
- 11) Si A es una matriz triangular inferior o triangular superior, entonces $\det(A)$ es el producto de su diagonal principal.

Demostración 3.1.

La parte (1) se demuestra por inducción sobre n . Para $n = 1$ y $n = 2$ el resultado es inmediato. Supongamos que la propiedad es cierta para matrices de orden $n - 1$. Sean $A = (a_{ij})$ y $B = A^T = (b_{ij})$. Desarrollando $\det(A)$ por sus menores correspondientes a la primera columna y $\det(B)$ por sus menores relativos a la primera fila tenemos:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^m (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}| \quad , \quad \det(B) = \sum_{j=1}^n (-1)^{j+1} b_{1j} |B_{1j}|.$$

Pero por definición de transpuesta tenemos que $b_{1j} = a_{i1}$ y $B_{1j} = (A_{i1})^T$. Puesto que hemos supuesto que el teorema es cierto para matrices de orden $n - 1$, tenemos que $|B_{1j}| = |A_{i1}|$, luego las sumas anteriores coinciden término a término, es decir

$$\det(A) = \det(B).$$

La demostración de 2) se deja como ejercicio.

Supongamos que las filas r y s de A son iguales. Intercambiamos las filas r y s de A para obtener una matriz B . Entonces $\det(B) = -\det(A)$. Por otro lado $B = A$ de modo que $\det(B) = \det(A)$. Así que $\det(A) = -\det(A)$, luego $\det(A) = 0$. Las demostraciones de (4), (5), (6), (7), (8), (9), y (11) se proponen como ejercicios.

Demostremos (10). Como A es invertible, entonces $A \cdot A^{-1} = I_n$, aplicando determinante en ambos lados, obtenemos

$$\det(A \cdot A^{-1}) = \det(A)\det(A^{-1}) = \det(I_n) = 1.$$

Luego

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

Por 9) tenemos que $\det(A) \neq 0$, luego

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)}.$$

3.6. Cálculo de la inversa de una matriz usando determinantes

Una pregunta interesante es, ¿a que es igual?

$$a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \dots + a_{in}C_{kn} \text{ para } i \neq k.$$

Responder esta pregunta es equivalente a encontrar un método para determinar la inversa de una matriz invertible.

Teorema 3.2. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$, entonces

$$a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \dots + a_{in}C_{kn} = 0 \quad \text{para } i \neq k$$

$$a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + \dots + a_{nj}C_{nk} = 0 \quad \text{para } j \neq k.$$

Demostración 3.2.

Demostraremos la primera fórmula, la segunda es consecuencia de la primera.

Sea B la matriz obtenida de A al reemplazar la k -ésima fila de A por su i -ésima fila. Esto significa que B es una matriz que tiene dos filas idénticas la i -ésima y la k -ésima, por lo tanto $\det(B) = 0$. Los elementos de la k -ésima fila de B son $a_{i1}, a_{i2}, \dots, a_{in}$. Los cofactores de la k -ésima fila son $a_{k1}, a_{k2}, \dots, a_{kn}$ luego

$$0 = \det(B) = a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \dots + a_{in}C_{kn}$$

lo cual queríamos demostrar.

Este teorema nos dice que si sumamos los productos de los elementos de cualquier fila (o columna) por los cofactores correspondientes de cualquier otra fila (o columna), entonces el resultado es cero.

Ejemplo 3.8. Sea:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ -2 & 3 & 1 \\ 4 & 5 & -2 \end{pmatrix},$$

verifique que

$$a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \dots + a_{in}C_{kn} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

Solución 3.8.

Por definición tenemos

$$C_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 5 & -2 \end{vmatrix} = 19, \quad C_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -2 \end{vmatrix} = -14$$

$$C_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 3,$$

luego

$$\begin{aligned} a_{31}C_{21} + a_{32}C_{22} + a_{33}C_{23} &= 4(19) + 5(-14) + (-2)(3) = 0 \\ a_{11}C_{21} + a_{12}C_{22} + a_{13}C_{23} &= (1)(19) + 2(-14) + 3(3) = 0. \end{aligned}$$

De manera análoga llegamos a

$$a_{i1}C_{k1} + a_{i2}C_{k2} + \dots + a_{in}C_{kn} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k. \end{cases}$$

De igual forma se llega a

$$a_{1j}C_{1k} + a_{2j}C_{2k} + \dots + a_{nj}C_{nk} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } j = k \\ 0 & \text{si } j \neq k. \end{cases}$$

Definición 3.4. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz $n \times n$. La matriz adjunta de A de orden $n \times n$ $adj(A)$, es la matriz cuyas componentes i, j es el cofactor C_{ij} de a_{ij} , es decir

$$adj A = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 3.9. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}.$$

Calcular $adj(A)$

Solución 3.9.

Los cofactores de la matriz A son:

$$C_{11} = (-1)^{1+1}A_{11} = (-1)^{1+1} = \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -18 \quad ; \quad C_{12} = (-1)^{1+2}A_{12} = (-1)^3 = \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -17.$$

$$C_{13} = (-1)^{1+3}A_{13} = (-1)^4 = \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -6 \quad ; \quad C_{21} = (-1)^{2+1}A_{21} = (-1)^3 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} = -6.$$

$$C_{22} = (-1)^{2+2}A_{22} = (-1)^4 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} = -10 \quad ; \quad C_{23} = (-1)^{2+3}A_{23} = (-1)^5 = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} = -2.$$

$$C_{31} = (-1)^{3+1}A_{31} = (-1)^4 = \begin{vmatrix} -2 & 1 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} = -10 \quad ; \quad C_{32} = (-1)^{3+2}A_{32} = (-1)^5 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} = -1.$$

$$C_{33} = (-1)^{3+3}A_{33} = (-1)^{3+3} = \begin{vmatrix} 3 & -2 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} = 28. \text{ Por lo tanto}$$

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.3. Si $A = (a_{ij})$ es una matriz $n \times n$, entonces

$$(A)(adj(A)) = (adj(A))(A) = (det(A))I_n,$$

es decir, si $det(A) \neq 0$, entonces

$$A^{-1} = \frac{1}{det(A)}adj(A).$$

Demostración 3.3.

$$A(adj(A)) = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} C_{11} & C_{21} & \cdots & C_{j1} & \cdots & C_{n1} \\ C_{12} & C_{22} & \cdots & C_{j2} & \cdots & C_{n2} \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ C_{1n} & C_{2n} & \cdots & C_{jn} & \cdots & C_{nn} \end{pmatrix}.$$

Si multiplicamos la fila i -ésima de A con la columna j -ésima de $adj(A)$, esto es

$$a_{i1}C_{j1} + a_{i2}C_{j2} + \dots + a_{in}C_{jn} = \begin{cases} \det(A) & \text{si } i = j \\ 0 & \text{si } i \neq j. \end{cases}$$

Esto implica que

$$adj(A) = \begin{pmatrix} \det(A) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \det A & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \det(A) \end{pmatrix} = \det(A)I_n.$$

Análogamente si hacemos el producto $(adj(A))A$, llegamos a que

$$(adj(A))A = \det(A)I_n.$$

Si $\det(A) \neq 0$, entonces A es invertible, luego existe A^{-1} . Aplicando A^{-1} a la última ecuación, obtenemos

$$adj(A) = \det(A) A^{-1}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} adj(A).$$

Ejemplo 3.10. Calcular la inversa de la matriz $A = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 1 \\ 5 & 6 & 2 \\ 1 & 0 & -3 \end{pmatrix}$.

Solución 3.10. Por el ejemplo anterior

$$adj(A) = \begin{pmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{pmatrix}.$$

Ahora,

$$\begin{aligned} \det(A) &= (-1)^{1+1}3 \begin{vmatrix} 6 & 2 \\ 0 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2}(-2) \begin{vmatrix} 5 & 2 \\ 1 & -3 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3}(1) \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} \\ &= 3(6(-3) - 2(0)) + 2(5(-3) - 2(1)) + 5(0) - 6(1) \\ &= 3(-18) + 2(-17) - 6 = -54 - 34 - 6 = -94, \end{aligned}$$

por lo tanto

$$A^{-1} = \frac{1}{-94} \begin{pmatrix} -18 & -6 & -10 \\ 17 & -10 & -1 \\ -6 & -2 & 28 \end{pmatrix}.$$

Teorema 3.4. Una matriz A es invertible si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Demostración 3.4.

Si $\det(A) \neq 0$, entonces por el teorema anterior A^{-1} existe y

$$A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A).$$

Supongamos que A es invertible, entonces

$$AA^{-1} = I_n.$$

Aplicando determinante en ambos lados de la ecuación, obtenemos

$$\det(AA^{-1}) = \det(I),$$

luego $\det(A)\det(A^{-1}) = \det(I)$ lo cual implica que $\det(A) \neq 0$.

Podemos resumir nuestros resultados acerca de los determinantes, los sistemas homogéneos y las matrices invertibles en la siguiente lista de proposiciones equivalentes:

- 1) El sistema $Ax = 0$ sólo tiene solución trivial.
- 2) A es equivalente por fila a I_n .
- 3) El sistema lineal $Ax = b$ tiene una única solución para cada vector $b \in \mathbb{R}$.
- 4) $\det(A) \neq 0$.

3.7. Ejercicios resueltos del capítulo 3

Ejercicio 3.1. Calcule $\det(A)$ donde A es:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -5 & 8 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -4 \end{pmatrix}.$$

Solución 3.1.

Primero escogemos la fila o columna con mayor número de ceros. En este caso puede escogerse la columna 2 que tiene dos ceros o la fila 3 que también tiene dos ceros. El resultado es el mismo

$$\begin{aligned}
 \det(A) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -3 \\ -5 & 8 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 7 \\ 3 & 2 & -1 & -4 \end{vmatrix} = a_{12}C_{12} + a_{22}C_{22} + a_{32}C_{32} + a_{42}C_{42} \\
 &= (-1)^{1+2}(0) \begin{vmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(8) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} \\
 &\quad + (-1)^{3+2}(0) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{4+2}(2) \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} \\
 &= 8 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix}.
 \end{aligned}$$

Ahora calculemos los determinantes 3×3 .

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 1 & 0 & 7 \\ 3 & -1 & -4 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+2}(2) \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}(0) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2}(-1) \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} \\
 &= -2 \begin{vmatrix} 1 & 7 \\ 3 & -4 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -3 \\ 1 & 7 \end{vmatrix} = -2(-4 - 21) + (7 + 3) = 60,
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} &= (-1)^{1+3}(-3) \begin{vmatrix} -5 & -1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}(0) \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} + (-1)^{3+3}(7) \begin{vmatrix} -1 & 2 \\ -5 & -1 \end{vmatrix} \\
 \begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -5 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 7 \end{vmatrix} &= -3(1) + 7(-1 + 10) = -3 + 63 = 60.
 \end{aligned}$$

Luego,

$$\det(A) = 8(60) + 2(60) = 480 + 120 = 600.$$

Ejercicio 3.2. Use las propiedades de los determinantes para probar que

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} = b^3(b+4a).$$

Solución 3.2.

$$\begin{vmatrix} a+b & a & a & a \\ a & a+b & a & a \\ a & a & a+b & a \\ a & a & a & a+b \end{vmatrix} \begin{matrix} F_1 \longrightarrow F_1 - F_2 \\ F_3 \longrightarrow F_3 - F_2 \\ F_4 \longrightarrow F_4 - F_2 \end{matrix} \begin{vmatrix} b & -b & 0 & 0 \\ a & a+b & a & a \\ 0 & -b & b & 0 \\ 0 & -b & 0 & b \end{vmatrix} =$$

$$b^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ a & a+b & a & a \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} \begin{matrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_1 \\ b^3 \end{matrix} \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 2a+b & a & a \\ 0 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 1 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{matrix} F_2 \longrightarrow F_2 - F_3 \\ F_4 \longrightarrow F_2 + F_4 \end{matrix} b^3 \begin{vmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 4a+b & a & a \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = b^3(4a+b).$$

Ejercicio 3.3. Sea A una matriz 4×4 y suponga que $\det(A) = 5$. Calcule: $\det(A^{-1})$, $\det(2A)$, $\det(2A^{-1})$ y $\det((2A^{-1}))$.

Solución 3.3.

- a) $\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det A} = \frac{1}{5}$.
- b) $\det(2A) = 2^4 \det(A) = 16(5) = 80$.
- c) $\det(2A^{-1}) = 2^4 \det(A^{-1}) = 2^4 \cdot \frac{1}{\det(A)} = \frac{16}{5}$.
- d) $\det((2A^{-1})) = \frac{1}{\det(2A)} = \frac{1}{2^4 \det(A)} = \frac{1}{16 \times 5} = \frac{1}{80}$.

Ejercicio 3.4. Sea $\det(A) = 3$ y $\det(B) = 4$. Calcule:

- a) $\det(AB)$ b) $\det(ABA^T)$ c) $\det(B^{-1}AB)$

Solución 3.4.

- a) $\det(AB) = \det(A)\det(B) = (3)(4) = 12$.
- b) $\det(ABA^T) = \det(A)\det(B)\det(A^T) = (3)(4)(3) = 48$.
- c) $\det(B^{-1}AB) = \det(B^{-1})\det(B)\det(A) = \frac{1}{\det(B)} \cdot \det(B) \cdot \det(A) = \det(A) = 3$.

Ejercicio 3.5. Determine todos los valores de λ para los cuales

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{pmatrix} = 0.$$

Solución 3.5.

Usamos cofactores sobre la fila 3 que tiene la mayor cantidad de ceros

$$\det \begin{pmatrix} \lambda + 2 & -1 & 3 \\ 2 & \lambda - 1 & 2 \\ 0 & 0 & \lambda + 4 \end{pmatrix} = (-1)^{3+3}(\lambda + 4) \begin{vmatrix} \lambda + 2 & -1 \\ 2 & \lambda - 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Por consiguiente

$$\begin{aligned} (\lambda + 4)((\lambda + 2)(\lambda - 1) - (-1)(2)) &= 0 \\ (\lambda + 4)(\lambda^2 - \lambda + 2\lambda - 2 + 2) &= 0 \\ (\lambda + 4)(\lambda^2 + \lambda) &= 0 \\ (\lambda + 4)(\lambda + 1)(\lambda) &= 0. \end{aligned}$$

Esto implica que $\lambda = 0$, $\lambda = -4$, $\lambda = -1$.

Ejercicio 3.6. *Responda falso o verdadero. Justifique su respuesta*

- a) $\det(AA^T) = \det(A^2)$.
- b) $\det(-A) = -\det(A)$.
- c) Si $A^T = A^{-1}$, entonces $\det(A) = I$.
- d) Si $\det(A) = 0$, entonces $A = 0$.
- e) Si $\det(A) = 0$, entonces $\det(\text{adj}(A)) = 0$.
- f) Si $B = PAP^{-1}$ y P son invertibles, entonces $\det(B) = \det(A)$.
- g) Si $A^4 = I_n$, entonces $\det(A) = I$.
- h) Si $A^2 = A$ y $A \neq I_n$, entonces $\det(A) = 0$.

Solución 3.6.

- a) $\det(AA^T) = \det(A) \det(A^T)$, como $\det(A) = \det(A^T)$, entonces $\det(AA^T) = (\det(A))^2$.

Por otro lado

$$\det(A^2) = \det(AA) = \det(A)\det(A) = (\det(A))^2.$$

Por consiguiente $\det(AA^T) = \det(A^2)$. Esto significa que la proposición es verdadera.

$$b) \det(-A) = -\det(1A) = (-1)^n \det(A) = \begin{cases} -\det(A) & \text{Si } n \text{ es impar} \\ \det(A) & \text{Si } n \text{ es par,} \end{cases}$$

esto significa que la proposición es Falsa.

c) Sea $A^T = A^{-1}$, aplicando determinante en ambos lados obtenemos

$$\det(A^T) = \det(A^{-1}).$$

Como $\det(A^T) = \det(A)$ y

$$\det(A^{-1}) = \frac{1}{\det(A)},$$

entonces

$$\det(A) = \frac{1}{\det(A)} \Rightarrow (\det(A))^2 = 1.$$

Luego $\det(A) = \pm 1$, luego la proposición es falsa, puesto que la solución es 1 o -1.

d) Falso, un contraejemplo es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}$, $A \neq 0$ y $\det(A) = 0$.

e) Como $A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)$, aplicando determinante en ambos lados, obtenemos

$$\det(A^{-1}) = \det\left(\frac{1}{\det(A)} \text{adj}(A)\right) = \left(\frac{1}{\det(A)}\right)^n \det(\text{adj}(A))$$

$$(\det(A))^{n-1} = \det(\text{adj}(A)),$$

si $\det(A) = 0$, entonces se tiene que $\det(\text{adj}(A)) = 0$. Por lo tanto la proposición es verdadera.

3.8. Ejercicios del capítulo 3

1) Calcule los siguiente determinantes suponiendo que

$$\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = 10,$$

$$a) \begin{vmatrix} g & h & i \\ -d & -e & -f \\ 2a & 2b & 2c \end{vmatrix}$$

$$b) \begin{vmatrix} -c & 5b - a & a \\ -f & 5e - d & d \\ -i & 5h - g & g \end{vmatrix}$$

$$c) \begin{vmatrix} c & b & a \\ -i & -h & -g \\ f & e & d \end{vmatrix}$$

$$d) \begin{vmatrix} g & h + 3i & i \\ d & e + 3f & f \\ 2a & 2b + 6c & 2c \end{vmatrix}.$$

2) Verifique la igualdad

$$a) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x & y & z \\ x^2 & y^2 & z^2 \end{vmatrix} = (y - x)(z - x)(z - y)$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 1 + a & 1 + a & 1 + a \\ 1 + a & 1 & 1 + a & 1 + a \\ 1 + a & 1 + a & 1 & 1 + a \\ 1 + a & 1 + a & 1 + a & 1 \end{vmatrix} = -a^3(3a + 4).$$

3) Determine el valor de x en cada caso:

$$a) \begin{vmatrix} x & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 9$$

$$b) \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x^2 & x - 2 & 3 \\ x & x + 1 & x \end{vmatrix} = 3.$$

- 4) En los siguiente casos determine el valor del escalar λ de modo que $|A - \lambda I| = 0$ donde I es la matriz identidad, y A es una matriz cuadrada

a) $\begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$

b) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 4 \\ 3 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

c) $\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 & 1 \\ -2 & 1 & 2 & -3 \\ 2 & -1 & 0 & 5 \end{pmatrix}$.

Ejemplo: Si $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix}$

$$A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = A - \lambda I = \begin{pmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -4 & 2 - \lambda \end{pmatrix}.$$

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2 - \lambda & -1 \\ -4 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (2 - \lambda)(2 - \lambda) - 4 = 4 - 4\lambda + \lambda^2 - 4 = \lambda^2 - 4\lambda = \lambda(\lambda - 4).$$

Para que $|A - \lambda I| = 0$, entonces $\lambda(\lambda - 4) = 0$, $\lambda = 0$ ó $\lambda = 4$.

- 5) Utilice el método de eliminación gaussiana para resolver el sistema: $(A - \lambda I)x = \vec{0}$, para cada λ obtenido en el numeral (b) del ejercicio 4.

Ejemplo: Consideremos la matriz del ejemplo anterior:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \quad (\lambda = 0, \lambda = 4).$$

Para $\lambda = 0$:

$$(A - \lambda)x = \vec{0}$$

$$(A - 0I)x = \vec{0}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 - x_2 = 0 \\ -4x_1 + 2x_2 = 0. \end{cases}$$

El conjunto solución es: $x_1 = t$, $x_2 = 2t$ donde t es un numero real.

o también $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

Para $\lambda = 4$:

$$\begin{aligned}(A - \lambda)x &= \vec{0} \\ (A - 4I)x &= \vec{0}\end{aligned}$$

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -4 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{aligned} -2x_1 - x_2 &= 0 \\ -4x_1 - 2x_2 &= 0. \end{aligned}$$

El conjunto solución es: $x_1 = -t$ $x_2 = 2t$ donde t es un numero real.

o también $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -t \\ 2t \end{pmatrix} = t \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, t \in \mathbb{R}.$

- 6) Sean $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ puntos diferentes de \mathbb{R}^2 . Pruebe que la ecuación de la recta que contiene estos puntos es:

$$\begin{vmatrix} X & Y & 1 \\ X_1 & Y_1 & 1 \\ X_2 & Y_2 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

- 7) Halle la inversa de las matrices

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

Usando la fórmula para la matriz inversa: $A^{-1} = \frac{1}{|A|} \text{Adj}(A).$

- 8) Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 3 & 4 & 5 \\ -1 & 7 & 0 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ calcule X y simplifique la expresión:

$$XA^{-1} = \frac{3}{|A|} \text{Adj}(A) + \left[2(A^{-1})^t B^t - \frac{1}{2} A^{-1} \left(\frac{1}{2} B A^{-1} \right)^{-1} \right]^t + (B^t)^{-1}.$$

- 9) ¿Para qué valores de α la matriz A no tiene inversa?

$$A = \begin{pmatrix} -\alpha & \alpha - 1 & \alpha + 1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 - \alpha & \alpha + 3 & \alpha + 7 \end{pmatrix}.$$

- 10) Sea A una matriz $n \times n$. Demuestre que $\det(\text{Adj}(A)) = (\det A)^{n-1}$.

11) Sean A y B matrices $n \times n$. Demuestre que si A es invertible, entonces

$$\det(B) = \det(A^{-1}BA).$$

12) Demuestre que:

- a) Si α es un escalar y A es una matriz $n \times n$, entonces $\det(\alpha(A)) = \alpha^n \det(A)$.
- b) Si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$, entonces $\det(A^T) = (-1)^n \det A$ (Una matriz A es antisimétrica si $A^T = -A$).
- c) Si A es una matriz antisimétrica de $n \times n$ y n es impar, entonces $\det(A) = \pm 1$. (Sugerencia: use el resultado del numeral (b)).
- d) Si A es ortogonal, entonces $\det(A) = \pm 1$.
(una matriz A es ortogonal si A es invertible y $A^{-1} = A^t$).

13) Suponga que $\det(A) = 5$ y A es una matriz $n \times n$. Encuentre:

- a) $\det(3A)$
- b) $\det(2A^{-1})$
- c) $\det((2A)^{-1})$.

14) Use la regla de Cramer para resolver el siguiente sistema:

$$a) \begin{cases} ax + by + cz = c + 2a \\ dx + ey + fz = f + 2d \\ gx + hy + iz = i + 2g.m \end{cases}$$

(Sugerencia: no desarrolle el determinante, use sus propiedades)

15) Establezca la veracidad o falsedad de cada una de las siguientes proposiciones: reemplace cada enunciado falso por una proposición verdadera.

- a) Si A y B son simétricas entonces $AB = BA$.
- b) Si A es invertible, el tamaño de A^{-1} es igual al de A .
- c) La matriz identidad es su propia inversa.
- d) La matriz cero tiene como inversa una matriz cero.
- e) Si una matriz A contiene un elemento igual a cero se concluye que no es invertible.

- f)* Una matriz es invertible en el caso de que al menos uno de sus elementos sea distinto a cero.
- g)* La matriz cuadrada A es invertible si y sólo si $|A| \neq 0$.
- h)* La adjunta de A es la matriz de cofactores A^T .
- i)* Si A es una matriz cuadrada y A^T es su transpuesta, se sigue que $|A| = |A^T|$.
- j)* El cofactor y menor de un elemento son iguales en valor absoluto pero difieren en el signo.
- k)* Si A y B son invertibles, $A^{-1}B^{-1} = (BA)^{-1}$.
- l)* Si A es invertible $(A^{-1})^{-1} = A$.
- m)* Si A es una matriz $n \times n$ y $|2A^{-1}| = 2$, entonces $|-A^T| = 4$.

Capítulo 4

Espacios vectoriales

En matemáticas y en sus aplicaciones se presentan conjuntos donde tiene sentido y resulta interesante considerar combinaciones lineales de los elementos de dicho conjunto; ejemplo de lo anterior son: los números complejos, los números reales de las funciones de \mathbb{R} en \mathbb{R} etc.

Los conceptos claves del álgebra lineal son la linealidad y la dimensión espacial. A esto nos vamos a dedicar en este capítulo.

Antes de dar la definición de espacio vectorial, recordemos que es un campo o cuerpo.

Definición 4.1. *Un campo \mathbb{K} es un conjunto no vacío de elementos con dos leyes de combinación, que llamaremos adición y multiplicación, las cuales satisfacen las siguientes condiciones*

\mathbb{K}_1 Si $a, b \in \mathbb{K}$ entonces $a + b \in \mathbb{K}$ (cerradura).

\mathbb{K}_2 Si $a, b, c \in \mathbb{K}$, $(a + b) + c = a + (b + c)$.

\mathbb{K}_3 Existe un elemento que lo denotamos por 0 tal que $0 + a = a + 0 = a$ para todo $a \in \mathbb{K}$.

\mathbb{K}_4 Para todo $a \in \mathbb{K}$ existe un elemento, que lo denotamos por

$$-a \in \mathbb{K}, \quad a + (-a) = (-a) + a = 0.$$

\mathbb{K}_5 $a + b = b + a$ (conmutativa con respecto a la suma).

\mathbb{K}_6 Si $a, b \in \mathbb{K}$ (cerrado con respecto a su producto).

\mathbb{K}_7 Si $a, b, c \in \mathbb{K}$ $a(bc) = (ab)c$.

\mathbb{K}_8 Existe un elemento diferente a cero, que lo denotamos por 1, tal que $a \cdot 1 = 1 \cdot a = a$.
Para todo $a \in \mathbb{K}$.

\mathbb{K}_9 Para todo $a \in \mathbb{K}$, $a \neq 0$ existe un elemento, que denotamos por a^{-1} tal que $a \cdot a^{-1} = a^{-1} \cdot a = 1$ (a^{-1} es el inverso multiplicativo de a).

\mathbb{K}_{10} Si $a, b \in \mathbb{K}$, $ab = ba$ (se cumple la propiedad conmutativa con respecto a la multiplicación).

\mathbb{K}_{11} Si $a, b, c \in \mathbb{R}$, $(a + b)c = ac + bc$ (se cumple la propiedad distributiva, con respecto a la adición).

Queda como ejercicio, demostrar que el conjunto $\{0, 1\}$ donde se define la suma por las reglas $0 + 0 = 1 + 1 = 0$ y $0 + 1 = 1$ y la multiplicación se define por $0 \cdot 0 = 0 \cdot 1 = 0$ y $1 \cdot 1 = 1$ es un campo. Además demostrar que $\mathbb{R}, \mathbb{Q}, \mathbb{C}$ los campos.

Definición 4.2. Un espacio vectorial V sobre un campo \mathbb{K} (espacio lineal); es un conjunto no vacío de elementos, llamados vectores, con dos leyes de combinación, llamada adición vectorial (o adición) y multiplicación escalar, que satisfacen las siguientes condiciones:

V_1) Para todo $x, y \in V$, existe un único vector llamado $x + y \in V$.

V_2) Si $x, y, z \in V$, entonces $(x + y) + z = x + (y + z)$.

V_3) Existe un vector $0 \in V$ tal que $0 + x = x + 0$ para todo $x \in V$.

V_4) Para todo $x \in V$, existe un $-x \in V$ tal que $x + (-x) = (-x) + x = 0$.

V_5) Para todo $x, y \in V$, $x + y = y + x$ (Propiedad conmutativa).

Las propiedades del V_1 al V_5 significan que el conjunto V es un grupo abeliano con respecto a la suma.

V_6) Para todo $x \in V$ existe $\alpha \in \mathbb{K}$ tal que $\alpha x \in V$.

V_7) Si $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \in V$, entonces $\alpha(\beta x) = (\alpha\beta)x$.

V_8) $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$ para todo $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$ (la multiplicación escalar es distributiva con respecto a la adición vectorial).

V_9) $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$ para todo $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ y $x \in V$. La multiplicación es distributiva, con respecto a la adición escalar).

V_{10}) $1 \cdot x = x \cdot 1 = x$ donde $1 \in \mathbb{K}$.

Ejemplo 4.1. Ejemplos de espacios vectoriales

Solución 4.1.

- 1) Sean $V = \mathbb{R}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $V = \mathbb{R}$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} , la suma de dos vectores $x + y \in \mathbb{R} = V$ y $\alpha x \in \mathbb{R}$ $\alpha \in \mathbb{R}$. Suma y multiplicación usual de \mathbb{R} . Las demás propiedades se verifican fácilmente, así como en los siguientes ejemplos de espacios vectoriales.

- 2) Sean $\mathbb{C} = V$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces $\mathbb{C} = V$ es un espacio vectorial, la adición en \mathbb{C} se define de la forma usual si $x, y \in \mathbb{C}$ entonces $x + y \in \mathbb{C}$ y la multiplicación de un complejo x por un escalar α es un complejo $\alpha x \in \mathbb{C}$.
- 3) Sea \mathbb{K} un campo cualquiera y sea $V = P$ el conjunto de todos los polinomios con una indeterminada x con coeficientes en \mathbb{K} . La adición vectorial se define como la adición ordinaria de polinomios y la multiplicación, como la multiplicación ordinaria de un polinomio por un elemento de \mathbb{K} .

En particular P_n el conjunto de todos los polinomios de coeficientes en \mathbb{K} en la variable x con grado $\leq n - 1$ es un espacio vectorial.

- 4) Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $V = \{f : f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}\}$, si $f, g \in V$, entonces definimos la suma en V , de la forma usual

$$(f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(\alpha f)(x) = \alpha f(x) \quad V \text{ es un espacio vectorial sobre } \mathbb{R}.$$

- 5) Si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $V = \{f : f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R} \text{ continuas}\}$, V es un espacio vectorial suma de funciones continuas. Es una función continua si $\alpha \in \mathbb{R}$ y f es continua en $[a, b]$ entonces αf es continua en $[a, b]$.
- 6) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, V en conjunto de todas las funciones integrables en $[a, b]$. V es un espacio vectorial.
- 7) $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $V =$ El conjunto de todas las funciones diferenciables en $I = (a, b)$ es un espacio vectorial, puesto que la suma de dos funciones diferenciables en un intervalo I es una función diferenciable, y si una función diferencial se multiplica por un número real, la función sigue siendo diferenciable.
- 8) $V = \mathbb{R}^n$, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n = V$, $x \in \mathbb{R}$. La adición vectorial y la multiplicación escalar se definen según las reglas

$$(x_1, x_2, \dots, x_n) + (y_1, y_2, \dots, y_n) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \dots, x_n + y_n)$$

$$\alpha(x_1, x_2, \dots, x_n) = (\alpha x_1, \alpha x_2, \dots, \alpha x_n).$$

A este espacio se le da el nombre de espacio de coordenadas reales n -dimensional.

Si $\mathbb{K} = \mathbb{Q}$, $V = \mathbb{R}^n$ también es un espacio vectorial.

El teorema que sigue es una consecuencia inmediata de los axiomas de espacios vectoriales.

Teorema 4.1. Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

$$a) \quad 0_{\mathbb{K}} \cdot X = 0_V \text{ para todo vector } x \in V \text{ y } \alpha \cdot 0_V = 0_V \text{ para todo } \alpha \in \mathbb{K}.$$

- b) $\alpha(-x) = -(\alpha x)$.
- c) En un espacio vectorial el elemento cero es único.
- d) En un espacio vectorial el inverso aditivo es único.
- e) Si $\alpha x = 0$, entonces $\alpha = 0$ o $x = 0$; $\alpha \in \mathbb{K}$, $x \in V$.
- f) Si $\alpha x = \alpha y$ y $\alpha \neq 0$, entonces $x = y$.
- g) Si $\alpha x = \beta y$ y $x \neq 0$, entonces $\alpha = \beta$.

Demostración 4.1.

Demostremos solo la parte c) y f).

- c) Suponga que existen dos elementos neutros de V , $0_1, 0_2$.

$$(1) 0_1 + 0_2 = 0_1 \quad \text{y} \quad (2) 0_1 + a_2 = a_2$$

tomando $x = 0_1 + 0_2$, en (1) llegamos a que $x = 0_1$ pero por (2) $x = a_2$ por lo tanto $0_1 = 0_2$.

- f) Sean $x, y \in V$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha(x - y) \in V$ $\alpha(x - y) = \alpha x - \alpha y$ si $\alpha \neq 0$, entonces

$$\alpha(x - y) = 0 = \alpha x - \alpha y \quad \text{esto implica que } x = y.$$

Ejemplo 4.2. Determinar si los siguientes conjuntos son espacios vectoriales

Solución 4.2.

- a) Sean $V = \{f : f(0) = f(1)\}$ y $\mathbb{K} = \mathbb{R}$, entonces V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . En efecto, la suma se define como:

- $(f + g)(0) = f(0) + g(0) = f(1) + g(1) = (f + g)(1)$
- $(\lambda f)(0) = \lambda f(0) = \lambda f(1) = (\lambda f)(1)$.

- b) Sean $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $V = \{f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \text{ tal que } \int_0^1 f(x)dx = 0\}$, entonces V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} .

Sean $f, g \in V$ $f + g$ es integrable y λf es integrable. Mostremos que satisfacen la condición

$$\bullet \int_0^1 (f + g)(x)dx = \int_0^1 (f(x) + g(x))dx = \int_0^1 f(x)dx + \int_0^1 g(x)dx = 0 + 0 = 0.$$

- $\int_0^1 (\lambda f)(x) dx = \int_0^1 \lambda f(x) dx = \lambda \int_0^1 f(x) dx = \lambda 0 = 0.$

c) Sean $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ y $V = \{f : f(x) = f(1-x) \text{ para todo } x \in \mathbb{R}\}$. V es un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . En efecto,

Sean $f, g \in V$, entonces $f(x) = f(1-x)$ y $g(x) = g(1-x)$

- $(f+g)(x) = f(x) + g(x) = f(1-x) + g(1-x) = (f+g)(1-x)$
- $(\lambda f)(x) = \lambda f(x) = \lambda f(1-x).$

4.1. Subespacios vectoriales

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{K} , diremos que un subconjunto S de V es un espacio vectorial (o subespacio vectorial) si S es un espacio vectorial con respecto a las mismas operaciones de adición y multiplicación escalar, definidas en V . Claramente el subespacio vectorial es un espacio vectorial sobre el mismo campo \mathbb{K} .

Teorema 4.2. *Sea S un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V . Entonces S es un subespacio vectorial de V si y sólo si satisface las siguientes condiciones:*

- Si $x, y \in S$, entonces $x + y \in S$.
- Si $x \in S$ y $\alpha \in \mathbb{K}$, entonces $\alpha x \in S$.

Las anteriores son propiedades de cerradura.

Demostración 4.2.

- Es claro puesto que si S es un subespacio vectorial de V satisface estas dos propiedades.
- Básicamente tenemos que mostrar que $0_v \in S$ y cada elemento de S tiene inverso aditivo. En efecto, $0_v \in S$ puesto que si $x \in S$, entonces $0_v = 0_{\mathbb{K}} \cdot x \in S$ por ii). Es segundo lugar si $x \in S$, entonces $x \in S$ pues $-x = -1_{\mathbb{K}}x$.

Ejemplo 4.3. *Sea $\mathbb{K} = \mathbb{R}$. Algunos ejemplos de subespacios vectoriales y conjuntos que no son subespacios vectoriales.*

Solución 4.3.

- $0+0=0$ y $\alpha 0=0$, por lo tanto $V=\{0\}$ es un subespacio vectorial llamado subespacio trivial.
- Un espacio vectorial es un subespacio en si mismo.

c) Un subespacio de \mathbb{R}^2 . Sea $H = \{(x, y) : y = mx\}$ H es un subespacio de \mathbb{R}^2 .

d) Otro subespacio de \mathbb{R}^3 . Sea $H = \{(x, y, z) : ax + by + cz = 0; a, b, c \in \mathbb{R}\}$.

Nota. Las rectas de \mathbb{R}^3 que pasan por el origen son subespacios de \mathbb{R}^3 .

e) Demuestre que \mathbb{R} no tiene subespacios propios. Sea H un subespacio de \mathbb{R} . Si $H \neq \{0\}$, entonces H contiene un número real x diferente de cero. Por uno de los axiomas de espacio vectorial

$$1 = \left(\frac{1}{x}\right)x \in H \text{ luego } \frac{1}{x} \in H,$$

por lo tanto luego H no es el subespacio trivial, luego $H = \mathbb{R}$, es decir \mathbb{R} no tiene subespacio propio.

f) Si P_n denota el espacio vectorial de polinomios de grado $\leq n$ y si $0 \leq m < n$, entonces P_m es un subespacio propio de P_n . Es claro por como se define la suma y la multiplicación escalar de polinomios.

g) Sea M_{nm} el espacio vectorial de matrices $m \times n$, con componentes reales. Demuestre que $H = \{A \in M_{nm} : a_n = 0\}$ es un subespacio vectorial de M_{nm} .

h) $H = \{A \in M_{nn} : A \text{ es invertible}\}$, muestre que H no es un subespacio vectorial de M_{nn} (puesto que la matriz cero $n \times n$ no es invertible).

i) Sea

- $C[0, 1]$ = el conjunto de todas las funciones continuas de $[0, 1]$ a \mathbb{R} .
- $C'[0, 1]$ = el conjunto de funciones con primeras derivadas continuas definidas en $[0, 1]$ a \mathbb{R} .

Como toda función diferenciable es continua, entonces $C'[0, 1] \subset C[0, 1]$. Ahora como la suma de funciones diferenciables es una función diferenciable y un múltiplo constante de una función diferenciable es diferenciable, se ve que $C'[0, 1]$ es un subespacio de $C[0, 1]$. Se trata de un subespacio propio, por que no toda función continua es diferenciable.

Teorema 4.3. Si $(F_r)_{r \in M}$ es una familia de subespacios del espacio vectorial V , entonces $\bigcap_{r \in M} F_r = F$ es un subespacio de V .

Demostración 4.3. Sea $F_r : r \in M$ una colección índices de subespacios de V .

La intersección $\bigcap_{r \in M} F_r$ no es vacía, puesto que contiene al cero. Sean $x, y \in \bigcap_{r \in M} F_r$ y $\alpha, \beta \in \mathbb{K}$ entonces $x, y \in F_r$ para todo $r \in M$. Ya que F_r es un subespacio $\alpha x + \beta y \in F_r$ para todo $r \in M$ y por lo tanto $\alpha x + \beta y \in \bigcap_{r \in M} F_r$ luego $F = \bigcap_{r \in M} F_r$ es un subespacio.

4.2. Combinaciones lineales

Definición 4.3. Diremos que un elemento x de un espacio vectorial V sobre \mathbb{K} es una combinación lineal de elementos del subconjunto $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ si existen escalares $c_1, c_2, \dots, c_n \in \mathbb{K}$ tal que:

$$x = \sum_{i=1}^n c_i x_i.$$

Denotaremos por $L(S)$ al conjunto de todas las combinaciones lineales de S . $L(S)$ es llamado envolvente lineal y se define como:

$$L(S) = \{x \in V : x = c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n \text{ donde } x_i \in V \text{ y } c_i \in \mathbb{K} \ i = 1, \dots, n\}.$$

Se propone como ejercicio determinar en cada caso si el vector v es combinación lineal de los vectores dados

a) $v = (2, 1, 5), \quad v_1 = (1, 2, 1), \quad v_2 = (1, 0, 2) \quad v_3 = (-1, 1, 0).$

b) $v = (4, 2, 2), \quad v_1 = (1, -2, 4), \quad v_2 = (1, 3, 5) \quad v_3 = (2, 1, 1).$

c) Si $S = \{i, j\} \subseteq \mathbb{R}^2$ todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es una combinación lineal de los elementos de S dado que $(x, y) = x(1, 0) + y(0, 1).$

Análogamente si $S = \{\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}\} \subseteq \mathbb{R}^3$, entonces todo $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de los elementos de S , es decir

$$(x, y, z) = \hat{i}x + \hat{j}y + \hat{k}z.$$

Mostremos que si $S = \{i, j, i + j\} \subseteq \mathbb{R}^2$, entonces todo $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ es una combinación lineal de los elementos de S .

$$(x, y) = c_1(1, 0) + c_2(0, 1) + c_3(1, 1)$$

$$(x, y) = (c_1 + c_3, c_2 + c_3).$$

Igualando componentes y resolviendo el sistema 3×3 obtenemos los valores de las constantes $c_1 = 1, c_2 = y - x + 1, c_3 = x - c_1 = x - 1$

$$\begin{aligned} (x, y) &= (1, 0) + (y - x + 1)(0, 1) + (x - 1)(1, 1) \\ &= (1, 0) + (0, y - x + 1) + (x - 1, x - 1) = (x, y). \end{aligned}$$

Teorema 4.4. Sea $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ un subconjunto del espacio vectorial V . Entonces $L(S)$ es un subespacio de V . Además $L(S)$ es el menor subespacio que contiene a S .

Demostración 4.4. Sean $x = \sum_{i=1}^n c_i x_i$ y $y = \sum_{i=1}^n d_i x_i \in L(S)$. Entonces

$$\begin{aligned} x + y &= (c_1 + d_1)x_1 + \dots + (c_n + d_n)x_n \in L(S) \\ \alpha x &= \alpha(c_1 x_1 + \dots + c_n x_n) = \alpha c_1 x_1 + \dots + \alpha c_n x_n \\ &= (\alpha c_1)x_1 + \dots + (\alpha c_n)x_n \in L(S). \end{aligned}$$

Demostremos la segunda parte:

Si F es un subespacio que contienen a S , $S \subset F$, entonces toda combinación lineal $x = c_1 x_1 + \dots + c_n x_n$ de elementos S pertenece a F , luego $L(S) \subseteq F$, es decir, es el menor subespacio que contiene al subconjunto A .

4.3. Dependencia lineal

Definición 4.4. Un subconjunto finito $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de vectores del espacio vectorial V sobre \mathbb{K} es linealmente independiente si

$$c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$$

implica que $c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0$.

Diremos que S es linealmente dependiente si S no es linealmente independiente, es decir, si existe al menos una constante $c_i \neq 0$ $i = 1, 2, \dots, n$ tal que $c_1 x_1 + c_2 x_2 + \dots + c_n x_n = 0$. Los conjuntos linealmente independientes los denotaremos por l.i y los conjuntos linealmente dependientes por l.d.

Observación

- 1) Si $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es l.i, entonces todo subconjunto $B \subseteq S$ es l.i. En efecto. Sea $B = \{x_1, x_2, \dots, x_m\}$ donde $m < n$. Si

$$c_1 x_1 + c_1 x_2 + \dots + c_m x_m + c_{m+1} x_{m+1} + \dots + c_n x_n = 0$$

donde $c_1 = c_2 = \dots = c_m = c_{m+1} = \dots = c_n = 0$, luego B es l.i.

- 2) Sea $x \in V$, entonces $\{x\}$ es linealmente independiente si y sólo si $x \neq O_E$.

En efecto: si $x \neq O_E$ y $\lambda x = O_E$ entonces $\lambda = O_k$.

Si $\{x\}$ es linealmente dependiente, entonces no es posible que $x = O_E$ pues ya que $1 \cdot x = O_E$ sería una combinación lineal no nula.

Ejemplo 4.4. Analice la dependencia o independencia de los siguientes conjuntos.

Solución 4.4.

- a) Sea $u_1(t) = \cos^2 t$, $u_2(t) = \sin^2 t$, $u_3(t) = 1$ para todo t .
Muestre que $u_1 + u_2 - u_3 = 0$, por lo tanto u_1, u_2, u_3 es linealmente dependiente.
- b) $S = \{e_1, e_2, \dots, e_n\} \subseteq \mathbb{R}^n$. S es l.i. y genera a \mathbb{R}^n .
- c) Sea $u_n(t) = t^n$ $n = 0, 1, 2, \dots$, $t \in \mathbb{R}$. El subconjunto $S = \{u_0, u_1, u_2, \dots\}$ es linealmente independiente. Es suficiente mostrar que para todo n , los $n+1$ polinomios u_0, u_1, \dots, u_n son linealmente independientes.

$$\sum_{k=0}^n c_k t^k = a_0 + c_1 t + c_2 t^2 + \dots + c_n t^n = 0 \quad \text{para todo } t. \quad (1)$$

Si $t = 0$, entonces $a_0 = 0$. Derivando la expresión (1) obtenemos:

$$c_1 + 2c_2 t + 3c_3 t^2 + \dots + nc_n t^{n-1} = 0 \quad \text{si } t = 0, \text{ entonces } a_1 = 0.$$

Si seguimos así hasta calcular la n -ésima derivada y evaluando en $t = 0$, se obtiene $a_n = 0$.

- d) Sean a_1, a_2, \dots, a_n constantes, el conjunto $u_1 = e^{a_1 x}, u_2 = e^{a_2 x}, \dots, u_n = e^{a_n x}$ son l.i.

$$\sum_{k=1}^n c_k e^{a_k x} = 0$$

por inducción sobre n . Si $n = 1$

$$c_1 e^{a_1 x} = 0 \Rightarrow c_1 = 0 \text{ puesto que } e^{a_1 x} > 0.$$

Supongamos que el enunciado es cierto para $n - 1$, luego

$$\sum_{k=1}^n c_k e^{a_k x} = 0 \Rightarrow c_1 = c_2 = \dots = c_n = 0. \quad (*)$$

Sea a_M el número más grande de todos los a_1, a_2, \dots, a_n , entonces multiplicando (*) por $e^{-a_M x} = 0$ obtenemos:

$$\sum_{k=1}^n c_k e^{(a_k - a_M)x} = 0 \text{ como } a_k - a_M < 0 \text{ si } k \neq M$$

$c_M + \sum_{k=1}^n c_k e^{(a_k - a_M)x} = 0$ si $x \rightarrow \infty$, entonces $c_M = 0$, luego para n es cierto.

Definición 4.5. Se dice que un conjunto $S = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ de un espacio vectorial V , generan a V . Si todo $x \in V$ se puede escribir como una combinación lineal de ellos. Es decir, para todo $x \in V$ existen escalares a_1, a_2, \dots, a_n tal que

$$x = a_1v_1 + a_2v_2 + \dots + a_nv_n.$$

Nota. Si S genera a V , entonces $L(S)$ genera a V puesto que $S \subseteq L(S)$.

Ejemplo 4.5.

- 1) $n + 1$ elementos $1, x, \dots, x_n$ generan a P_n .
- 2) M_{22} , cuatro matrices generan a $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in M_{22}$.

Solución 4.5.

1)

$$P(x) = a_0 + a_1x + \dots + a_nx^n.$$

2)

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = a \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + b \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

A continuación presentamos dos resultados sobre dependencia lineal

Teorema 4.5. Si x es una combinación lineal sobre $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ y cada x_i es una combinación lineal sobre $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$, entonces x es una combinación lineal sobre $\{y_1, y_2, \dots, y_n\}$.

Demostración 4.5. Por hipótesis tenemos $x = \sum c_i x_i$, y $x_i = \sum c_{ij} y_j$, entonces

$$x = \sum_i b_i \left(\sum_j c_{ij} y_j \right) = \sum_j \left(\sum_i b_i c_{ij} \right) y_j.$$

Teorema 4.6. Un conjunto de vectores diferentes de cero $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ es linealmente dependiente si y sólo si x_k es una combinación lineal de los x_i con $i < k$.

Demostración 4.6. Suponga que $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ son l.d, entonces existe una relación no trivial entre ellos $\sum_i c_i x_i = 0$. Entonces existe al menos un x_k tal

que $x_k = c_k \sum_{i=1}^n c_i x_i = \sum_{i=1}^n (c_k^{-1} c_i) x_i$ con $i \neq k$ el inverso es obvio.

Demostrar que si $A \subseteq B$, entonces $L(A) \subseteq L(B)$. La demostración se propone como un ejercicio.

4.4. Bases de espacios vectoriales

En esta sección vamos a ver cuando un subconjunto de vectores de un espacio vectorial V describen completamente al espacio vectorial V .

Definición 4.6. *Un conjunto A linealmente independiente que genera a un espacio vectorial V , se llama base de V . La dimensión de V es el número de elementos que tiene cualquier base de V .*

Observación Si $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ es una base de dimensión n de V , entonces todo $x \in V$ se puede escribir de forma única como $x = \sum_{i=1}^n c_i a_i$.

Teorema 4.7. *Si A es un subconjunto l.i. del vectorial E y $v \notin L(A)$, entonces $A \cup \{v\} = B$ es l.i.*

Demostración 4.7.

Sea $\sum_{b \in E} \lambda_b b = 0$ una combinación lineal nula. Existen dos posibilidades: $\lambda_v = 0$ y $\lambda_v \neq 0$. Si $\lambda_v = 0$, entonces $\sum_{b \in B} \lambda_b b = \sum_{a \in A} \lambda_a a = 0$, así que $\lambda_a = 0$ para todo $a \in A$ por ser A l.i, es decir $\lambda_b = 0$ para todo $b \in B$. Si $\lambda_v \neq 0$, entonces $v = -\sum_{a \in A} (\lambda_v^{-1} \lambda_a) a \in L(A)$ lo que es una contradicción.

Teorema 4.8. *(Existencia de bases) Todo espacio vectorial finitamente generado posee una base. Más aun si $\{y_1, y_2, \dots, y_n\} = G$ es un sistema de generados del espacio vectorial E , entonces algún subconjunto de A de G es una base de E .*

Demostración 4.8.

Supongamos que G genera a E , podemos suponer que $g_k \neq 0$ para todo k . Sea $a_1 = g_1$. Entonces $\{a_i\}$ es l.i. Sea $E_1 = \text{lin}\{a_1\}$ (subespacio generado por $\{a, b\}$). Si $G \subseteq E_1$, entonces $\{a_1\}$ es una base de E . En efecto, todo $x \in E$ es de la forma

$$x = \sum_{j=1}^n t_j g_j \quad j = 1, \dots, n.$$

Como $g_j \in E_1$, entonces $g_j = \lambda_j a_1$ luego $x = \sum_{j=1}^n t_j \lambda_j a_1 = \alpha a_1$ donde $\alpha = \sum_{j=1}^n t_j \lambda_j$.

Si G no está contenido en E_1 , existe un $g \in G$ tal que $g \notin E_1$. Supongamos que es $g_2 \notin E_1$. Sea $a_2 = g_2$, entonces $\{a_1, a_2\}$ es linealmente independiente por Teorema 4.7. Si $G \subseteq \text{lin}\{a_1, a_2\}$, entonces $\{a_1, a_2\}$ es una base pues $\text{lin}(G) = E$ es el menor subespacio que contiene a E , así que $E \subseteq \text{lin}\{a_1, a_2\} \subseteq E$ y $E = \text{lin}\{a_1, a_2\}$. Si G no es un subconjunto de $\text{lin}\{a_1, a_2\}$. Supongamos que $g = g_3$, como G es finito después

de repetir el procedimiento un número finito de veces encontraremos un subconjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_p\} \subset \{g_1, \dots, g_n\}$ $p \leq n$ l.i que genera a E .

Esto significa que un subconjunto de n elementos que generan a E cortan a los más n elementos linealmente independientes.

Teorema 4.9. *Todas las bases de un espacio vectorial finito, tienen el mismo número de elementos.*

Demostración 4.9. *Suponga que A es una base con n elementos y B otra base cualquiera. Ya que A genera a B es l.i, entonces por el Teorema 4.7, el número m elementos de B debe ser a lo más n_g , esto es $m \leq n$. Pero puede intercambiarse los papeles de A y B para obtener otra desigualdad $m \geq n$ luego $n = m$.*

Teorema 4.10. *En un espacio vectorial de dimensión n , todo subconjunto con más de n vectores es linealmente dependiente.*

Demostración 4.10.

Sea E un espacio vectorial sobre \mathbb{K} de dimensión n y $A = \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$ un subconjunto con $n + 1$ vectores. Argumentemos por contradicción suponiendo que este subconjunto es linealmente independiente.

Sea $G = \{g_1, g_2, \dots, g_n\}$ una base, como $a_1 = \sum_{i=1}^n \lambda_i g_i$ combinación no nula, podemos sustituir a a_1 por un $g \in G$, digamos g_r por lo tanto $\{g_1, a_{21}, \dots, a_{n+1}\}$ es l.i, este proceso lo podemos repetir hasta obtener un subconjunto l.i $\{g_1, g_2, \dots, g_n, a_{n+1}\}$. Esto es una contradicción debido al carácter maximal de $\{g_1, g_2, \dots, g_n\}$.

Observación.

- un conjunto de n vectores en \mathbb{R}^m siempre es l.d, si $n > m$.
- un conjunto de vectores l.i en \mathbb{R}^n contiene a lo más n vectores.

La demostración de este resultado se deja como ejercicio.

Teorema 4.11. *Todo subconjunto de un espacio vectorial de dimensión n conformado por n vectores linealmente independientes es una base.*

Demostración 4.11.

La demostración se deja se como ejercicio.

Teorema 4.12. *(Completación de bases) Sea $\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$ un subconjunto l.i de un espacio vectorial V de dimensión n . Si $p < n$, entonces existen $q = n - p$ vectores b_1, \dots, b_q tales que el subconjunto $\{a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q\}$ es una base.*

Demostración 4.12.

Sea E un espacio vectorial de dimensión n . Si $F_1 = L\{a_1, a_2, \dots, a_p\}$, entonces $F_1 \subset E$ puesto que $p < n$. Sea $b_1 \in E - F_1$, entonces $\{a_1, \dots, a_p, b_1\}$ es l.i.

Sea $F_2 = L\{a_1, \dots, a_p, b_1\}$. De nuevo existe $b_2 \in E - F_2$ tal que $\{a_1, \dots, a_p, b_1, b_2\}$ es l.i, de este modo uno constituye vectores b_1, \dots, b_q tales que $\{a_1, a_2, \dots, a_p, b_1, \dots, b_q\}$ un conjunto linealmente independiente, conformado por n vectores, luego este conjunto es una base. (Puesto que todo conjunto con n vectores en un espacio de dimensión n es una base).

Teorema 4.13. *Sea H un subespacio de un espacio vectorial de dimensión finita V . Entonces H tiene dimensión finita y*

$$\dim(H) \leq \dim V.$$

Demostración 4.13.

Sea $\dim(V) = n$, cualquier subconjunto l.i en H es l.i en V , pero cualquier subconjunto l.i de H puede contener a lo más n vectores. Si $H = \{0\}$, entonces $\dim(H) = 0$ y $0 < n$. Si $H \neq \{0\}$, sea $v_1 \neq 0$ un vector en H y $H_1 = L\{v_1\}$. Si $H_1 = H$, $\dim(H) = 1$ y la prueba queda completa. Si no elija un $v_2 \in H$ tal que $v_2 \notin H_1$ y sea $H_2 = L\{v_1, v_2\}$ y así sucesivamente, continúe hasta encontrar vectores linealmente independientes v_1, v_2, \dots, v_k tales que $H = \{v_1, v_2, \dots, v_k\}$. El proceso termina hasta encontrar a los mas n vectores l.i, entonces

$$H = K \leq n.$$

Nota. : Cualquier espacio vectorial que contiene un subespacio de dimensión infinita es de dimensión infinita.

4.5. Rango y nulidad de una matriz

En esta sección obtendremos un método para calcular una base para el espacio vectorial V generado por un conjunto de vectores $B = \{b_1, \dots, b_n\}$. Este método produce una base para V que no necesariamente es un subconjunto de B . Además asociaremos a cada matriz $A \in M_{m \times n}$, donde $M_{m \times n}$ el conjunto de matrices de orden $m \times n$.

Sobre \mathbb{R} , un número $n \in \mathbb{N}_0$, el cual veremos más adelante, nos proporcionará información acerca de la dimensión del espacio de solución de un sistema homogéneo $Ax = 0$ donde A es la matriz de coeficientes.

Los sistemas homogéneos tienen una función crucial en el álgebra lineal, como ya se observó anteriormente, un sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene solución trivial, en este caso A es invertible o tiene infinitas soluciones, caso en que A no es invertible. Un problema interesante en álgebra lineal es encontrar una base en el conjunto de todas las soluciones

del sistema homogéneo $Ax = 0$.

Sea A una matriz $m \times n$, definimos los siguientes conjuntos:

Espacio nulo de la matriz A lo definimos por

$$N_A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\} = \text{espacio nulo de } A \text{ o Kernel de } A.$$

Demostrar que N_A es un subespacio vectorial de \mathbb{R}^n : definimos $\dim(N_A) = \nu(A)$ como la nulidad.

Observación. Si $N_A = \{0\}$, entonces $\nu(A) = 0$.

Ejemplo 4.6.

Sea

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix},$$

Hallar N_A y $\dim N_A$.

Solución 4.6.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 4 & -2 & 6 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ -6 & 3 & -9 & 0 \end{array} \right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Por consiguiente tenemos $2x - y + 3z = 0$, luego si hacemos $z = s$ y $x = t$ donde $t, s \in \mathbb{R}$, entonces $y = 2t + 3s$. Esto significa que N_A es:

$$N_A = \{(x, y, z) : (t, 2t + 3s, s) : t, s \in \mathbb{R}\} = \{(x, y, z) : t(1, 2, 0) + s(0, 3, 1)\},$$

$$N_A = L(\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\}),$$

donde los vectores $(1, 2, 0)$ y $(0, 3, 1)$ son linealmente independientes y esto implica que $\dim(N_A) = 2$.

El procedimiento para determinar a una base para el espacio $N_A = \{x \in \mathbb{R}^n : Ax = 0\}$ donde A es una matriz $m \times n$, es el siguiente:

- 1) Resolver el sistema homogéneo dado $Ax = 0$, usando reducción por filas. Si la solución no tiene constantes arbitrarias, entonces el espacio solución es $\{0_{\mathbb{R}^n}\}$, que no tiene una base; la dimensión del espacio N_A es cero.
- 2) Si la solución $x \in \mathbb{R}^n$ contiene constantes arbitrarias, escribir x como una combinación lineal de los vectores x_1, x_2, \dots, x_p , podemos escribir las constantes como: s_1, s_2, \dots, s_p (también se les conoce como parámetros).

- 3) El conjunto de vectores $\{x_1, x_2, \dots, x_p\}$ es una base para el espacio de N_A y la dimensión es p .

Observación. En el paso 1, supongamos que la matriz en forma escalonada reducida por filas, en la cual se ha transformado el sistema $[A : 0]$ tiene r filas no nulas, entonces $p = n - r$, es decir la dimensión de N_A es $\dim(N_A) = n - r$.

Ejemplo 4.7. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ 2 & -1 & 10 \\ 3 & -5 & 1 \end{pmatrix}$$

determinar N_A y $\dim(N_A)$.

Solución 4.7.

Llevamos el sistema $[A : 0]$ a la forma escalonada reducida por filas

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 2 & -1 & 10 & 0 \\ 3 & -5 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \rightarrow -2F_1 + F_2 \\ F_3 \rightarrow -3F_1 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & -2 & -8 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_3 \rightarrow 2F_2 + F_3 \end{array} \\ \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right).$$

Esto implica que la solución del sistema homogéneo $Ax = 0$ es

$$\begin{cases} x - y + 3z = 0 \\ y + 4z = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema homogéneo llegamos a que:

$$\begin{aligned} y &= -4z \\ x &= y - 3z = -4z - 3z = -7z. \end{aligned}$$

Si $z = t$ donde t es un parámetro, $t \in \mathbb{R}$, entonces la solución es $z = t, y = -4t, x = -7t$

$$N_A = \{(x, y, z) = (7t, -4t, t) = t(7, -4, 1) : t \in \mathbb{R}\}.$$

Una base de N_A es el conjunto $B = \{(7, -4, 1)\}$ puesto que $(7, -4, 1)$ genera a N_A , luego la $\dim(N_A) = 1$.

Teorema 4.14. Sea A una matriz de $n \times n$, entonces A es invertible si y sólo si $\dim(N_A) = 0$.

La demostración se deja como ejercicio

Demostración 4.14.

4.5.1. Imagen de una matriz

Sea A una matriz $m \times n$. Entonces la imagen de A , denotada $\text{Imag } A$ esta dada por:

$$\text{Imag}(A) = \{y \in \mathbb{R}^m : Ax = y \text{ para cualquier } x \in \mathbb{R}^n\}.$$

Ejemplo 4.8. $\text{Imag}(A)$ es un subespacio de \mathbb{R}^m .

Solución 4.8.

En efecto. Sean $y_1, y_2 \in \text{Imag}(A)$, entonces existen $x_1, x_2 \in \mathbb{R}^n$ tal que $y_1 = Ax_1, y_2 = Ax_2$

- $A(x_1 + x_2) = Ax_1 + Ax_2 = y_1 + y_2$, luego $y_1 + y_2 \in \text{Imag}(A)$; donde $x_1 + x_2 \in \mathbb{R}^n$.
- $A(\alpha x) = \alpha Ax = \alpha y$, luego $\alpha y \in \text{Imag}(A)$ (existe αx tal que $y = A(\alpha x)$).

Definición 4.7. El rango de una matriz $m \times n$ es $\rho(A) = \dim(\text{Imag}(A))$.

Calcular la imagen de una matriz usando la definición (A) puede ser un poco difícil; veamos algunos resultados que nos pueden ayudar a calcular este conjunto de una forma más sencilla.

Definición 4.8. Sea A una matriz $m \times n$, donde $\{f_1, f_2, \dots, f_m\}$ son las filas de A y $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$ son las columnas de A , entonces se define:

$$R_A = \text{espacio de filas de } A = L(\{f_1, f_2, \dots, f_m\}),$$

es decir, el conjunto generado por las filas de A y

$$C_A = \text{espacio de las columnas de } A = L(\{c_1, c_2, \dots, c_n\}),$$

esto es el conjunto generado por las columnas de A .

R_A es un subespacio de \mathbb{R}^m y C_A es un subespacio de \mathbb{R}^n , esto es fácil de ver.

Teorema 4.15. $C_A = \text{Imag}(A)$, es decir que la imagen de una matriz A es igual al espacio de sus columnas.

Demostración 4.15. Mostremos que $\text{Imag}(A) \subseteq C_A$. Sea $y \in \text{Imag}(A)$, entonces existe un $x \in \mathbb{R}^n$ tal que $y = Ax$, pero Ax se puede expresar como una combinación lineal de las columnas de A .

$$Ax = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \dots + a_{1n}x_n \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \dots + a_{2n}x_n \\ \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \dots + a_{mn}x_n \end{pmatrix},$$

$$y = Ax = x_1 \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix} + \cdots + x_n \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

esto muestra que $y \in C_A$.

Mostremos que $C_A \subseteq \text{Imag}(A)$. Sea $y \in C_A$, entonces $y = \lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_n c_n$, si

$$x = \begin{pmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \\ \vdots \\ \lambda_n \end{pmatrix}, \text{ entonces } y = Ax; \text{ luego } y \in \text{Imag}(A), \text{ es decir } C_A \subseteq \text{Imag}(A).$$

Teorema 4.16. Si A es una matriz de $m \times n$, entonces

$$\dim(R_A) = \dim(C_A) = \dim(\text{Imag}(A)) = \rho(A).$$

Demostración 4.16. Sean c_1, c_2, \dots, c_n las columnas de A . Para determinar la dimensión del espacio generado por las columnas de A , tomamos la ecuación

$$\lambda_1 c_1 + \lambda_2 c_2 + \dots + \lambda_n c_n = 0.$$

Ahora transformando la matriz aumentada $[A : 0]$ de este sistema homogéneo en su forma escalonada reducida por filas. Los vectores correspondientes a las columnas que contienen a los unos principales forman una base para el espacio generado por las columnas de A . Así el rango de las columnas de A es el número de unos principales. Pero este número es igual al número de filas no nulas en forma escalonada reducida por filas, que es equivalente por filas a A , de modo que es el rango por filas de A , así el rango por filas de A es igual al rango por columnas de A .

Ejemplo 4.9. Encuentre una base para $\text{Imag}(A)$ y determine el rango de A $\rho(A)$.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix}.$$

Solución 4.9.

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad R_A = \text{gen}\{(2, -1, 3), \}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & -9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad C_A = \text{gen}\{2, 4, -6\} = \text{Imag}(A),$$

$$\dim(C_A) = \dim(R_A) = 1.$$

Otra forma es ver que $r_2 = 2r_1$ y $r_3 = -3r_1$, luego $C_A = \text{gen}\{r_1\}$, $\dim(C_A) = 1$.

El núcleo se calcula:

$$2x - y + 3z = 0 \Rightarrow y = 2x + 3z,$$

$$N_A = \{(x, y, z) : (x, 2x + 3z, z)\} = \{(x, y, z) : x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1)\}$$

$$N_A = \text{gen}\{(1, 2, 0), (0, 3, 1)\} \quad \nu(A) = 2.$$

Observe que para $A_{3 \times 3}$:

$$\rho(A) + \nu(A) = 1 + 2 = 3.$$

En general tenemos que si A es una matriz $m \times n$, entonces

$$\rho(A) + \nu(A) = n.$$

Es decir, el rango de una matriz A más la nulidad es igual al número de columnas de A .

Ejemplo 4.10. Sea

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 7 & 8 & -5 & -1 \\ 10 & 14 & -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

Calcular el rango y la nulidad de la matriz A .

Solución 4.10. Llevamos la matriz A a la forma escalonada por filas

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & -4 & -5 \\ 7 & 8 & -5 & -1 \\ 10 & 14 & -2 & 8 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_2 \rightarrow -2F_1 + F_2 \\ F_3 \rightarrow -7F_1 + F_3 \\ F_4 \rightarrow -10F_1 + F_4 \end{array} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & -6 & -12 & -22 \\ 0 & -6 & -12 & -22 \end{pmatrix} \begin{array}{l} F_3 \rightarrow -2F_2 + F_3 \\ F_4 \rightarrow -2F_2 + F_4 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -3 & -6 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Como la matriz llevada a la forma escalonada reducida tiene dos filas distintas de cero, entonces

$$\rho(A) = 2 \quad \rho(A) + \nu(A) = n$$

$$2 + \dim(N_A) = 4 \Rightarrow \nu(A) = 2.$$

Si A es una matriz cuadrada de orden $n \times n$, entonces su rango sirve para determinar si la matriz es invertible o no, como lo muestran los siguientes resultados:

Teorema 4.17. *Una matriz A de orden $n \times n$ es invertible si y sólo si $\rho(A) = r = n$.*

Demostración 4.17.

Supongamos que A es invertible, entonces A es equivalente por filas a I_n , luego $\rho(A) = n$. Demostremos la otra implicación. Sea $\rho(A) = n$. Supongamos que A es equivalente por filas a una matriz B en forma escalonada reducida por filas. Entonces $\rho(B) = n$, por lo tanto las filas de A debe ser linealmente independiente, por consiguiente B no tiene filas nulas y como está en su forma escalonada reducida por filas, debe ser I_n . Así que A es equivalente por filas a I_n luego A es invertible.

Teorema 4.18. *Sea A una matriz de orden $n \times n$.*

- a) $\rho(A) = n$ si y sólo si $\det(A) \neq 0$.
- b) El sistema $Ax = b$ tiene solución única si y sólo si $\rho(A) = n$.
- c) El sistema homogéneo $Ax = 0$ tiene solución trivial si y sólo si $\rho(A) = n$.
- d) sea $v = \{v_1, \dots, v_n\}$ un conjunto de n vectores en \mathbb{R}^n y sea A la matriz cuyas filas (columnas) son los vectores de S . Entonces S es linealmente independiente si y sólo si $\det(A) \neq 0$.

Demostración 4.18.

La demostración se deja como ejercicio.

4.6. Cambio de base

Las bases estándar en los espacios vectoriales se usan ampliamente por lo “sencillo” de trabajar con ellas, pero en ocasiones ocurre que es más conveniente trabajar con otras bases. Vamos a ver como cambiar de una base a otra mediante el cálculo de cierta matriz.

Los vectores tiene significados independientes de cualquier elemento particular de las bases independientes de cualquier sistema de coordenadas, pero sus representaciones

dependen enteramente de las bases escogidas.

Sean $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ y $B_2 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$ bases de \mathbb{R}^2 . Es fácil ver que B_1 y B_2 son bases de \mathbb{R}^2 .

Sea $x \in \mathbb{R}^2$, $x = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ es claro que

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = x_1 u_1 + x_2 u_2,$$

esto significa que x está expresado en términos de la base B_1 , esto es $(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$ pero como B_2 es una base de \mathbb{R}^2 , existen constantes c_1, c_2 tal que

$$x = c_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + c_2 \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

esto es, $(x)_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix}$.

Problema Cómo encontrar las constantes c_1 y c_2 ? Para solucionar este problema escribimos los vectores de la base B_1 en términos de la base B_2 .

$$u_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} - \frac{3}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{2}{5} v_1 - \frac{3}{5} v_2 \quad , \quad (u_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -3/5 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix} + \frac{1}{5} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} v_1 + \frac{1}{5} v_2 \quad , \quad (u_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} 1/5 \\ 1/5 \end{pmatrix}.$$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} x = x_1 u_1 + x_2 u_2 &= x_1 (2/5 v_1 - 3/5 v_2) + x_2 (1/5 v_1 + 1/5 v_2) \\ &= v_1 (2/5 x_1 + 1/5 x_2) + v_2 (-3/5 x_1 + 1/5 x_2), \end{aligned}$$

esto implica que

$$\begin{aligned} c_1 &= \frac{2}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \\ c_2 &= \frac{-3}{5} x_1 + \frac{1}{5} x_2 \end{aligned}$$

$$(x)_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 x_1 + 1/5 x_2 \\ -3/5 x_1 + 1/5 x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

A es la matriz de transición de B_1 a B_2 .

Si $(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, entonces

$$(x)_{B_2} = \begin{pmatrix} 2/5 & 1/5 \\ -3/5 & 1/5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2/5 \\ -13/5 \end{pmatrix}.$$

Observemos que $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$, es decir el vector $\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \end{pmatrix}$ en términos de la base B_1 es el mismo.

Generalicemos este concepto

Sean $B_1 = \{u_1, u_2, \dots, u_n\}$ y $B_2 = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ bases de V dimensión n . Sea $x \in V$, entonces

$$x = b_1 u_1 + b_2 u_2 + \dots + b_n u_n; \quad (x)_{B_1} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$$

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n; \quad (x)_{B_2} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}.$$

Demostrar que

$$(x + y)_{B_1} = (x)_{B_1} + (y)_{B_1}; \quad (\alpha x)_{B_1} = \alpha(x)_{B_1}.$$

B_2 es una base, por lo tanto dado u_j en B_1 , se puede ver

$$u_j = a_{1j} v_1 + a_{2j} v_2 + \dots + a_{nj} v_n; \quad (u_j)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1j} \\ a_{2j} \\ \vdots \\ a_{nj} \end{pmatrix},$$

para $j = 1, 2, \dots, n$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{pmatrix} = ((u_1)_{B_2} \ (u_2)_{B_2} \ \dots \ (u_n)_{B_2}).$$

A es de dimensión n y es la matriz de transición de la base B_1 a la base B_2 .

Teorema 4.19. Sean B_1 y B_2 bases de un espacio vectorial de V . Sea A la matriz de transición de B_1 a B_2 . Entonces para todo $x \in V$

$$(x)_{B_2} = A(x)_{B_1}.$$

Demostración 4.19.

Se hizo la demostración para el caso $n = 2$, para cualquier n se hace de manera similar.

Teorema 4.20. Si A es la matriz de transición de B_1 a B_2 , entonces A^{-1} es la matriz de transición de B_2 a B_1 .

Demostración 4.20.

Sea C la matriz de transición de B_2 a B_1

$$(x)_{B_1} = C(x)_{B_2} \quad \text{pero} \quad (x)_{B_2} = A(x)_{B_1}.$$

Por lo tanto

$$(x)_{B_1} = CA(x)_{B_1}$$

$$CA(x)_{B_1} - (x)_{B_1} = (CA - I)(x)_{B_1} = 0$$

para todo $x \in V$, por consiguiente

$$CA - I = 0 \Rightarrow CA = I.$$

Análogamente se demuestra que $AC = I$, luego $C = A^{-1}$.

En resumen un procedimiento para encontrar la matriz de transición de la base canónica a la base $B_2 = \{v_1, \dots, v_n\}$ es:

i) Se escribe la matriz C cuyas columnas sean v_1, \dots, v_n .

ii) Se calcula C^{-1} . Esta es la matriz de transición buscada.

Ejemplo 4.11. Sea $B_1 = \{1, x, x^2\}$ la base canónica en P_2 otra base en P_2 es $B_2 = \{4x - 1, 2x^2 - x, 3x^2 + 3\}$. Si $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2$, escriba $p(x)$ en términos de los polinomios de B_2 .

Solución 4.11.

■ Primero se verifica que B_2 es una base de P_2 , fácil de ver.

$$\blacksquare (4x - 1)_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 0 \end{pmatrix}, (2x^2 - x)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, (3 + 3x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Así, $C = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 3 \\ 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{pmatrix}$ es la matriz de transición de B_2 a B_1 .

Calculando la inversa de C llegamos $A = C^{-1} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_2} = \frac{1}{27} \begin{pmatrix} -3 & 6 & 3 \\ -12 & -3 & 12 \\ 8 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27}(-3a_0 + 6a_1 + 3a_2) \\ \frac{1}{27}(-12a_0 - 3a_1 + 12a_2) \\ \frac{1}{27}(8a_0 + 2a_1 + a_2) \end{pmatrix}$$

$$(a_0 + a_1x + a_2x^2)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_0 \\ a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}.$$

Si $p(x) = 4x^2 - x + 1$, entonces

$$(4x^2 - x + a)_{B_2} = \begin{pmatrix} \frac{1}{27}(-3 - 6 + 12) \\ \frac{1}{27}(-12 + 3 + 48) \\ \frac{1}{27}(8 - 2 + 4) \end{pmatrix}$$

$$(4x^2 - x + 1)_{B_2} = \frac{1}{9}(4x - 1) + \frac{11}{9}(2x^2 - x) + \frac{10}{9}(3x^2 + 3) = \begin{pmatrix} 1/9 \\ 11/9 \\ 10/27 \end{pmatrix}.$$

Ejemplo 4.12. Sean x, y un conjunto de ejes coordenados con origen en $(0, 0)$ y sea x', y' un segundo conjunto de ejes coordenados con el mismo origen pero girados o rotados en un ángulo agudo alrededor del origen.

Qué relación existe entre las coordenadas $P(x, y)$ y las coordenadas $P'(x', y')$?

Se deja como ejercicio hacer el gráfico de nuestra situación y ver que se forman dos triángulos rectángulos, y por consiguiente obtenemos las ecuaciones

$$\begin{aligned} x' &= r \cos \theta & x &= r \cos(\theta + \phi) \\ y' &= r \sin \theta & y &= r \sin(\theta + \phi), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} x &= r \cos(\theta + \phi) &= r(\cos \theta \cos \phi - \sin \theta \sin \phi) \\ &= r \cos \theta \cos \phi - r \sin \theta \sin \phi \\ x &= x' \cos \phi - y' \sin \phi. \end{aligned}$$

Análogamente se muestra

$$y = x' \sin \phi - y' \cos \phi$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix}.$$

Sabemos que si A es una matriz 2×2 invertible, entonces su inversa se puede calcular fácilmente, esto es,

$$\text{si } A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}, \text{ entonces } A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{pmatrix} d & -b \\ -c & a \end{pmatrix}.$$

Ahora, para nuestro ejemplo, tenemos

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -\sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = A^{-1} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de x, y de los vectores de la base $i = (1, 0), j = (0, 1)$ son:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi \\ \sin \phi \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \phi & -\sin \phi \\ \sin \phi & \cos \phi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin \phi \\ \cos \phi \end{pmatrix}.$$

Si $\theta = 45^\circ$, entonces

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \cos 45^\circ & -\sin 45^\circ \\ -\sin 45^\circ & \cos 45^\circ \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Esto implica:

$$\begin{aligned} x' &= \frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y \\ y' &= -\frac{\sqrt{2}}{2}x + \frac{\sqrt{2}}{2}y. \end{aligned}$$

Supongamos que tenemos la función $y = \frac{1}{x}$ en el plano xy , esta función en el plano $x'y'$ es

$$\frac{(x')^2}{4} - \frac{(y')^2}{4} = 1,$$

es fácil verificar esta ecuación, la cual es una hipérbola. Es decir, $xy = 1$ es una hipérbola rotada 45° .

4.7. Ejercicios resueltos del capítulo 4

Ejercicio 4.1. Sea $W = \{a + bx + cx^2 : a - b + c = 0\} \subset P_2(x)$ donde $P_2(x)$ es el conjunto de todos los polinomios de grado menor o igual a dos. Demuestre que W es un subespacio vectorial de $P_2(x)$ y encuentre una base.

Solución 4.1.

Sean $P(x) = a_1 + b_1x + c_1x^2$ y $q(x) = a_2 + b_2x + c_2x^2$ dos polinomios en W , entonces

$$a_1 - b_1 + c_1 = 0 \quad y \quad a_2 - b_2 + c_2 = 0,$$

sumando las dos ecuaciones obtenemos

$$a_1 + a_2 - b_1 + b_2 + c_1 + c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad a_1 + a_2 - (b_1 + b_2) + c_1 + c_2 = 0$$

luego si $a_2 + a_2 = c_3$ y $b_1 + b_2 = b_3$, $c_1 + c_2 = c_3$.

- $Z(x) = P(x) + q(x) = a_3 + b_3x + c_3x^2 \in W$.
- $\lambda P(x) = \lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2$, $\lambda a - \lambda b + \lambda c = \lambda(a - b + c) = \lambda 0 = 0$.

Encontremos una base de W :

$P(x) = a + bx + cx^2 \in W$ donde

$$a - b + c = 0 \Rightarrow a = b - c,$$

$$P(x) = (b - c) + bx + cx^2 = b(1 + x) + c(x^2 - 1)$$

todo polinomio de $P(x) \in W$ es combinación lineal de $\{1 + x, x^2 - 1\} = S$, S es linealmente independiente.

$$c_1(1 + x) + c_2(x^2 - 1) = 0$$

$$c_1 + c_1x + c_2x^2 - c_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad c_1 - c_2 + c_1x + c_2x^2 = 0$$

esto implica $c_1 = 0$, $c_2 = 0$ y $c_3 = 0$, luego S es linealmente independiente. Por lo tanto $S = \{1 + x, x^2 - 1\}$ es una base de W y $\dim(W) = 2$.

Ejercicio 4.2. Sean $W = L\{(1, 2, 1), (0, 1, 2)\}$ y $U = \{(x, y, z) : x - 2y + z = 0\}$ dos subespacios de \mathbb{R}^3 . Halle $U \cap W$, una base de $U \cap W$ y la dimensión de $U \cap W$.

Solución 4.2.

Sean $(x, y, z) \in U \cap W$, entonces $(x, y, z) \in U$ y $(x, y, z) \in W$, como $(x, y, z) \in U$, entonces existen escalares λ y β tales que

$$(x, y, z) = \lambda(1, 2, 1) + \beta(0, 1, 2) = (\lambda, 2\lambda + \beta, \lambda + 2\beta)$$

así que

$$x = \lambda \quad z = \lambda + 2\beta \quad y = 2\lambda + \beta.$$

Como $(x, y, z) \in W$, entonces $x - 2y + z = 0$, reemplazando los valores anteriores en la expresión $x - 2y + z = 0$, obtenemos

$$\lambda - 2(2\lambda + \beta) + \lambda + 2\beta = 0 \Rightarrow -2\lambda = 0 \Rightarrow \lambda = 0$$

y β es arbitrario, por lo tanto

$$(x, y, z) = (0, \beta, 2\beta) = \beta(0, 1, 2) \quad \beta \in \mathbb{R}$$

de donde

$$U \cap W = \{\beta(0, 1, 2) : \beta \in \mathbb{R}\} = L\{(0, 1, 2)\}.$$

Como $L\{(0, 1, 2)\}$ es l.i y genera, entonces es una base de $U \cap W$ y $\dim(U \cap W) = 1$.

Ejercicio 4.3. Sea W un subespacio de \mathbb{R}^3 generado por los vectores $v_1 = (1, 2, 1)$ y $v_2 = (4, -1, -2)$, $v_3 = (2, 1, 0)$ y $v_4 = (1, -1, 1)$. Demuestre que el conjunto $\{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ es l.d.Cuál es la dimensión de W ?

Solución 4.3.

a) Los vectores v_1, v_2, v_3, v_4 son l.d. si existen escalares no todos ceros tales que

$$a(1, 2, 1) + b(4, -1, -2) + c(2, 1, 0) + d(1, -1, -1) = (0, 0, 0),$$

$$\begin{cases} a + 4b + 2c + d = 0 \\ 2a - b + c - d = 0 \\ a - 2b - d = 0. \end{cases}$$

Resolviendo el sistema llegamos a que el sistema tiene infinitas soluciones. Luego los vectores son l.d.

Observación. (a) $\dim(W) \leq \dim(\mathbb{R}^3) = 3$ y W está generado por 4 vectores, luego estos vectores tienen que ser linealmente dependientes.

(b) Para determinar la dimensión de W , debemos hallar el conjunto de vectores de W que lo generan y que son linealmente independientes. Como ya se tiene que W es generado por v_1, v_2, v_3 , y v_4 estos vectores son l.d, entonces podemos extraer del conjunto $B = \{v_1, v_2, v_3, v_4\}$ un subconjunto que sea l.i y que genere a W .

Si consideramos todos los subconjuntos de B con tres elementos, llegamos a que ninguno es l.i, puesto que sus determinantes son ceros

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ 1 & -2 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 3 \begin{vmatrix} 1 & 4 & 2 \\ 0 & -3 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 0 & -9 & -3 \\ 0 & -6 & -2 \end{vmatrix} = 0 \quad ; \quad \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 2 \end{vmatrix} = 0$$

$$\begin{vmatrix} 4 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 6 & 0 & 3 \\ -1 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 0.$$

Si consideramos los subconjuntos de B con dos elementos, observamos por ejemplo que $\{v_1, v_5\}$ son l.i, puesto que no existe un $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que

$$v_1 = (1, 2, 1) = \lambda(2, 1, 0) = \lambda v_3.$$

Como

$$\begin{aligned} v_2 &= -2(1, 2, 1) + 3(2, 1, 0) \\ v_4 &= -1(1, 2, 1) + 1(2, 1, 0), \end{aligned}$$

entonces $v_2, v_4 \in L\{(1, 2, 1), (2, 1, 0)\}$ así que $W = L((1, 2, 1), (2, 1, 0))$ es una base de W y $\dim(W) = 2$.

Ejercicio 4.4. Demostrar: sean $v_1, v_2, \dots, v_n, v_{n+1}$ $n+1$ vectores en un espacio vectorial V , si v_1, \dots, v_n generan a V , entonces v_1, \dots, v_n, v_{n+1} también generan a V

Solución 4.4. Sea $x \in V \Rightarrow x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n + 0 v_{n+1}$ luego $\{v_1, \dots, v_n, v_{n+1}\}$ generan a V .

Ejercicio 4.5. Sean E un espacio vectorial y $a_1, \dots, a_n, a_{n+1}, b$ un subconjunto de E . Si $b \in L\{a_1, \dots, v_{k+1}\}$ y $b \notin L\{a_1, \dots, a_k\}$ demuestre que $a_{k+1} \in L\{a_1, \dots, a_k, b\}$.

Solución 4.5.

Si $b \in L\{a_1, \dots, v_{k+1}\}$, entonces $b = c_1 a_1 + \dots + c_k a_k + c_{k+1} a_{k+1}$ despejando a_{k+1} obtenemos

$$\frac{b - c_1 a_1 - \dots - c_k a_k}{c_{k+1}} = a_{k+1} \neq 0,$$

luego $a_{k+1} \in \{b, a_1, \dots, a_k\}$.

Ejercicio 4.6. Si $\{x, y, z\}$ es un subconjunto l.i de un espacio vectorial, demuestre que los conjuntos $\{x + y - z, y + z, 2x\}$, $\{x + 2y + 3z, 2x, 2y + 3z - x\}$ son l.i

Solución 4.6.

$$a(x + y - z) + b(y + z) + c(2x) = 0; \quad a + 2c = 0$$

$$ax + ay - az + by + bz + 2cx = 0; \quad a + b = 0$$

$$x(a + 2c) + y(a + b) + z(b - a) = 0; \quad b - a = 0.$$

Resolviendo el sistema, llegamos a que $a = b = c = 0$.

Análogamente se demuestra que $\{x + 2y + 3z, 2x, 2y + 3z - x\}$ es l.i.

Ejercicio 4.7. Sea V un espacio vectorial de dimensión n y los $\{a_1, \dots, a_n\} = A$ un subconjunto con n elementos. Demuestre que los enunciados siguientes son equivalentes:

- 1) A es una base .
- 2) A es l.i.
- 3) A genera a V .

Solución 4.7.

$1 \Rightarrow 2$ es obvio. Mostremos que $2 \Rightarrow 3$.

Sea $v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in V$ mostremos que

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = c_1 a_1 + c_2(a_0 + \dots + c_n a_n) \Rightarrow \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} B,$$

donde a_1, \dots, a_n son las columnas de B .

Como $\det(B) \neq 0$ por ser a_1, \dots, a_n l.i, entonces el sistema anterior tiene solución única, luego el conjunto A genera a V .

Ejercicio 4.8. Dada la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix}.$$

Halle una base y la dimensión del espacio fila de A la cual la denotamos por R_A el espacio columna de A , denotado por C_A y el espacio nulo de A , denotado por N_A .

Solución 4.8.

(a) Recordemos que $N_A = \{x \in \mathbb{R}^4 : Ax = 0\}$ y $v(A) = \dim(N_A)$

$$R_A = \text{gen}\{(1, -1, 2, 3), (0, 1, 4, 3), (1, 0, 6, 5)\}$$

$$C_A = \text{gen}\{(1, 0, 1), (-1, 1, 0), (2, 4, 6), (3, 3, 5)\}.$$

También sabemos que

$$\dim(R_A) = \dim(C_A) = \text{rango de } A$$

Rango de A + Nulidad de $A = 4$.

Encontramos el rango de A , resolviendo el sistema $Ax = 0$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & 6 & 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \rightarrow F_3 - F_2} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De la matriz A llevada a la forma escalonada se llega a que

$$\text{Rango de } A = \dim(C_A) = \dim(R_A) = 3,$$

luego las filas de A son linealmente independientes y constituyen una base de R_A .

(b) Como $\dim(R_A) = \dim(C_A) = \rho(A) = 3$, entonces hay tres columnas de A que son linealmente independientes, ellas son

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix}, \text{ por lo tanto } \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ 3 \\ 5 \end{pmatrix} \right\} \text{ es una base de } C_A.$$

(c) Como la nulidad de A viene dada por

$$\begin{aligned} \dim(N_A) + \text{rango de } A &= 4 \\ \dim(N_A) &= 4 - 3 = 1, \end{aligned}$$

Entonces N_A está generado por un vector, que además es linealmente independiente. La solución $Ax = 0$ es

$$\begin{aligned} x - y + 2z + 3w &= 0 \\ y + 4z + 3w &= 0 \\ -w &= 0. \end{aligned}$$

De la última ecuación llegamos a que $w = 0$, luego

$$x - y + 2z = 0$$

$$y + 4z = 0$$

resolviendo el sistema, obtenemos $x = -6z$ y $y = -4z$ donde $z \in \mathbb{R}$.

$$(x, y, z, w) = (-z, -4z, z, 0) = z(-6, -4, 1, 0); \quad z \in \mathbb{R}.$$

Luego $N_A = \text{gen}\{(-6, -4, 1, 0)\}$ y $\{(-6, -4, 1, 0)\}$ es una base de N_A .

Ejercicio 4.9. Determine si la matriz $A = \begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix}$ es una combinación lineal de las matrices

$$B = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix}, C = \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix}.$$

Solución 4.9.

Para que A sea una combinación lineal de B y C , deben existir constantes λ y β tales que

$$\begin{aligned} A &= \lambda B + \beta C \\ A &= \lambda \begin{bmatrix} -1 & 0 & 4 \\ 1 & 1 & 5 \end{bmatrix} + \beta \begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ -2 & 3 & -6 \end{bmatrix} \\ A &= \begin{bmatrix} -\lambda & \beta & 4\lambda - 2\beta \\ \lambda - 2\beta & \lambda + 3\beta & 5\lambda - 6\beta \end{bmatrix} \\ \lambda \begin{bmatrix} -3 & 2 & 8 \\ -1 & 9 & 3 \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} -\lambda & \beta & 4\lambda - 2\beta \\ \lambda - 2\beta & \lambda + 3\beta & 5\lambda - 6\beta \end{bmatrix}. \end{aligned}$$

Igualando constantes, llegamos a:

$$\begin{cases} -3 = -\lambda \\ 2 = \beta \\ 8 = 4\lambda - 2\beta \\ -1 = \lambda - 2\beta \\ 9 = \lambda + 3\beta \\ 3 = 5\lambda - 6\beta. \end{cases}$$

De la dos primeras ecuaciones se tiene que $\lambda = 3$ y $\beta = 2$, las otras 4 ecuaciones también se satisfacen para estos valores de λ y β , por lo tanto A es una combinación lineal de B y C .

Ejercicio 4.10. Sea $P = \{a_1x + a_0 : a_1, a_0 \text{ son números complejos}\}$ P consta de todas las “rectas complejas” tomamos como base $B = \{1, x\}$ y como base $B_1 = \{1, x+i\}$. Determinar la matriz de cambio de base un vector en P de la base B_1 a la nueva base B y de B a B_1 .

Solución 4.10.

Escribimos lo elementos de la base B_1 en términos de la base B .

$$\begin{aligned} 1 &= 1 \cdot 1 + 0 \cdot x \\ x + i &= i \cdot 1 + 1 \cdot x. \end{aligned}$$

Así que la matriz es $A = \begin{pmatrix} 1 & i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ matriz cambio de base de B_1 , a B y la matriz de B a B_1 es la inversa de A , la cual la denotamos por A^{-1} y viene dada por

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sea $p(x) = i + ix \in P$. Este polinomio lineal con coeficientes complejos en la base $B = \{1, x\}$ tiene coordenadas (i, i) , en la base $\{1, x + i\}$ tiene coordenadas $(1 + i, i)$ puesto que

$$\begin{pmatrix} 1 & -i \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} i \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i - i^2 \\ i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} i + 1 \\ i \end{pmatrix} \quad i^2 = -1.$$

4.8. Ejercicios del capítulo 4

- 1) Decidir si el conjunto dado junto con las operaciones indicadas de suma y multiplicación por un escalar es o no un espacio vectorial.

- a) El conjunto \mathbb{R}^2 con la multiplicación escalar usual, pero con la suma definida así:

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle y_1 + y_2, x_1 + x_2 \rangle.$$

- b) El conjunto \mathbb{R}^2 con la multiplicación escalar usual, y la suma definida como:

$$\langle x_1, y_1 \rangle + \langle x_2, y_2 \rangle = \langle x_1 + x_2 + 1, y_1 + y_2 + 1 \rangle.$$

- c) El conjunto del numeral (b) pero con la multiplicación por escalar definida como:

$$\alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha + \alpha x - 1, \alpha + \alpha y + 1 \rangle.$$

- d) El conjunto de números reales positivos con la suma y la multiplicación por escalar definidos como:

$$xy = xy, \quad \alpha x = x^\alpha.$$

- e) El conjunto \mathbb{R}^2 con la suma usual y la multiplicación por un escalar definido como: $\alpha \langle x, y \rangle = \langle 0, 0 \rangle$.

- f) El conjunto de todas las matrices 2×2 con entradas reales con la multiplicación por un escalar usual y la suma definida como:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} e & f \\ g & h \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a+e & 0 \\ 0 & d+h \end{bmatrix}.$$

- 2) Determine si el subconjunto H del espacio vectorial V es un subespacio de V con la suma y producto escalar usuales para cada caso.

- a) $V = \mathbb{R}^2$ y $H = \{(x, y) : y = 2x\}$.

- b) $V = \mathbb{R}^2$ y $H = \{(x, y) : y = 2x + 1\}$.

- c) $V = M_{2 \times 2}$ (conjunto de matrices 2×2) y $H = \left\{ A \in M_{2 \times 2} : A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & c \end{pmatrix} \right\}$.

- d) $V = M_{2 \times 2}$ y $H = \left\{ A \in M_{2 \times 2} : A = \begin{pmatrix} a & 1+a \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right\}$.

- e) $V = C[a, b]$ (conjunto de las funciones continuas en $[a, b]$) y $H = \left\{ f \in C[a, b] : \int_a^b f(x) dx = 0 \right\}$.

- f) $V = C[a, b]$ y $H = \left\{ f \in C[a, b] : \int_a^b f(x)dx = 2 \right\}$.
- g) $V = P_n$ (Conjunto de polinomios de grado menor o igual que n) y
 $H = \{p \in P_n : p(0) = 0\}$.
- h) $V = P_n$ y $H = \{p \in P_n : p(0) = 1\}$.
- i) $V = \mathbb{R}^m$ y $H = \{x \in \mathbb{R}^m : Ax = 0\}$ donde A es una matriz $n \times m$.
- j) $V = F$ (F es el conjunto de todas las funciones reales definidas en \mathbb{R}) y
 $H = \{f \in F : f''(x) + 5f(x) = 0\}$.

3) Determine si los subconjuntos dados son subespacios de \mathbb{R}^3 .

- a) El conjunto de todos los vectores de la forma $(x, y, 0)$.
- b) El conjunto de los vectores (x, y, z) que cumplen $z = 3x + y$.
- c) El conjunto de todos los vectores de la forma $(x, 3, z)$.
- d) El conjunto de todos los vectores (x, y, z) que satisfacen $x + 3y + z = 2$.

4) Sean v_1, v_2 y v_3 tres vectores en \mathbb{R}^3 . Demuestre que

$$H = \{V : V = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \alpha_3 v_3 \quad \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \text{ números reales} \}$$

es un subespacio de \mathbb{R}^3 .

5) Exprese (si es posible) el vector v como combinación lineal de los vectores v_1, v_2 y v_3 en cada caso.

a) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$.

c) $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -2 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3/2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

d) $v = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 6 & -12 \end{pmatrix}, v_1 = \begin{pmatrix} 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -3 & 8 \end{pmatrix}, v_3 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$.

e) $v = x^2 + 6x - 1, v_1 = 2, v_2 = 1 + x, v_3 = 3x + x^2$.

- 6) Determine si el conjunto de vectores genera el espacio vectorial dado. Si no lo genera encuentre el espacio generado por los vectores. Dé dos vectores particulares de ese espacio.

a) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^2.$

b) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^2.$

c) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^2.$

d) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^3.$

e) $\left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, V = \mathbb{R}^3.$

f) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} V = M_{2 \times 2}.$

g) $\left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 5 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \right\} V = M_{2 \times 2}.$

h) $\{1, 1 + x, 1 + x^2\}, V = P_2.$

i) $\{x, x^3\}, V = P_3.$

- 7) Determine si el conjunto de vectores es una base para el espacio vectorial dado:

a) $V = \mathbb{R}^2, \{v_1, v_2, v_3\}$, los vectores del numeral 5(a).

b) $V = \mathbb{R}^3, \{v_1, v_2, v_3\}$, los vectores del numeral 5(b).

c) $V = M_{2 \times 2}, \{v_1, v_2, v_3\}$, del numeral 5(d).

d) $V = P^2, \{v_1, v_2, v_3\}$, del numeral 5(e).

e) $V = M_{2 \times 2}$, conjunto del numeral 6(f).

f) $V = M_{2 \times 2}$, conjunto del numeral 6(g).

g) $V = P_2$, conjunto del numeral 6(h).

h) $V = P_3$, conjunto del numeral 6(i).

8) ¿Para qué valores de α serán linealmente dependientes los vectores $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 4 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ \alpha \\ 4 \end{pmatrix}$?

9) ¿para qué valores de α el conjunto de vectores $\{(\alpha, 1, 0), (1, 0, \alpha), (1 + \alpha, 1, \alpha)\}$ constituye una base para \mathbb{R}^3 ?

10) Encuentre una base para el subespacio H de \mathbb{R}^3 y determine la dimensión en cada caso.

a) $H = \{(x, y, z) : x + y = 0\}.$

b) $H = \{(x, y, z) : 2x - y = z\}.$

c) $H = \{(x, y, z) : \frac{x}{2} = \frac{y}{3} = \frac{z}{4}\}.$

11) Encuentre una base para el espacio solución del sistema homogéneo dado.

a)
$$\begin{cases} -5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 - 8x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 - 5x_3 = 0. \end{cases}$$

b)
$$\begin{cases} 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0 \\ 2x_1 + x_2 + 2x_3 = 0 \\ 4x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 0. \end{cases}$$

12) Sea $V = M_{3 \times 3}$ el espacio de las matrices con entradas (o componentes) reales 3×3 .

a) Demuestre que $H = \{A \in V : A \text{ es simétrica}\}$ tiene dimensión 6.

b) Halle la dimensión del subespacio H , donde:

$$H = \{A \in V : a_{ij} = 0 \text{ si } i + j \text{ es impar}\}.$$

Transformaciones lineales

En muchos modelos matemáticos se estudia un grupo amplio de funciones cuyos dominios y recorridos son espacios lineales, los cuales satisfacen que la imagen de una suma es la suma de las imágenes, y la imagen de un múltiplo de x es el múltiplo por la imagen de x . Tales funciones se llaman transformaciones lineales.

Definición 5.1. Sean V y W dos espacios vectoriales sobre \mathbb{K} . Una función $T : V \rightarrow W$ es lineal si satisface las siguientes propiedades:

- a) $T(x + y) = T(x) + T(y)$ para todo $x, y \in V$.
- b) $T(\lambda x) = \lambda T(x)$ para todo $x \in V$ y $\lambda \in \mathbb{K}$.

Observación

- a) Las propiedades de linealidad se pueden resumir de la siguiente manera

$$T(ax + by) = aT(x) + bT(y).$$

- b) Si T es lineal, entonces $T(0_v) = 0_w$.

En efecto:

$$T(0_v + 0_v) = T(0_v) + T(0_v) = T(0_v)$$

luego

$$T(0_v) = T(0_v) - T(0_v) = 0_w.$$

Ejemplo 5.1. Las siguientes funciones son transformaciones lineales:

Solución 5.1.

- a) $T : V \rightarrow V; T(x) = x$, transformación idéntica.
- b) $T : V \rightarrow V; T(x) = 0_v$, transformación cero.

c) $T : V \rightarrow V; T(x) = cx, c \in \mathbb{K}; x \in V$.

d) Sea V el conjunto de todas las funciones integrables en $[a, b]$, $W = \mathbb{R}$

$$T : V \rightarrow \mathbb{R}; T(f) = \int_a^b f(x)dx \text{ es lineal.}$$

En efecto,

$$\begin{aligned} i) T(f + g) &= \int_a^b (f(x) + g(x))dx = \int_a^b f(x)dx + \int_a^b g(x)dx \\ &= T(f) + T(g) \\ ii) T(\lambda f) &= \int_a^b \lambda f(x)dx = \lambda \int_a^b f(x)dx \\ &= \lambda T(f). \end{aligned}$$

e) Sea $T : M_{m \times n} \rightarrow M_{n \times m}$ definida por $T(A) = A^T$. Es fácil ver que T es lineal porque $(A + B)^T = A^T + B^T$ y $(\lambda A)^T = \lambda A^T$ (propiedades de la matriz transpuesta).

f) Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ donde cada vector (x, y) rota un ángulo θ y se obtiene un nuevo vector (x', y') donde

$$\begin{aligned} x' &= x \cos \theta - y \sin \theta \\ y' &= x \sin \theta + y \cos \theta. \end{aligned}$$

Este vector se puede escribir como

$$\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

Esta transformación lineal se llama transformación lineal de rotación.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos \theta & -\sin \theta \\ \sin \theta & \cos \theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

g) Sea $V = \mathbb{R}^n$ y $W = \mathbb{R}^m$ espacio vectorial sobre \mathbb{R} . $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por

$$T(x_1, \dots, x_n) = (y_1, \dots, y_m)$$

donde $y_i = \sum_{k=1}^n a_{ik}x_k$ $i = 1, 2, \dots, m$ los a_{ik} son números dados. Claramente T es una transformación lineal.

- h) Sean V el espacio de todas las funciones reales derivables en (a, b) y W el conjunto de todas las derivadas.

$T : V \rightarrow W$ definida por $T(f) = f'$. Por la propiedades de la derivada T es lineal.

- i) Sea $\mathcal{L}(V, W)$ el conjunto de todas las funciones lineales de V en W

$\mathcal{L}(V; W)$ es un espacio vectorial sobre \mathbb{K} .

En efecto sean T y T' transformaciones lineales de V en W si $T'' = T + T'$

■

$$\begin{aligned} T''(x + y) &= T(x + y) + T'(x + y) = T(x) + T(y) + T'(x) + T'(y) \\ &= (T(x) + T'(x)) + (T(y) + T'(y)) = T''(x) + T''(y). \end{aligned}$$

■

$$\begin{aligned} T''(\alpha x) &= T(\alpha x) + T'(\alpha x) = \alpha T(x) + \alpha T'(x) \\ &= \alpha(T(x) + T'(x)) = \alpha T''(x). \end{aligned}$$

Luego T'' es lineal. Si $T' = aT$ donde $T \in \mathcal{L}(V; W)$ y $a \in \mathbb{K}$, entonces:

- $T(x + y) = aT(x + y) = a(T(x) + T(y)) = aT(x) + aT(y) = T'(x) + T'(y)$
- $T'(\alpha x) = aT(\alpha x) = \alpha aT(x) = \alpha T'(x)$ luego $T' = aT$ es lineal.

- j) La composición de funciones lineales es función lineal. En efecto, sean U, V, W espacios vectoriales sobre \mathbb{K} y

$$R : U \rightarrow V, \quad S : V \rightarrow W,$$

transformaciones lineales, probemos que $T \circ R$ es lineal.

■

$$\begin{aligned} T(x + y) &= (S \circ R)(x + y) = S(R(x + y)) = S(R(x) + R(y)) \\ &= S(R(x)) + S(R(y)) = T(x) + T(y). \end{aligned}$$

■

$$T(\lambda x) = (S \circ R)(\lambda x) = S(R(\lambda x)) = S(\lambda R(x)) = \lambda S(R(x)) = \lambda T(x).$$

Teorema 5.1. Toda transformación lineal esta completamente determinada por los vectores de la bae. Es decir, si $B = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base de V y y_1, y_2, \dots, y_n son vectores de W , entonces, existe una y sólo una transformación $T : V \rightarrow W$ tal que $T(v_i) = y_i$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

Demostración 5.1.

Como B es una base de V , entonces todo $x \in V$ se puede escribir como combinación lineal de la base B , esto es,

$$x = c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n$$

para todo $c_i \in \mathbb{K}$. Esto implica que

$$\begin{aligned} T(x) &= T(c_1 v_1 + c_2 v_2 + \dots + c_n v_n) \\ &= c_1 T(v_1) + c_2 T(v_2) + \dots + c_n T(v_n) = \sum_{i=1}^n c_i T(v_i). \end{aligned}$$

Mostremos que T es lineal. Sean c_i y d_i las componentes de x y y en la base B .

■

$$T(x+y) = \sum_{i=1}^n (c_i + d_i) v_i = \sum_{i=1}^n c_i v_i + \sum_{i=1}^n d_i v_i = T(x) + T(y)$$

■

$$T(\lambda x) = \sum_{i=1}^n (\lambda c_i) v_i = \lambda \sum_{i=1}^n c_i v_i = \lambda T(x).$$

Mostremos la unicidad de T .

Si T_1 es otra transformación lineal, tal que $T_1(v_i) = y_i$, entonces $T_1 = T$, puesto que si $x \in V$, esto implica que $x = \sum_{i=1}^n c_i v_i$, por lo tanto

$$T_1(x) = T_1\left(\sum_{i=1}^n c_i v_i\right) = \sum_{i=1}^n c_i T_1(v_i) = \sum_{i=1}^n c_i y_i = T(x).$$

Ejemplo 5.2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ y suponga que

$$T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \end{pmatrix} \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix}, \quad y \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Calcule $T = \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix}$.

Solución 5.2. Como $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ es una base de \mathbb{R}^3 , entonces

$$\begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} = 3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando T en ambos lados

$$\begin{aligned} T \begin{pmatrix} 3 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} &= T \left(3 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right) = 3T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} - 4T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 5T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= 3 \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix} - 4 \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \end{pmatrix} + 5 \begin{pmatrix} 5 \\ -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6 \\ 9 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 4 \\ -16 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 25 \\ -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 35 \\ -22 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Ejemplo 5.3. Encuentre una transformación lineal de \mathbb{R}^2 en el plano

$$W = \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} : 2x - y + 3z = 0 \right\}.$$

Solución 5.3.

Encontramos una base de W

$$2x - y + 3z = 0 \Rightarrow y = 2x + 3z.$$

Todo punto de W se escribe de la siguiente manera

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3z \\ z \end{pmatrix} = x \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + z \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Una base para W es $B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Una base de \mathbb{R}^2 puede ser la estandar $B_1 = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.

Definimos $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$, hallemos $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$.

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Aplicando T en ambos lados, obtenemos

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} &= T\left(x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = xT\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + yT\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \\ &= x\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3y \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3y \\ y \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

es decir $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow W$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x + 3y \\ y \end{pmatrix}$.

5.1. Núcleo y recorrido

Sea T una transformación lineal de V en W . Definimos los siguientes conjuntos

- $N(T) = \{x \in V : T(x) = 0_w\}$.
- $Imag(T) = \{y \in w : T(x) = y \text{ para algún } x \in V\}$.

Teorema 5.2. *Los conjuntos $N(T)$ y $Imag(T)$ son subespacios ($N(T) \subseteq V$ e $Imag(T) \subseteq W$).*

Demostración 5.2.

- Sea $x, y \in N(T) \Rightarrow T(x) = 0$ y $T(y) = 0$,

$$T(x + y) = T(x) + T(y) = 0 + 0 = 0 \Rightarrow x + y \in N(T).$$

- $T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha \cdot 0 = 0 \Rightarrow \alpha x \in N(T)$, luego $N(T)$ es un subespacio de V .
- Sean $y_1 = T(x_1)$ y $y_2 = T(x_2)$ vectores de $Imag(T)$,

$$y_1 + y_2 = T(x_1) + T(x_2) = T(x_1 + x_2) \in Imag(T) \text{ puesto que } x_1 + x_2 \in V.$$

- $\alpha y \in Imag(T)$ puesto que $T(\alpha x) = \alpha T(x) = \alpha y$.

Ejemplo 5.4. Calcule el núcleo de las siguientes transformaciones:

- $T(x) = x$
- $T(f) = f'$.

Solución 5.4.

- $N(T) = \{x \in V : T(x) = 0\} = \{x \in V : x = 0\} = \{0\}$.
- $N(T) = \{f \in D(I, \mathbb{R}) : f' = 0\} = \{f \in D(I, \mathbb{R}) : f = \text{constante}\}$.

Ejemplo 5.5. Sea A una matriz $m \times n$ y $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ definida por $T(x) = Ax$ es fácil ver que T es lineal.

Solución 5.5.

Se deja como ejercicio.

Veremos ahora que toda transformación lineal de \mathbb{R}^n en \mathbb{R}^m tiene asociada una matriz A $m \times n$ tal que $T(x) = Ax$ para todo $A \in \mathbb{R}^n$.

Este hecho nos permite calcular $\text{Imag}(T) = R_A = \text{Imag}(A)$ y $N(T) = N_A$, además de $\rho(T) = \rho(A)$ y $\nu(T) = \nu(T)$.

Teorema 5.3. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$ una transformación lineal, entonces existe una matriz única de $m \times n$ A_T tal que $T(x) = A_T x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostración 5.3. Sea $T(e_1) = w_1, T(e_2) = w_2, \dots, T(e_n) = w_n$ donde e_1, \dots, e_n es la base canónica de \mathbb{R}^n . Sea A_T la matriz cuyas columnas son w_1, \dots, w_n , definidas

$$w_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} \quad i = 1, \dots, n$$

$$A_T e_i = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & & & \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mi} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix} = w_i.$$

Esto significa que T y A_T coinciden en las bases, esto es $T(e_i)$ y $A_i e_i$ son iguales en las bases, por lo tanto son iguales en todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demostremos la unicidad.

Supongamos que $T(x) = A_T x$ y $T(x) = B_T x$ para todo $x \in \mathbb{R}^n$, entonces

$$(A_T - B_T)x = 0, \quad C_T x = 0, \quad C_T = A_T - B_T$$

en particular si $x = e_i$, entonces $C_T e_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n$ pero $C_T e_i$ es la columna i -ésima de C_T , por lo tanto $C_T = 0$ luego $A_T = B_T$.

Observación. Calcular la imagen de una transformación lineal es más complicado, necesitamos algunos resultados que involucran transformaciones con matrices. Si $T(x) = A_T x$, A_T se llama matriz de transformación, esta matriz se calcula usando las bases estándar de \mathbb{R}^n .

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = w_1, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = w_2, \quad \dots, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} = w_n, \quad A_T = (w_1, w_2, \dots, w_n),$$

donde $w_i \in \mathbb{R}^m$. Con esta observación es fácil comprender el siguiente teorema.

Teorema 5.4. Sea A la matriz de transformación correspondiente a la transformación lineal T , entonces

- i) $\text{Imag}(T) = \text{Imag}(A) = C_{A_T}$.
- ii) $\rho(T) = \rho(A_T)$.
- iii) $N(T) = N(A_T)$.
- iv) $\nu(T) = \nu(A_T)$.
- v) $\rho(A_T) + \nu(A_T) = \rho(T) + \nu(T) = n$.

Demostración 5.4. La demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo 5.6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ definida por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - y - z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

Encuentre A_T , $N(T)$, $\nu(T)$ y $\rho(T)$.

Solución 5.6.

Sean

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix},$$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} : T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - y \\ y + z \\ 2x - y - z \\ -x + y + 2z \end{pmatrix}.$$

Llevando A_T a la forma escalonada

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$\rho(A_T) = 2$ el número de filas diferentes de cero $n = 3$.

$$\nu(T) = 3 - \rho(T) = 3 - 3 = 0, \quad N(T) = \{0\}$$

$$\text{Imag}(T) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}.$$

Ejemplo 5.7. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida por

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x - y + 3z \\ 4x - 2y + 6z \\ -6x + 3y - 9z \end{pmatrix}.$$

Calcular A_T y la imagen de A_T .

Solución 5.7.

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 3 \\ 4 & -2 & 6 \\ -6 & 3 & 9 \end{pmatrix},$$

$$A_T = \begin{pmatrix} 2 & 4 & -6 \\ -1 & -2 & 3 \\ 3 & 6 & 9 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 1 & 2 & 3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\text{Imag}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 \\ 4 \\ -6 \end{pmatrix} \right\}, \quad \rho(T) = 1.$$

$$N(A_T) = N(T) = \{(x, y, z) = 2x - y + 3z = 0\},$$

$$(x, y, z) = (x, 2x + 3z, z) = x(1, 2, 0) + z(0, 3, 1)$$

$$N_{AT} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\nu(T) = \nu(A) = 2$$

$$\rho(A) = \rho(T) = 1.$$

Veamos el teorema de cambio de base en transformaciones lineales, el cual es una consecuencia inmediata del Teorema de cambio de base en matrices, puesto que toda transformación tiene asociada una matriz.

Teorema 5.5. Sea V un espacio vectorial de dimensión n , W un espacio vectorial de dimensión m y $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Sea $B_1 = \{v_1, \dots, v_n\}$ una base de V y $B_2 = \{w_1, \dots, w_m\}$ una base de W . Entonces existe una matriz A_T $m \times n$ tal que

$$(T(x))_{B_2} = A_T(x)_{B_1},$$

donde A_T es la única matriz relativa de la base B_1 a la base B_2 .

Demostración 5.5.

Calculemos primero la matriz A_T .

$$T(v_1) = y_1, T(v_2) = y_2, \dots, T(v_n) = y_n \quad y_i \in W \quad y_i = a_{1i}w_1 + a_{2i}w_2 + \dots + a_{mi}w_m,$$

por lo tanto

$$(y_1)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ \vdots \\ a_{m1} \end{pmatrix}, (y_2)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{12} \\ a_{22} \\ \vdots \\ a_{m2} \end{pmatrix}, \dots, (y_n)_{B_2} = \begin{pmatrix} a_{1n} \\ a_{2n} \\ \vdots \\ a_{mn} \end{pmatrix},$$

$$A_T = ((y_1)_{B_2}, (y_2)_{B_2}, \dots, (y_n)_{B_2}).$$

Como $(v_1)_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \dots, (v_n)_{B_1} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix}$ y $A_T(v_i)_{B_1} = (y_i)_{B_2}$.

Si $x \in V$, entonces $x = c_1 v_1 + \dots + c_n v_n$ y $(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} c_1 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix}$

$$A_T(x)_{B_1} = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ \vdots \\ c_n \end{pmatrix} = c_1(y_1)_{B_2} + c_2(y_2)_{B_2} + \dots + c_n(y_n)_{B_2}.$$

De manera similar se tiene

$$\begin{aligned} T(x) &= T(c_1 v_1 + \dots + c_n v_n) = c_1 T(v_1) + \dots + c_n T(v_n) \\ &= c_1 y_1 + \dots + c_n y_n \end{aligned}$$

$$(T(x))_{B_2} = (c_1 y_1 + \dots + c_n y_n)_{B_2} = c_1 (y_1)_{B_2} + \dots + c_n (y_n)_{B_2}$$

luego $A_T(x)_{B_1} = (T(x))_{B_2}$.

Ejemplo 5.8. Sea $T: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal y

$B_1 = \{(1, 0, 1), (0, 2, 0), (0, 1, 1)\}$, $B_2 = \{(2, 0, 0), (1, 1, 1), (0, 2, 0)\}$ bases de \mathbb{R}^3 si

$$A_T = [T]_{B_1 B_2} = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 \\ -1 & -2 & 1 \end{bmatrix},$$

halle $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Solución 5.8. Por definición tenemos lo siguiente:

$$T(1, 0, 1) = -1(2, 0, 0) + 2(1, 1, 1) - 1(0, 2, 0) = (0, 0, 2)$$

$$T(0, 2, 0) = 1(2, 0, 0) + 2(1, 1, 1) - 2(0, 2, 0) = (4, -2, 2).$$

Ahora expresamos (x, y, z) en términos de la base B_1 .

$$(x, y, z) = c_1(1, 0, 1) + c_2(0, 2, 0) + c_3(0, 1, 1),$$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{cases} c_1 = x \\ c_2 = x + y - z \\ c_3 = z - x. \end{cases}$$

$$\begin{aligned} (x, y, z) &= x(1, 0, 1) + \frac{x+y-z}{2}(0, 2, 0) + (z-x)(0, 1, 1) \\ T(x, y, z) &= xT(1, 0, 1) + \frac{x+y-z}{2}T(0, 2, 0) + (z-x)T(0, 1, 1) \\ &= x(0, 0, 2) + \frac{x+y-z}{2}(4, -2, 2) + (z-x)(-1, 1, -1). \\ &= (3x + 2y - 3z, -2x - y + 2z, 4x + y - 2z). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.9. Halle una transformación lineal de $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^4$ cuya imagen sea generada por los vectores $(1, 2, 0, -4)$ y $(2, 0, -1, 3)$.

Solución 5.9.

$$\begin{aligned} \text{Imag}(T) &= L\{(1, 2, 0, -4)\} \\ &= L\{(1, 2, 0, -4), (2, 0, -1, -3), (0, 0, 0, 0)\}. \end{aligned}$$

Definimos

$$\begin{aligned} T(1, 0, 0) &= (1, 2, 0, -4) \\ T(0, 1, 0) &= (2, 0, -1, -3) \\ T(0, 0, 1) &= (0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

$$(x, y, z) = x(1, 0, 0) + y(0, 1, 0) + z(0, 0, 1)$$

$$\begin{aligned} T(x, y, z) &= xT(1, 0, 0) + yT(0, 1, 0) + zT(0, 0, 1) \\ &= x(1, 2, 0, -4) + y(2, 0, -1, -3) + z(0, 0, 0, 0) \\ &= (x + 2y, 2x - y, -4x - 3y). \end{aligned}$$

Ejemplo 5.10. $T : P_2 \rightarrow P_3$; $T(p(x)) = xp(x)$. Encuentre A_T y úsela para determinar el núcleo y la imagen de T

Solución 5.10. Utilizamos las bases canónicas de P_2 y P_3

$$T(1) = (x)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad T(x) = (x^2)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$T(x^2) = (x^3)_{B_2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \text{luego} \quad A_T = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$\rho(A) = 3 \text{ y la base para } R_A \text{ es } \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\text{Imag}(T) = \text{gen}\{x, x^2, x^3\} \quad \nu(A) = 3, \quad \text{nu}(T) = \{0\}.$$

5.2. Isomorfismos

Definición 5.2. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, entonces T es uno a uno, si

$$T(x) = T(y) \quad \text{implica que} \quad x = y.$$

Para todo $x, y \in V$ (también se le denomina transformación inyectivo).

Teorema 5.6. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal. Entonces T es linealmente independiente si y sólo si $N(T) = \{0\}$.

Demostración 5.6.

Supongamos que $N(T) = \{0\}$ y $T(x) = T(y)$, entonces

$$T(x) - T(y) = T(x - y) = 0,$$

lo que significa que

$$x - y \in N(T) = \{0\}.$$

Así que $x - y = 0$ luego $x = y$. Por lo tanto T es 1-1.

Supongamos que T es 1-1 y demostremos que $N(T) = \{0\}$. Sea $x \in N(T)$, entonces $T(x) = 0$, pero $T(0) = 0$ (T es lineal) luego $x = 0$ por lo tanto $N(T) = \{0\}$.

Ejemplo 5.11. $T(x, y) = (x, y)$ mostrar que T es 1-1 usando la definición.

Solución 5.11.

$$T(x_1, y_1) = T(x_2, y_2) \Rightarrow (x_1, y_1) = (x_2, y_2)$$

$$x_1 = x_2 \text{ y } y_1 = y_2 \rightarrow x_1 = x_2, y_1 = y_2$$

luego $(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$.

Si T es invertible y $T = Ax$, entonces $T^{-1} = A^{-1}x$. Otra forma de hacer el ejercicio es usando determinantes.

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}; T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$A_T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \det(A_T) = 1 \neq 0,$$

luego $N(A_T) = N(T) = \{0\}$ luego T es inyectiva.

Definición 5.3. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal, se dice que T es sobre (sobreyectiva) si para todo $y \in W$ existe al menos un $x \in V$ tal que $T(x) = y$. Es decir T es sobre si $\text{Imag}(T) = W$. Se dice que T es un isomorfismo si T es inyectiva y sobreyectiva.

En el ejemplo anterior $N(T) = \{0\}$ $\dim(N(T)) = 0$ $\rho(T) = 2$ luego

$$\text{Imag}(T) = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} = \mathbb{R}^2$$

por lo tanto T es sobreyectiva.

Teorema 5.7. Sea $T : V \rightarrow W$ una transformación lineal; suponga que

$$\dim(V) = \dim(W) = n.$$

- a) Si T es uno a uno, entonces T es sobreyectiva.
- b) Si T es sobreyectiva, entonces T es uno a uno.

Demostración 5.7.

Sea A_T la matriz de T , entonces si T es uno a uno, entonces $N(T) = \{0\}$ y $\nu(A_T) = \nu(T) = 0$, luego

$$\rho(T) = \rho(A_T) = n - 0 = n$$

luego $\text{Imag}(T) = W$. Si T es sobreyectiva, entonces $\rho(T) = \rho(A_T) = n$, por lo tanto $\nu(T) = \nu(A_T)$ y T es uno a uno.

Teorema 5.8. Sea $T : V \rightarrow W$ transformación lineal, suponga que $\dim(V) = n$ y $\dim(W) = m$, entonces

I Si $n > m$ T es uno a uno.

II Si $m > n$ T es sobre.

Demostración 5.8.

La demostración se propone como ejercicio.

Teorema 5.9. Sea $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ y A_T la transformación asociada a T , las siguientes afirmaciones son equivalentes:

- a) A_T es invertible.
- b) $\det(A_T) \neq 0$.
- c) La solución del sistema $A_T x = 0$ es la solución $x = 0$.
- d) $\nu(A_T) = 0$.
- e) $\rho(A_T) = n$.
- f) La $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ definida por $T(x) = A_T x$ es un isomorfismo.

Demostración 5.9.

La demostración se deja como ejercicio.

Ejemplo 5.12. Un isomorfismo entre espacios de dimensión infinita.

Sea $V = \{f \in C'[0, 1] : f(0) = 0\}$ y $W = \{f[0, 1] \rightarrow \mathbb{R} : f \text{ es continua}\} = C[0, 1]$, Demuestre que $V \approx W$.

Solución 5.12.

En efecto, sea $D : V \rightarrow W : D(f) = f'$, mostremos que D es inyectiva si $Df = Dg$, entonces $f' = g'$ ó $(f - g)' = 0$, luego $f(x) - g(x) = c$, donde c es una constante, pero $f(0) - g(0) = c \Rightarrow c = 0$.

Sea $g \in ([0, 1])$ y sea $f(x) = \int_0^x g(e)de$, entonces por Teorema fundamental del cálculo $f \in C'[0, 1]$ y $f'(x) = g(x)$ para todo $x \in [0, 1]$, más aún

$$\int_0^0 g(x) = f(0) = 0,$$

para todo $g \in W$, existe $f \in V$ tal que $Df = g$ así D es sobreyectiva luego $V \approx W$.

Teorema 5.10. Sea $T : V \rightarrow W$ un isomorfismo

- a) Si v_1, \dots, v_n generan a V , entonces $T(v_1), \dots, T(v_n)$ generan a W .
- b) Si v_1, \dots, v_n son l.i. en V , entonces $T(v_1), \dots, T(v_n)$ son l.i. en W .
- c) Si v_1, \dots, v_n es una base de V , entonces $T(v_1), \dots, T(v_n)$ es una base de W .
- d) Si V tiene dimensión finita, entonces W tiene dimensión finita y $\dim V = \dim W$.

Demostración 5.10.

Sea $w \in W$, entonces existe un $v \in V$ tal que $T(v) = w$, por ser T sobreyectiva.

- a) Como los v_i son una base a V , entonces $v = c_1v_1 + \dots + c_nv_n$

$$T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = w \Rightarrow c_1T(v_1) + \dots + c_nT(v_n) = w$$

esto muestra que $\{T(v_1), \dots, T(v_n)\}$ generan a W .

- b) Suponga que $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0 \Rightarrow T(c_1v_1 + \dots + c_nv_n) = 0$
Como T es 1-1, entonces $c_1v_1 + \dots + c_nv_n = 0$ y como $\{v_1, \dots, v_n\}$ es una base de V , entonces $c_1 = \dots = c_n = 0$

Las partes c) y d) son consecuencia inmediata de a) y b).

5.3. Ejercicios resueltos

Ejercicio 5.1. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal tal que

$$T(1, 1, 1) = (1, 0, 2) ; T(1, 0, 1) = (0, 1, 1) ; T(0, 1, 1) = (1, 0, 1).$$

Encontrar $T(x, y, z)$.

Solución 5.1.

Demostremos que $\{(1, 1, 1), (1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de \mathbb{R}^3 .

Basta con demostrar que la matriz formada por estos tres vectores tiene determinante distinto de cero

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} ; \det(A) = 1 \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 1 \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} + 1 \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -1 - 1 + 1 = -1 \neq 0.$$

Luego este conjunto es una base de \mathbb{R}^3 .

Sea $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, entonces

$$(x, y, z) = a(1, 1, 1) + b(1, 0, 1) + c(0, 1, 1)$$

$$(x, y, z) = (a + b, a + c, a + b + c)$$

$$a + b = x \quad (1)$$

$$a + c = y \quad (2)$$

$$a + b + c = z. \quad (3)$$

Reemplazando $a + b = x$ en (3) $x + c = z \Rightarrow c = z - x$; reemplazando $a + c = y$ en (3) obtenemos

$$a + y = z \Rightarrow a = z - y$$

$$a + b = x \Rightarrow b = x - a = x - (z - y)$$

$$b = x - z + y.$$

Luego

$$(x, y, z) = (z - y)(1, 1, 1) + (x - z + y)(1, 0, 1) + (z - x)(0, 1, 1).$$

Aplicando T en la última ecuación, obtenemos

$$T(x, y, z) = (z - y)T(1, 1, 1) + (x - z + y)T(1, 0, 1) + (z - x)T(0, 1, 1)$$

$$T(x, y, z) = (z - y)(1, 0, 2) + (x - z + y)(0, 1, 1) + (z - x)(1, 0, 1)$$

$$T(x, y, z) = (y, z - y, x + y).$$

Ejercicio 5.2. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una transformación lineal definida por

$$T(x, y, z) = 2x - 3y + z.$$

a) Encontrar $[T]_{BB'}$ donde $B = \{(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1)\}$; $B_1 = \{1\}$.

b) Encontrar $N(T)$, $\text{Imag}(T)$, $\dim N(T)$ y $\text{rango}(T)$.

Solución 5.2.

a)

$$T(1, 0, 0) = 2 = 1 \cdot 2$$

$$T(1, 1, 0) = 2 - 3 = -1 = -\frac{1}{2} \cdot 2$$

$$T(1, 1, 1) = 2 - 3 + 1 = 0 = 0 \cdot 2.$$

$$\text{Luego } [T]_{BB'} = \left(1, -\frac{1}{2}, 0\right).$$

b)

$$\begin{aligned}
 N(T) &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : T(x, y, z) = 0\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - 3y + z = 0\} \\
 &= \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 3y - 2x\} \\
 &= \{(x, y, 3y - 2x) \in \mathbb{R}^3 : x, y \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{gen}\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}.
 \end{aligned}$$

Luego $\{(1, 0, -2), (0, 1, 3)\}$ es una base de $N(T)$. Por lo tanto $\dim N(T) = 2$.

$$\begin{aligned}
 \text{Imag}(T) &= \{T(x, y, z) : (x, y, z) \in \mathbb{R}^3\} = \{2x - 3y + z : x, y, z \in \mathbb{R}\} \\
 &= \text{gen}\{2\},
 \end{aligned}$$

luego $\text{Rango}(T) = 1$.

Ejercicio 5.3. Dar un ejemplo de una transformación lineal tal que

$$N_A(T) = \text{gen}\{(4, -7, 5)\} \quad e \quad \text{Imag}(T) = \text{gen}\{(2, -1, 1), (-1, 3, 2)\}.$$

Solución 5.3.

Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ tal que $T(x, y, z) = A \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ con A , una matriz 3×3 .

Como $(2, -1, 1)$ y $(-1, 3, 2) \in \text{Imag}(T)$, entonces

$$\begin{aligned}
 (2, -1, 1) &= 2(1, 0, 0) - (0, 1, 0) + (0, 0, 1) \\
 (-1, 3, 1) &= -1(1, 0, 0) + 3(0, 1, 0) + 2(0, 0, 1)
 \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 3 & b \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix}, \quad \text{como } (-4, 7, 5) \in N(T),$$

entonces

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 & a \\ -1 & 3 & b \\ 1 & 2 & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 4 \\ -7 \\ 5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} 8 + 7 + 5a = 0 \\ -4 - 21 + 5b = 0 \\ 4 - 14 + 5c = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -3 \quad b = 5 \quad c = 2,$$

luego

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Por consiguiente

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -3 \\ -1 & 3 & 5 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Ejercicio 5.4. Sean $B = \{1 - x, 1 - x^2, 1 - x^3\}$, una base de P_3 , $B_1 = \{1, x, x^2\}$ una base de P_2 y T una transformación lineal de P_3 en P_2 , tal que

$$[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

- a) Calcular $T(x - x^2)$.
- b) T es un isomorfismo?
- c) En caso afirmativo, calcular $T^{-1}(a + bx + cx^2)$.

Solución 5.4.

a)

$$[T(x - x^2)]_{B_1} = [T]_{BB'}[x - x^2]_B,$$

esto implica que

$$x - x^2 = -(1 - x) + (1 - x^2) + 0 \cdot (1 - x^3),$$

esto significa que

$$[T(x - x^2)]_{B_1} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Reemplazando

$$[T(x - x^2)]_{B_1} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Luego

$$T(x - x^2) = 1(1) - 2(x) + 0(1 - x^2) = 1 - 2x.$$

b)

$$\det([T]_{BB'}) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} - 2 \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0$$

esto implica que T es un isomorfismo.

c) Calculamos la inversa de $[T]_{BB'}$ $= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 1 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_2 \rightarrow -3F_1 + F_2 \\ F_3 \rightarrow -F_1 + F_2 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \end{array} \right) F_2 \leftrightarrow F_3$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 1 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & -5 & -1 & -3 & 1 & 0 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \rightarrow 2F_2 + F_1 \\ F_3 \rightarrow -5F_2 + F_3 \end{array} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 1 & -1 & 0 & 2 \\ 0 & -1 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -5 \end{array} \right) \begin{array}{l} F_1 \rightarrow F_1 + F_3 \\ F_2 \rightarrow -F_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & 1 & -5 \end{array} \right) F_3 \rightarrow -F_3 \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 1 & 1 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -2 & -1 & 5 \end{array} \right),$$

luego $[T]_{BB'}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix}$.

Por lo tanto, escribimos $a + bx + cx^2$ en términos de la base B .

$$a + bx + cx^2 = \lambda_1(1 - x) + \lambda_2(1 - x^2) + \lambda_3(1 - x^3)$$

$$a + bx + cx^2 = \lambda_1 - \lambda_1 x + \lambda_2 1 - \lambda_2 x^2 + \lambda_3 1 - \lambda_3 x^3$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = a \quad b = -\lambda_1 \quad c = -\lambda_2$$

$$-b - c + \lambda_3 = a$$

$$0\lambda_3 = a + b + c \Rightarrow a = -b - c.$$

$$\begin{aligned} [T^{-1}(a + bx + cx^2)]_{B_1} &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} (a + bx + cx^2)_B \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ -2 & -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -b \\ -c \\ a + b + c = 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -b - c \\ -b \\ 2b + c \end{pmatrix} \\ T^{-1}(a + bx + cx^2) &= (-b - c)(1) - b(x) + (2b + c)(1 - x^2) \\ &= -b - c - bx + 2b - 2bx^2 - c - cx^2 \\ &= -b - 2c - bx + x^2(-2b - c) = b - 2c - bx - (2b + c)x^2. \end{aligned}$$

Ejercicio 5.5. Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow P_1$ una transformación lineal definida por $T(a, b) = a - b + ax$ y $B = \{1, 1 - x\}$ una base de P_1 . Encuentre una base B_1 de \mathbb{R}^2 tal que la matriz asociada a T respecto a las bases B_1 y B es

$$[T]_{BB'} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

Solución 5.5.

Sea $B_1 = \{(a_1, b_1), (c_1, d_1)\}$ la base por encontrar, entonces

$$T((a_1, b_1)) = 1(1) - 1(1 - x), \text{ esto implica que}$$

$$a_1 - b_1 + a_1x = x, \text{ luego}$$

$$\begin{cases} a_1 - b_1 = 0 \\ a_1 = 1 \end{cases} \Rightarrow a_1 = b_1 = 1,$$

$$T((c_1, d_1)) = 2(1) + 1(1 - x),$$

esto implica que

$$c_1 - d_1 + c_1x = 3 - x, \text{ luego}$$

$$\begin{cases} c_1 - d_1 = 3 \\ c_1 = -1 \end{cases} \Rightarrow d_1 = 4,$$

por lo tanto $B_1 = \{(1, 1), (-1, 4)\}$. Es fácil ver que B_1 es una base de \mathbb{R}^2 .

Ejercicio 5.6. Sea $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ una transformación lineal definida por la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Respecto a la base $B = \{(1, -1, 0), (-1, 1, -1), (1, 0, 0)\}$

- Probar que $A^2 = A$.
- Hallar una base $\{v_1, v_2, v_3\}$ donde la matriz de la transformación es

$$C = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Solución 5.6.

a)

$$A^2 = AA = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

b) $T(v_1) = v_1$, $T(v_2) = v_2$, $T(v_3) = 0$

$$T(x, y, z) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = (x, y, 0).$$

Si $v_1 = (a_1, b_1, c_1) = T(a_1, b_1, c_1) = (a_1, b_1, 0) \Rightarrow c_1 = 0$, por lo tanto $v_1 = (a_1, b_1, 0)$.

Si $v_2 = (a_2, b_2, c_2) = T(a_2, b_2, c_2) = (a_2, b_2, 0) \Rightarrow c_2 = 0$, por lo tanto $v_2 = (a_2, b_2, 0)$.

Si $v_3 = (a_3, b_3, c_3) = T(a_3, b_3, c_3) = (a_3, b_3, 0) = (0, 0, 0)$, por lo tanto $a_3 = 0 = b_3$ y $c_3 \in \mathbb{R}$, por lo tanto $v_3 = (0, 0, c_3)$.

Puesto que $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base, entonces

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} \neq 0,$$

es decir

$$\begin{vmatrix} a_1 & a_2 & 0 \\ b_1 & b_2 & 0 \\ 0 & 0 & c_3 \end{vmatrix} = c_3 \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} = c_3(a_1b_2 - b_1a_2) \neq 0$$

es decir $c_3a_1b_2 \neq c_3b_1a_2$.

5.4. Ejercicios del capítulo 5

1) Determine si la transformación $T : V \rightarrow W$ es una transformación lineal.

a) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = 2x + 1.$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(x, y) = \begin{pmatrix} y \\ x + y \\ x \end{pmatrix}.$

c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, T(x, y) = (x, y).$

d) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n, T(x) = \begin{pmatrix} x \\ x \\ \vdots \\ x \end{pmatrix}.$

e) $T : P_2 \rightarrow P_1, T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = (a_2 - a_1)x + a_0.$

f) $T : M_{2 \times 2} \rightarrow \mathbb{R}, T(A) = |A|.$

g) $T : P_4 \rightarrow P_4, T(p(x)) = p'(x).$

h) $T : P_3 \rightarrow \mathbb{R}^3, T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_3 - a_2 \\ a_1 + a_3 \\ a_2 - a_1 \end{pmatrix}.$

i) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x - 2y \\ x^2 + y \end{pmatrix}.$

j) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = \ln x.$

k) $T : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}, T(x) = \sqrt{x}.$

2) Suponga que $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal. Encuentre $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ en cada caso si:

a) $T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}.$

b) $T\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 2 \end{pmatrix}, \quad T\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 4 \\ -3 \end{pmatrix}.$

Sugerencia, escriba $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + y\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$

3) Use el resultado del ejercicio 2b, para calcular

$$T\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

4) Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}.$

a) Halle las imágenes de los vectores

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} \quad a \in \mathbb{R}.$$

¿Qué le ocurre geométricamente a cada vector?

b) La transformación anterior se puede escribir como:

$$T(v) = A.v \text{ donde } v = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \text{ y } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

c) Describa geométricamente que le ocurre al vector $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ si $T(v) = Av$, en los siguientes casos:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix},$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

5) Sea $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ una transformación lineal tal que

$$T : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y \end{pmatrix}.$$

a) Encuentre la imagen del vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$ si $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\theta = \frac{\pi}{6}$. ¿Cuál es la magnitud de los vectores imágenes, en la parte a.

¿Qué le ocurre geométricamente al vector $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}$?

b) La transformación lineal anterior se puede escribir como

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

donde

$$A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta \\ \sin\theta & \cos\theta \end{pmatrix}.$$

Si $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $T(v) = A_\theta v$ donde:

$$v = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Halle la imagen de los vectores $\begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 4 \end{pmatrix}$.

Describe geométricamente en que consiste esta nueva transformación lineal

para un vector cualquiera $v \in \mathbb{R}^3$. ¿Qué pasa si $A_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & 0 & -\sin\theta \\ 0 & 1 & 0 \\ \sin\theta & 0 & \cos\theta \end{pmatrix}$.

6) Sea u un vector fijo en el plano xy . Si $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una transformación lineal tal que $T(v) = P(v)$, $P(v)$: vector proyección de v sobre u . Demuestre que T es una transformación lineal.

7) a) Sea: $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que:

$$T \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Encuentre $T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ y $T \begin{pmatrix} 1 \\ 6 \\ -2 \end{pmatrix}$.

b) Sea $T : P_3 \rightarrow P_2$, si $T(x^3) = 3x$, $T(x^2) = 4x^2$, $T(x) = 3$ y $T(1) = 2x$.

Encuentre $T(ax^3 + bx^2 + cx + d)$, $T(3x + 2)$.

c) Sea $T : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 3}$ donde:

$$T \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}, \quad T \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad y \quad T\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Encuentre $T\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{pmatrix}$.

d) Sea

$$V = \{a + bi : a, b \in \mathbb{R}\} \quad T : V \rightarrow T(1) = 2 + 3i \quad T(i) = 3 - 4i.$$

Encuentre $T(a + bi)$ y $T(6 - 3i)$.

8) Encuentre el núcleo y la imagen de las siguientes transformaciones lineales. Determine también una base para el núcleo e imagen.

a) $T : P_2 \rightarrow P_3, \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_1 - a_1x + a_0x^3.$

b) $T : P_3 \rightarrow \mathbb{R}, \quad T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = a_2.$

c) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow P_2, \quad T(a, b, c) = a + bx + cx^2.$

d) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x + y.$

e) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x \end{pmatrix}.$

f) $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} z \\ y \end{pmatrix}.$

9) Encuentre la matriz de la transformación lineal T . Suponga que B_1 y B_2 son bases canónicas.

a) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2,$

$$T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ -x + y \end{pmatrix}.$$

b) $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2, \quad T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + y \\ x - y \\ 2x + 3y \end{pmatrix}.$

$$c) T : M_{2 \times 2} \rightarrow M_{2 \times 2}, \quad T \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a + b + c + d & a + b + c \\ a + b & a \end{pmatrix}.$$

- 10) Encuentre todas las transformaciones lineales de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que la recta $y = 0$ se transforma en la recta $x = 0$.
- 11) Encuentre todas las transformaciones lineales de $T : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tales que la recta $y = ax$ se transforma en la recta $y = bx$, donde a y b son constantes.
- 12) En cada uno de los siguiente ejercicios se define una función $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ con la fórmula que se da para $T(x, y, z)$ siendo (x, y, z) un punto cualquiera de \mathbb{R}^3 . En cada caso determine si T es un isomorfismo. Si es así describir $T(\mathbb{R}^3)$; para cada punto (u, v, w) de $T(\mathbb{R}^3)$, póngase $(x, y, z) = T^{-1}(u, v, w)$ y dar fórmula para la determinación de x, y, z en función de u, v y w .
- a) $T(x, y, z) = (z, y, x)$.
- b) $T(x, y, z) = (x, y, x + y + z)$.
- c) $T(x, y, z) = (x + 1, y + 1, z - 1)$.
- d) $T(x, y, z) = (x + y, y + z, z + x)$.

Capítulo 6

Espacios euclideos

En la geometría euclidiana ordinaria, aquellas propiedades que cuentan con la posibilidad de medir longitudes de segmentos rectilíneos y ángulos formados por rectas, se llaman propiedades métricas. En \mathbb{R}^n definimos las longitudes y los ángulos en función del producto escalar. Extendemos estas ideas a cualquier espacio vectorial.

6.1. Producto escalar

Sea V un espacio vectorial sobre \mathbb{R} . Decimos que $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es una función bilineal si satisface las siguientes propiedades:

- $f(x + y, z) = f(x, z) + f(y, z); f(\alpha x, y) = \alpha f(x, y).$
- $f(x, y + z) = f(x, y) + f(x, z); f(x, \alpha y) = \alpha f(x, y).$

Es decir, f es una función lineal en cada variable.

Una función bilineal $f : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ es positiva (estrictamente positiva) si $f(x, x) > 0$ para todo $x \in V$, $(f(x, x) \geq 0$ para todo $x \in V)$ es simétrica si $f(x, y) = f(y, x)$ para todo $x, y \in V$.

Un producto escalar en V es una función bilineal simétrica y estrictamente positiva de $V \times V$ en \mathbb{R} . Si $f(x, y)$ es un producto escalar, lo denotamos por

$f(x, y) = \langle x, y \rangle$. Esto es, $\langle \cdot, \cdot \rangle$ satisface:

- a) $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle$. Simétrica o conmutativa.
- b) $\langle x, y + z \rangle = \langle x, y \rangle + \langle x, z \rangle$. Distributiva.
- c) $\langle y + z, x \rangle = \langle y, x \rangle + \langle z, x \rangle$. Distributiva.

- d) $\langle cx, y \rangle = c\langle x, y \rangle, \langle x, cy \rangle = \overline{c}\langle x, y \rangle$. Asociativa u homogeneidad.
- e) $\langle x, x \rangle > 0$ si $x \neq 0$. Positiva.

Si V es un espacio vectorial sobre los números complejos, \mathbb{C} el producto interior $\langle x, y \rangle$ es un número complejo, que satisface los mismos axiomas, excepto el de simetría que se reemplaza por

$$\langle x, y \rangle = \overline{\langle y, x \rangle} \text{ simetría hermitiana.}$$

Siendo $\overline{\langle y, x \rangle}$ el complejo conjugado de $\langle y, x \rangle$, y

$$\langle x, cy \rangle = \overline{\langle cy, x \rangle} = \overline{\overline{c}\langle y, x \rangle} = \overline{c}\langle x, y \rangle,$$

donde \overline{c} es el conjugado de c (en este caso se llama espacio euclideo complejo).

Ejemplo 6.1. Las siguientes funciones son producto escalar:

Solución 6.1.

- a) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}; \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i y_i$, donde $x = (x_1, \dots, x_n)$ y $y = (y_1, \dots, y_n)$ es un producto escalar en \mathbb{R}^n . El producto escalar más utilizado en \mathbb{R}^n .
- b) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{C}^n \times \mathbb{C}^n \rightarrow \mathbb{C}; \langle x, y \rangle = \sum_{i=1}^n x_i \overline{y_i}$ donde $x = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{C}^n$ y $y = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{C}^n$.
- c) $\langle \cdot, \cdot \rangle : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}; \langle x, y \rangle = x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 y_2$, donde $x = (x_1, x_2)$ y $y = (y_1, y_2)$. Esta función es un producto interno, se pueden verificar fácilmente las propiedades. Esto muestra que un espacio vectorial puede tener varios productos escalares.
- d) Sea $C(a, b)$ el espacio lineal de todas las funciones reales continuas en $[a, b]$. Definimos el producto interno de dos funciones f y g como:

$$\langle f, g \rangle = \int_a^b f(c)g(c)dc.$$

Por las propiedades de la integral, es inmediato verificar que es un producto escalar.

Observación

En todo espacio vectorial de dimensión finita sobre \mathbb{R} , es posible definir un producto escalar así: si $B = \{a_1, \dots, a_n\}$ es una base de V y $U(x) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}_n$ es el vector de las componentes de $x \in V$ en la base B , análogamente $U(y) = (y_1, \dots, y_n) \in \mathbb{R}_n$, es el vector de las componentes de $y \in V$ es decir, $(x)_B = U(x)$ y $(y)_B = U(y)$. Entonces

$$\langle x, y \rangle = (U(x) \mid U(y)).$$

es un producto escalar en V que depende de la base B .

Teorema 6.1. *En un Espacio euclideo V , todo producto interno satisface la desigualdad de Cauchy-Schwarz:*

$$|\langle x, y \rangle|^2 \leq \langle x, x \rangle \langle y, y \rangle \text{ para todo } x, y \in V.$$

Además el signo de la igualdad es válido si x e y son dependientes.

Demostración 6.1.

Sea $z = ax + by$

$$\begin{aligned} \langle z, z \rangle &= \langle ax + by, ax + by \rangle = \langle ax, ax \rangle + \langle ax, by \rangle + \langle by, ax \rangle + \langle by, by \rangle \\ &= a\bar{a}\langle x, x \rangle + a\bar{b}\langle x, y \rangle + b\bar{a}\langle y, x \rangle + b\bar{b}\langle y, y \rangle \geq 0. \end{aligned}$$

Haciendo

$$\begin{aligned} b &= -\langle x, y \rangle, \quad \bar{b} = -\langle y, x \rangle \\ a &= -\langle y, y \rangle, \quad \bar{a} = -\langle y, y \rangle, \end{aligned}$$

y reemplazando en la desigualdad anterior obtenemos

$$\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle - \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle - \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle + \langle y, x \rangle \langle x, y \rangle \geq 0,$$

luego

$$\langle y, y \rangle \langle x, x \rangle \geq \langle x, y \rangle \langle y, x \rangle = \|\langle x, y \rangle\|^2.$$

Esto demuestra la desigualdad.

El signo de la igualdad es válido si $z = 0 \Rightarrow x = \alpha y$ es decir, x e y son l.d.

El producto interno puede utilizarse para introducir el concepto métrico de longitud en cualquier espacio euclideo.

Definición 6.1. Una norma en un espacio vectorial V es una función $V \rightarrow \mathbb{R}^+$ que satisface las siguientes propiedades:

- a) $\|x\| \geq 0$ y $\|x\| = 0$ si $x = 0$.
- b) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$ Para todo $\lambda \in \mathbb{R}$ y todo $x \in V$.
- c) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ Para todo $x, y \in V$.

Un espacio vectorial normado, es un espacio vectorial provisto de una norma.

Definición 6.2. Si $\|x\|$ es una norma de V , entonces $(x, y) \rightarrow d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica inducida por la norma.

Recordemos qué es una métrica.

Una métrica en un conjunto X es una función $X \times X \rightarrow \mathbb{R}^+$, $(x, y) \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades,

$$M_1 : d(x, y) \geq 0 \text{ y } d(x, y) > 0 \text{ si } x \neq y.$$

$$M_2 : d(x, y) = d(y, x) \text{ para todo } x, y \in X.$$

$$M_3 : d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y) \text{ para todo } x, y, z \in X.$$

Observación

- a) Es claro que la norma de \mathbb{R}^n es la generalización del vector absoluto.
- b) El número $d(x, y) \geq 0$ es la distancia entre dos puntos $x, y \in X$. Un espacio métrico es un espacio provisto de una métrica.

Ejemplo 6.2. Demostrar que $d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica. Es decir una norma induce a una métrica. Demostrar que $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ es una norma de V , es decir, un producto escalar induce a una norma.

Por transitividad podemos decir que un producto escalar induce a una métrica.

Solución 6.2.

Mostrar que $\|x\| = \langle x, x \rangle^{1/2}$ es una norma. Verificar la desigualdad triangular, las otras propiedades son inmediatas.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= \langle x + y, x + y \rangle = \langle x, x \rangle + \langle x, y \rangle + \langle y, x \rangle + \langle y, y \rangle \\ &= \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2 \langle x, y \rangle \\ &\leq \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2\|x\| \|y\| = (\|x\| + \|y\|)^2 \end{aligned}$$

luego $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$. Dejamos como ejercicio mostrar que $d(x, y) = \|x - y\|$ es una métrica.

Definición 6.3. En un espacio euclideo real V , el ángulo formado por dos elementos no nulos x, y se define como el número $\theta \in [0, \pi]$ tal que satisfice

$$\cos(\theta) = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|}.$$

6.2. Bases ortonormales

En un espacio euclideo V , dos elementos x, y son ortogonales si su producto escalar es cero $\langle x, y \rangle = 0$. Un subconjunto $S \subset V$ es un conjunto ortogonal si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo par $x, y \in S$, $x \neq y$. Un conjunto ortogonal se llama ortonormal si $\|x\| = 1$ para todo $x \in S$.

Observación Si $x \neq 0_V$, entonces $\frac{x}{\|x\|}$ tiene norma uno y por lo tanto tenemos que

a) Si S es un conjunto ortogonal, entonces $S_1 = \{x/\|x\| : x \in S\}$ es ortonormal ya que

$$\left\langle \frac{x}{\|x\|}, \frac{y}{\|y\|} \right\rangle = \frac{\langle x, y \rangle}{\|x\| \|y\|} = 0 \quad \text{si } x \neq 0.$$

b) $\{a_j : j = 1, \dots, p\}$ es ortonormal si y sólo si $\langle a_i, a_j \rangle = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{si } i \neq j \\ 0 & \text{si } i = j. \end{cases}$

Teorema 6.2. En un espacio euclideo V , todo conjunto ortogonal de elementos no nulos es linealmente independiente. En particular en un espacio euclideo de dimensión finita con $\dim V = n$ todo conjunto ortogonal que conste de n elementos es una base de V .

Demostración 6.2.

Sea $S = \{x_1, \dots, x_n\}$ un subconjunto ortogonal de V y supongamos que

$$\sum_{i=1}^n c_i x_i = 0 \quad x_i \in S,$$

entonces

$$\langle 0, x_k \rangle = 0 = \sum_{i=1}^n c_i \langle x_i, x_k \rangle = c_k \langle x_k, x_k \rangle \quad k = 1, \dots, n$$

y como $\langle x_k, x_k \rangle \neq 0$, entonces $c_k = 0$ para todo k .

Ejemplo 6.3. Sean $V = C(0, 2\pi)$, $\langle f, g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)g(x)dx$, $S = \{u_0, u_1, \dots\}$ donde $u_0 = 1$, $u_{2n-1}(x) = \cos nx$, $u_{2n}(x) = \sin nx$, para $n = 1, 2, \dots$. Muestre que S es un conjunto ortonormal.

Solución 6.3.

Si $m \neq n$, se puede mostrar (se deja como ejercicio) que $\int_0^{2\pi} u_n(x)u_m(x)dx = 0$ luego S es un conjunto ortogonal.

Ahora ningún elemento de S es el elemento cero, por lo tanto S es linealmente independiente.

$$\|u_0\|^2 = \langle u_0, u_0 \rangle = \int_0^{2\pi} dx = 2\pi \Rightarrow \|u_0\| = \sqrt{2\pi}.$$

Para $n \geq 1$ tenemos

$$\|u_{2n-1}\|^2 = \langle u_{2n-1}, u_{2n-1} \rangle = \int_0^{2\pi} \cos^2 nx dx = \pi \Rightarrow \|u_{2n-1}\| = \sqrt{\pi}.$$

$$\|u_{2n}\|^2 = \langle u_{2n}, u_{2n} \rangle = \int_0^{2\pi} \sin^2 nx dx = \pi \Rightarrow \|u_{2n}\| = \sqrt{\pi}.$$

$\|u_0\| = \sqrt{2\pi}$, por lo tanto

$$v_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad v_{2n-1}(x) = \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}, \quad v_{2n}(x) = \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \quad \text{por lo tanto } n \geq 1,$$

es un conjunto ortonormal.

Teorema 6.3. Sea V un espacio euclideo de dimension n , y supongamos que $S = \{e_1, \dots, e_n\}$ una base ortogonal para V . Si x es una combinación lineal de los elementos de S

$$x = \sum_{i=1}^n c_i e_i,$$

entonces $c_i = \frac{\langle x, e_i \rangle}{\langle e_i, e_i \rangle}$ para todo $i = 1, 2, \dots, n$.

En particular si S es ortonormal

$$c_i = \langle x, e_i \rangle.$$

Demostración 6.3.

$$\langle x, e_j \rangle = \sum_{i=1}^n \langle e_i, e_j \rangle = c_j \langle e_j, e_j \rangle,$$

puesto que $\langle e_i, e_j \rangle = 0$ si $i \neq j$, esto implica que $\langle e_j, e_j \rangle = 1$ si $i = j$. Luego $c_j = \langle x, e_j \rangle / \langle e_j, e_j \rangle$, si S es ortonormal, entonces $\langle e_j, e_j \rangle = 1$ luego $c_j = \langle x, e_j \rangle$.

Teorema 6.4. (Teorema de Pitágoras). Sea E un espacio euclideo real. Entonces los vectores x, y son ortogonales si y sólo si

$$\|x + y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2.$$

Demostración 6.4.

$$\begin{aligned} \|x + y\|^2 &= (x + y, x + y) = (x, x) + 2(x, y) + (y, y) \\ &= \|x\|^2 + 2 \langle x, y \rangle + \|y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2. \end{aligned}$$

6.3. Proyección ortogonal

Sea $x \in V$ (V es un espacio vectorial de dimensión finita) y $S \subseteq V$. Determinar un $y \in S$ tal que la distancia entre x y y sea lo más pequeña posible, es decir, calcular la distancia entre x y el conjunto S .

$$d(x, S) = \inf_{y \in S} d(x, y) \text{ donde } d(x, y) = \|x - y\|.$$

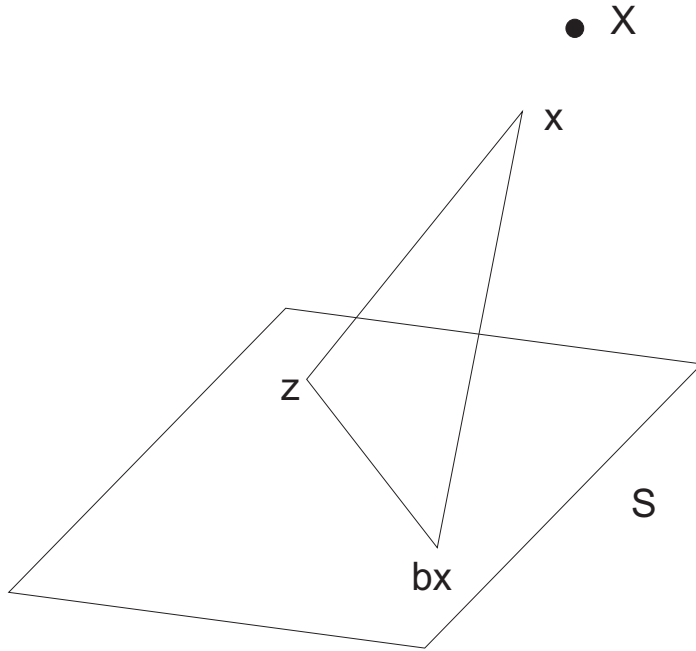
Teorema 6.5. Sea S un subespacio del espacio euclideo V . Entonces para todo $x \in V$ existe uno y sólo un $b_x \in S$ tal que $(x - b_x, z) = 0$ para todo $z \in S$.

Demostración 6.5.

La demostración se deja como ejercicio.

En el Teorema 6.5 si $S = \{v_1, v_2, \dots, v_n\}$ es una base ortonormal de V , entonces

$$P(x) = b_x = \sum_{i=1}^n \langle x, v_i \rangle v_i.$$



Teorema 6.6. (Teorema de la Proyección Ortogonal.) Si S es un subespacio euclideo de V y $x \in V$, entonces $d(x, S) = \|x - P(x)\| = \|x\vec{b}\|$ ($b = p(x)$).

Demostración 6.6.

Sea $z \in S$ arbitrario. El triángulo con vertices b , x y z es rectángulo y por el Teorema de Pitágoras

$$\|x\vec{z}\|^2 = \|b\vec{z}\|^2 + \|x\vec{b}\|^2.$$

Por consiguiente $\|x\vec{z}\|^2 \geq \|x\vec{b}\|^2$,

es decir,

$$d(x, z) \geq d(x, b) \text{ para todo } z \in S \text{ distinto de } b.$$

Denotamos por $P(x)$ es la proyección ortogonal de x sobre S .

Definición 6.4. Sea S un subconjunto de un espacio vectorial V se dice que un $x \in V$ es ortogonal a S si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $y \in S$. Dos subconjuntos S y R son ortogonales si $\langle x, y \rangle = 0$ para todo $x \in S$ y $y \in R$.

Teorema 6.7. Si S y R son ortogonales, entonces $S \cap R = \{0\}$.

Demostración 6.7. Si $x \in S \cap R \Rightarrow \langle x, x \rangle = 0$ luego $x = 0$.

Definición 6.5. Si S es un subconjunto de un espacio vectorial V , entonces

$$S^\perp = \{y \in V : \langle y, x \rangle = 0 \text{ para todo } x \in S\}.$$

Se deja como ejercicio mostrar que S^\perp es un subespacio vectorial de V .

Teorema 6.8. (Teorema de la descomposición ortogonal). Sea V un espacio vectorial euclideo y S un subespacio de V de dimensión finita. Todo elemento $x \in V$ se puede escribir en forma única como la suma de un elemento de S y otro de S^\perp , esto es

$$x = s + s^\perp \quad \text{donde } s \in S \text{ y } s^\perp \in S^\perp.$$

Además,

$$\|x\|^2 = \|s\|^2 + \|s^\perp\|^2, \quad s^\perp = x - s.$$

Demostración 6.8.

Puesto que S es de dimensión finita, entonces tiene una base ortonormal $\{e_1, \dots, e_n\}$

$$s = P(x) = \sum_{i=1}^n \langle x, e_i \rangle e_i \quad s^\perp = x - s.$$

Propiedades de P :

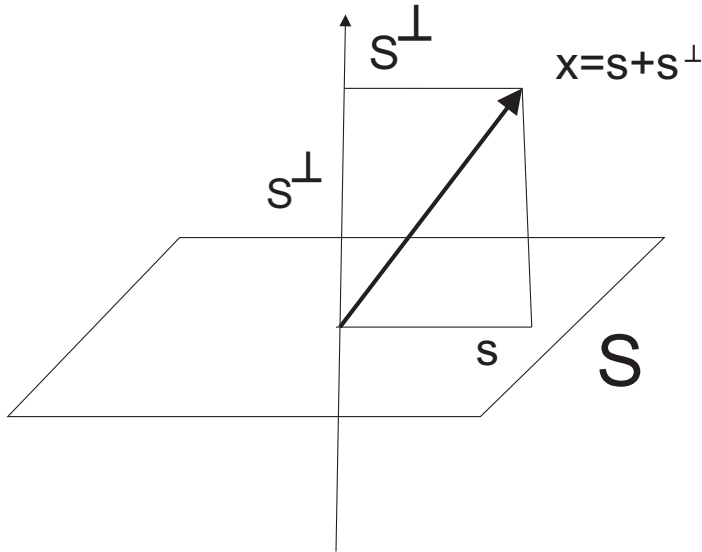
- P es lineal puesto que el producto escalar es bilineal.
- Si $y \in S$, entonces $P(y) = y$.
- $P \circ P(x) = P(x)$; $V = N(P) \oplus \text{Im}(P)$, es decir, $\text{Im}(P)$ y $N(P)$ son ortogonales.

Por ejemplo si S es un plano, que pasa por el origen, S^\perp es una recta que pasa por el origen perpendicular a S .

Teorema 6.9. Si S es un subespacio vectorial de V y P es la proyección ortogonal de x sobre S , entonces

- i) $d(x, S) = \|x - P(x)\|$.
- ii) $N(P) = S^\perp$.
- iii) $S \oplus S^\perp = V$.

Demostración 6.9.



Si $x \in N(P)$, entonces

$$P(x) = 0 \leftrightarrow P(x) = \sum_{i=1}^n (x, v_i) v_i = 0,$$

luego

$$\langle x, v_i \rangle = 0 \Rightarrow x \in S^\perp.$$

Supongamos que $x \in S^\perp$, entonces

$$\langle x, z \rangle = 0 \text{ para todo } z \in S.$$

Por otra parte

$$\langle x - P(x), z \rangle = 0 \text{ para todo } z \in S,$$

así que $\langle P(x), z \rangle = 0$ para todo $z \in S$. En particular si $z = P(x)$, entonces

$$\langle P(x), P(x) \rangle = \|P(x)\|^2 = 0$$

por lo tanto $P(x) = 0$ y $x \in N(P)$.

Como $V = S \oplus N(P)$; entonces $V = S \oplus S^\perp$.

6.4. Ejercicios resueltos

Ejercicio 6.1. Encuentre un valor de k , para que la siguiente función sea un producto interno en \mathbb{R}^2

$$\langle u, v \rangle = x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + kx_2 y_2.$$

Solución 6.1. Sean:

$$\begin{aligned} u &= (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 \\ v &= (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2. \end{aligned}$$

Mostremos que

$$\langle u, v \rangle = \langle v, u \rangle \quad \text{para todo valor de } k.$$

En efecto

$$\begin{aligned} \langle u, v \rangle &= \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle \\ &= x_1 y_1 - 3x_1 y_2 - 3y_2 x_1 + kx_2 y_2 \quad (\text{Reordenando}) \\ &= \langle (y_1, y_2), (x_1, x_2) \rangle. \\ &= \langle v, u \rangle \end{aligned}$$

Para que la función sea un producto interno debe cumplir que

$$\langle u, u \rangle \geq 0, \quad u \neq 0 \quad y \quad \langle u, u \rangle = 0 \Leftrightarrow u = 0.$$

En efecto

$$\langle u, u \rangle = \langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = x_1^2 - 6x_1 x_2 + kx_2^2 = (x_1 - 3x_2)^2$$

si $k = 9$.

Ejercicio 6.2. ¿Para qué valores de $a, b, c, d \in \mathbb{R}$ la siguiente función es un producto interno en \mathbb{R}^3 ?

Solución 6.2.

$$\langle u, v \rangle = \langle (x_1, x_2), (y_1, y_2) \rangle = ax_1 y_1 + bx_1 y_2 + cx_2 y_1 + dx_2 y_2.$$

Por definición tenemos

$$\langle (x_1, x_2), (x_1, x_2) \rangle = ax_1^2 + bx_1 x_2 + cx_1 x_2 + dx_2^2.$$

$$(\sqrt{a}x_1 + \sqrt{d}x_2)^2 = ax_1^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{d}x_1x_2 + dx_2^2.$$

Para que la función sea un producto interno se debe cumplir que

$$ax_1^2 + bx_1x_2 + cx_1x_2 + dx_2^2 = ax_1^2 + 2\sqrt{a}\sqrt{d}x_1x_2 + dx_2^2.$$

Igualando coeficientes, obtenemos

$$2\sqrt{a}\sqrt{d} = b + c \Rightarrow 4ad = (b + c)^2 = b^2 + 2bc + c^2,$$

luego

$$2ad - bc = \frac{b^2 + c^2}{2} > 0$$

es decir,

$$ad - \frac{bc}{2} > 0 \quad \text{es la condición que se debe cumplir.}$$

Ejercicio 6.3. Dada la base $\{v_1, v_2, v_3\} = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$ de \mathbb{R}^3 . Hallar una base ortonormal en \mathbb{R}^3 .

Solución 6.3. Primero, normalizamos v_1

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right).$$

Luego hacemos:

$$w_2 = v_2 - \langle v_2, u_1 \rangle u_1$$

$$\langle v_2, u_1 \rangle = \left\langle (0, 1, 1), \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) \right\rangle = 0 + \frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}},$$

por lo tanto

$$w_2 = (0, 1, 1) - \frac{2}{\sqrt{3}} \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}\right) = (0, 1, 1) - \left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right) = \left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right).$$

Finalmente normalizamos w_2 y definimos u_2

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\left(-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}, \frac{1}{3}\right)}{\frac{2}{3}\sqrt{6}}$$

$$u_2 = \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}\right).$$

Análogamente, aplicando el mismo procedimiento para v_3 se llega a que

$$u_3 = \left(0, \frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Luego la base ortonormal pedida en \mathbb{R}^3 es:

$$\{u_1, u_2, u_3\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right), \left(-\frac{2}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}} \right), \left(0, -\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \right\}.$$

Ejercicio 6.4. Encontrar una base ortonormal para el subespacio W de \mathbb{R}^3 dado por:

$$W = \{(x, y, z) : x - y + 2z = 0\} \quad \text{con el producto interno estándar de } \mathbb{R}^3.$$

Solución 6.4.

Primero obtenemos una base para W de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} W &= \{(x, y, z) : x - y + 2z = 0\} = \{(x, y, z) : x = y - 2z\} = \{(y - 2z, y, z) : y, z \in \mathbb{R}\} \\ &= \{y(1, 1, 0) + z(-2, 0, 1) : y, z \in \mathbb{R}\} = W = L\{(1, 1, 0), (-2, 0, 1)\}. \end{aligned}$$

Luego una base para W es $B = \{v_1 = (1, 1, 0), v_2 = (-2, 0, 1)\}$. Ortogonalizamos la base B :

$$w_1 = v_1 = (1, 1, 0).$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = (-2, 0, 1) - \frac{\langle (-2, 0, 1), (1, 1, 0) \rangle}{\|(1, 1, 0)\|^2} (1, 1, 0) = (-1, 1, 1),$$

luego

$$\{w_1, w_2\} = \{(1, 1, 0), (-1, 1, 1)\} \quad \text{es base ortogonal para } W.$$

Normalizando esta base, obtenemos

$$\begin{aligned} u_1 &= \frac{(1, 1, 0)}{\sqrt{2}} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right) \\ u_2 &= \frac{(-1, 1, 1)}{\sqrt{3}} = \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \end{aligned}$$

$$\{u_1, u_2\} = \left\{ \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \left(-\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}} \right) \right\} \quad \text{es base ortonormal para } W.$$

Ejercicio 6.5. Decida si el conjunto $\{1, x, x^2\}$ es ortogonal, donde el producto interno en P_2 está definido por $\langle p, q \rangle = \int_{-1}^1 p(x)q(x)dx$.

Solución 6.5.

La condición de ortogonalidad implica que $\langle p, q \rangle = 0$.

$$a) \quad \langle 1, x \rangle = \int_{-1}^1 x dx = 0.$$

$$b) \quad \langle x, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^3 dx = 0.$$

$$c) \quad \langle 1, x^2 \rangle = \int_{-1}^1 x^2 dx \neq 0.$$

En consecuencia, no son mutuamente ortogonales, luego el conjunto no es ortogonal.

Ortonormalicemos el conjunto $\{1, x, x^2\}$:

$$w_1 = v_1 = 1.$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = x - \frac{\int_{-1}^1 x dx}{2} (1) = x.$$

$$w_3 = v_3 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 = x^2 - \frac{\langle x^2, x \rangle}{\|x\|^2} (x) - \frac{\langle x^2, 1 \rangle}{\|1\|^2} (1) = x^2 - \frac{1}{3}.$$

Así que,

$$w_1 = \{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\} \text{ es la base ortogonalizada.}$$

Ahora, normalizamos $\{1, x, x^2 - \frac{1}{3}\}$,

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

$$u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{x}{\sqrt{\frac{2}{3}}} = \sqrt{\frac{3}{2}}x.$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\langle x^2 - \frac{1}{3}, x^2 - \frac{1}{3} \rangle}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\int_{-1}^1 (x^2 - \frac{1}{3})^2 dx}} = \frac{x^2 - \frac{1}{3}}{\sqrt{\frac{8}{45}}} = \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right).$$

Por consiguiente

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2}}, \sqrt{\frac{3}{2}}x, \sqrt{\frac{45}{8}} \left(x^2 - \frac{1}{3} \right) \right\} \text{ es la base ortonormal pedida.}$$

Ejercicio 6.6. Sea $V = M_{2 \times 2}$ con producto interno:

$$\langle A, B \rangle = \text{tr}(B^t A).$$

- a) Encontrar el ángulo entre $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$.
- b) Encontrar una base ortonormal de la base

$$S = \{v_1, v_2, v_3\} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \right\}.$$

Solución 6.6.

- a) Se propone como ejercicio calcular el ángulo entre las dos matrices usando como producto interno la traza y como norma de una matrices, la suma de las componentes al cuadrado.

Otra forma de hacer el ejercicio es la siguiente:

Como el conjunto de matrices 2×2 $M_{2 \times 2}$ es isomorfo a \mathbb{R}^4 (se deja como ejercicio la demostración), entonces podemos decir que

$$u = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix} \leftrightarrow (1, 2, 3, 2), \quad v = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \leftrightarrow (2, 1, 0, -1).$$

Luego, aplicando la fórmula $\langle u, v \rangle = \|u\| \|v\| \cos \varphi$ con el producto interno en \mathbb{R}^4 , obtenemos

$$\cos \varphi = \frac{\langle p, q \rangle}{\|p\| \|q\|} = \frac{\langle (1, 2, 3, 2), (2, 1, 0, -1) \rangle}{\sqrt{1^2 + 2^2 + 3^2 + 2^2} \sqrt{2^2 + 1^2 + (-1)^2}} = \frac{2}{\sqrt{18} \sqrt{6}} = \frac{1}{3 \sqrt{3}}$$

$$\varphi = \arccos \left(\frac{1}{3 \sqrt{3}} \right) \approx 78^\circ.$$

b) Siguiendo el procedimiento de ortonormalización, se tiene:

$$w_1 = v_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$w_2 = v_2 - \frac{\langle v_2, w_1 \rangle}{\|w_1\|} w_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\right)}{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{aligned} w_3 &= v_3 - \frac{\langle v_3, w_1 \rangle}{\|w_1\|^2} w_1 - \frac{\langle v_3, w_2 \rangle}{\|w_2\|^2} w_2 \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)}{1^2 + 1^2 + 1^2 + 0^2} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr}\left(\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\right)}{1^2 + (-1)^2 + 2^2 + 0^2} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr}\begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{\text{tr}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} - \frac{4}{3} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} - \frac{5}{6} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \frac{1}{6} \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Normalizando esta base ortonormal obtenemos:

$$u_1 = \frac{w_1}{\|w_1\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}}{\sqrt{6}} = \frac{1}{\sqrt{6}} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

$$u_2 = \frac{w_2}{\|w_2\|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}}{\sqrt{3}} = \frac{1}{\sqrt{3}} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$$u_3 = \frac{w_3}{\|w_3\|} = \frac{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}}{\frac{\sqrt{49+81+4+64}}{\sqrt{36}}} = \frac{\frac{1}{6} \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}}{\sqrt{\frac{198}{36}}} = \sqrt{\frac{2}{11}} \left(\frac{1}{6}\right) \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix} = \frac{2}{6\sqrt{22}} \begin{pmatrix} -7 & 9 \\ -2 & 8 \end{pmatrix}.$$

6.5. Ejercicios Propuestos

- 1) En el espacio P_2 dotado del producto escalar \langle, \rangle , se sabe que

$$B = \{1 + x + x^2, x + x^2, x^2\}$$

es una base ortonormal. Se pide:

- Hallar la matriz de dicho producto escalar \langle, \rangle en la base $B_c = \{1, x, x^2\}$ de P_2 .
- Dado el subespacio $U = L\{1 + 2x + 3x^2\}$, determine el espacio U^\perp (complemento ortogonal de U). Obtenga una base ortonormal de U^\perp .
- Hallar la mínima distancia del vector x^2 al subespacio U^\perp .
- Se considera la aplicación $T : P_2 \rightarrow P_2$ definida, $T(p)$ =proyección ortogonal de p sobre U^\perp . Estudia si T es lineal y, en caso afirmativo, determinar la matriz asociada a T en una base (de P_2) a elegir ¿Puede ser dicha matriz ortogonal?

- 2) En el espacio euclídeo \mathbb{R}^3 dotado del producto escalar \langle, \rangle , se sabe que

$$B = \{(1, 1, 1), (0, 1, 1), (0, 0, 1)\}$$

es una base ortonormal. Se pide:

- Hallar la matriz de dicho producto escalar \langle, \rangle en la base B_c de \mathbb{R}^3 , siendo $B_c = \{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$.
- Dado el subespacio $U = L\{(1, 2, 3)\}$, determina el espacio U^\perp . Obtenga una base ortonormal de U^\perp .
- Hallar la mínima distancia del vector $v = (0, 0, 1)$ al subespacio U^\perp .
- Se considera la aplicación $T : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ definida para todo $u \in \mathbb{R}^3$, $T(u)$ =proyección ortogonal de u sobre U^\perp . Estudiar si T es lineal y, en caso afirmativo, determinar la matriz asociada a T en una base (de \mathbb{R}_3) a elegir ¿Puede ser dicha matriz ortogonal?

- 3) Dados $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$. Se define la aplicación $f : P_2 \times P_2 \rightarrow \mathbb{R}$ mediante

$$f(a + bx + cx^2, a' + b'x + c'x^2) = (a, b, c) \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & \alpha \\ -1 & \alpha & \beta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a' \\ b' \\ c' \end{pmatrix}$$

Se pide:

- a) Determinar el conjunto de valores de los parámetros α, β para los que f define un producto escalar en P_2 . Representa dicho conjunto en el plano (α, β) .

Para los tres apartados siguientes (todo ellos referidos al producto escalar definido por f), supondremos que $\alpha = 0$ y $\beta = 2$.

- b) Calcula una base ortonormal de P_2 .
c) Hallar la mínima distancia del polinomio $p(x) = 1$ al subespacio

$$S = L\{x, x^2\}.$$

- d) Obtenga el ángulo entre el polinomio $p(x) = 1$ y el subespacio S^\perp .

- 4) En el espacio euclideo de $M_{2 \times 2}$ dotado del producto escalar \langle, \rangle , se sabe que

$$B = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \right\}$$

es una base ortonormal. Se pide:

- a) Hallar la matriz del producto escalar \langle, \rangle , en la base de $M_{2 \times 2}$.
b) Dado el subespacio $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} \right\}$, determinar su complemento ortogonal.
c) Hallar la distancia (mínima) de la matriz $A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ y el subespacio S .
d) Halle el ángulo entre la matriz $A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y el subespacio S .
5) En el espacio vectorial euclideo \mathbb{R}^3 , dotado del producto escalar usual, indicar y razonar si cada una de las aplicaciones $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, $g : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ y $h : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, definidas en la base canónica de \mathbb{R}^3 , respectivamente por:

$$f(x, y, z) = \left(x, \frac{\sqrt{2}}{2}y - \sqrt{2}z, \sqrt{2}y + \sqrt{2}z \right).$$

$$g(x, y, z) = (x \cdot t + z, x - y - 2z, x + y + z).$$

$$h(x, y, z) = ((7x - 2y - 5z)/6, (-2x + 2y - 2z)/6, (-5x - 2y + 7z)/6).$$

Es: a) lineal, b) automorfismo, d) ortogonal.

- 6) En el espacio vectorial euclideo real V , con producto escalar \langle, \rangle , se considera la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ y el subespacio $S = \{v_1 - v_2, v_2 - v_3\}$.

La matriz del producto escalar \langle, \rangle en la base B es

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 1 \\ 2 & 3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Se pide:

- 1) Probar que A , efectivamente, puede ser un producto escalar.
 - 2) Hallar una base ortonormal al subespacio S .
 - 3) Hallar la distancia del vector v_3 al subespacio S .
 - 4) Determinar S^\perp .
- 7) Se define la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$, mediante

$$f(x, y) = (x_1, x_2, x_3) \begin{pmatrix} 2 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x^t A y$$

donde $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}$ son la expresión de x e y por medio de sus coordenadas en la base $B = \{v_1, v_2, v_3\}$. Se pide:

- 1) Demostrar que f define un producto escalar en \mathbb{R}^3 .
- 2) Hallar una base ortonormal de \mathbb{R}^3 , respecto del producto escalar de f .
- 3) Hallar la proyección ortogonal del vector $w = b_1 + b_2 + b_3$ sobre

$$S = L\{b_1 + b_2, b_2 - b_3\}.$$

- 8) Dada la aplicación $f : \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

$$f((x_1, x_2, x_3), (y_1, y_2, y_3)) = (x_1 \ x_2 \ x_3) \begin{pmatrix} 2 & 2 & 4 \\ 2 & 5 & 3 \\ 4 & 3 & 12 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

Se pide

- (1) Probar que la aplicación f define un producto escalar en \mathbb{R}^3 .
- (2) Calcular una base ortonormal, para este producto escalar, en \mathbb{R}^3 .

- (3) Calcular la distancia $d(u, H)$, según el producto escalar f , siendo

$$u = (1, 1, 1) \quad y \quad H = L\{1, 2, 3\}.$$

- 9) En el espacio vectorial P_3 de los polinomios con coeficientes reales y grado menor o igual que tres, se consideran los conjuntos

$$U = \{p \in P_3 : p(x) = a + bx^3; \quad a, b \in \mathbb{R}\}.$$

$$V = \{p \in P_3 : p(x) = (\lambda - \mu) + \mu x + \mu x^2 + (\lambda + \mu)x^3; \lambda, \mu \in \mathbb{R}\}.$$

Se pide:

- a) Probar que U y V son subespacios vectoriales de P_3 y calcular una base de cada uno de ellos. Hallar una base de cada uno de los subespacios $U + V$ y $U \cap V$.
- b) Considerando en P_3 el producto escalar definido por:

$$\langle a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3, b_0 + b_1x + b_2x^2 + b_3x^3 \rangle = a_0b_0 + a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

calcular la distancia (mínima) del polinomio $p(x) = 1 + 3x$ al subespacio V .

- 10) Sea $B = \{e^{-nx}, e^{-(n-1)x}, \dots, e^{-x}, 1, e^x, \dots, e^{(n-1)x}, e^{nx}\}$ con $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$ una base del espacio vectorial real V con las operaciones usuales de suma y producto por escalar, de funciones reales de variable real. Sea T

$$T : V \rightarrow V; \quad T(f) = f'' - f' - 2f.$$

- (a) Demuestra que T es lineal.
- (b) Hallar la matriz asociada a T en la base B .
- (c) Calcular una base ortogonal de N_T para el producto escalar

$$\langle f, g \rangle = \int_0^1 f(x)g(x)dx.$$

- 11) Sea $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal hermitiana tal que $T^n(x) = 0$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Entonces $T(x) = 0$.
- 12) Sea V un espacio euclideo complejo y $T : V \rightarrow V$ es normal, si $T^* \circ T = T \circ T^*$. Demuestre que $\|T^*(x)\| = \|T(x)\|$ para todo $x \in V$.

Vectores y valores propios

En este capítulo vamos a estudiar el concepto de valor y vector propio de una transformación lineal o de la matriz que se obtiene de una transformación lineal, así como algunos métodos numéricos para calcular dichos valores y vectores propios. Es decir, dada una matriz A de orden $n \times n$ (o $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$) queremos hallar $\lambda \in \mathbb{C}$ para los cuales existe en $x \neq 0$ tales que $Ax = \lambda x$ donde λ es un valor propio y $x \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio asociado a este último.

Definición 7.1. Sea V un espacio vectorial y $T : V \rightarrow V$ una transformación lineal, un escalar λ es un valor propio de T si existe un elemento no nulo $x \in V$ tal que $T(x) = \lambda x$.

El elemento x se llama vector propio (o autovector propio de T) de T , perteneciente a λ y λ se llama autovalor propio correspondiente a x .

Teorema 7.1. Existe un solo autovalor propio correspondiente a un autovector propio x .

Demostración 7.1.

Si $T(x) = \lambda x$ y $T(x) = \mu x$, entonces $\lambda x = \mu x$.

$$(\lambda - \mu)x = 0 \quad \text{como } x \neq 0 \Rightarrow \lambda = \mu.$$

Ejemplo 7.1. Sea $T : V \rightarrow V$, $T(x) = cx$ para todo $x \in V$ y $c \in \mathbb{R}$. Encuentre los valores propios de T .

Solución 7.1.

En este caso $\lambda = c$ es un valor propio de T y todo $0 \neq x \in V$ es un autovector propio de T .

Ejemplo 7.2. Sea $T : V \rightarrow V$, $T(x) = 0$. Encuentre los valores y vectores propios de T .

Solución 7.2.

$T(x) = 0 = 0x$ para todo $x \in V$, luego $\lambda = 0$ es un valor propio de T y todos los elementos de V son vectores propios de T .

Ejemplo 7.3. Sea $T : V \rightarrow V$, donde V es el conjunto de todas las funciones derivables. $T(f) = f'$ calcular los valores propios.

Solución 7.3.

$$T(f) = f' = \lambda f \Rightarrow f(x) = ce^{\lambda x},$$

donde λ es un valor propio correspondiente al vector propio $f(x) = ce^{\lambda x}$.

Ejemplo 7.4. Si estamos en dimensión finita, entonces $T : V \rightarrow V$; se puede representar como:

Solución 7.4.

$T(x) = Ax$, luego λ es un valor propio de T si λ es un valor propio de A , es decir, $Ax = \lambda x$ para todo $x \in V$ donde x es su correspondiente vector propio.

Ejemplo 7.5. Calcular los valores propios de A ; donde $A = \begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix}$.

Solución 7.5.

$$\begin{pmatrix} 10 & -18 \\ 6 & -11 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 10x - 18y \\ 6x - 11y \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}.$$

$$10x - 18y = \lambda x$$

$$6x - 11y = \lambda y.$$

Resolviendo el sistema obtenemos

$$\frac{x(10 - \lambda)}{6x} = \frac{18y}{y(\lambda + 11)} \Rightarrow \frac{10 - \lambda}{6} = \frac{18}{\lambda + 11}$$

$$110 - 11\lambda + 10\lambda - \lambda^2 = 108$$

$$\lambda^2 + \lambda - 2 = 0$$

$$(\lambda + 2)(\lambda - 1) = 0.$$

Los valores propios $\lambda = -2$ y $\lambda = 1$.

Si $\lambda = 1$, su vector propio correspondiente es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$.

Si $\lambda = -2$, su vector propio correspondiente es $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 2 \end{pmatrix}$.

Teorema 7.2. Sea A una matriz $n \times n$. Entonces λ es un valor propio de A si y sólo si

$$P(\lambda) = \det(A - \lambda I) = 0.$$

Donde $P(\lambda)$ es el polinomio característico y el lado derecho de la igualdad es su ecuación característica.

Demostración 7.2. La demostración se deja como ejercicio.

El polinomio característico $P(\lambda) = \det(A - \lambda I)$ por el Teorema fundamental del álgebra, tiene n raíces (contando multiplicidades). Por ejemplo $P(x) = (1 - x)^5$ tiene 5 raíces todas iguales a 1, por lo tanto toda la matriz $n \times n$ tiene exactamente n valores propios.

Ejemplo 7.6. Calcular los valores propios de $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 4 \\ -1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$.

Solución 7.6.

$$P(\lambda) = \begin{vmatrix} \lambda - 2 & -1 & -1 \\ -2 & \lambda - 3 & -4 \\ 1 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = (\lambda - 1)(\lambda + 1)(\lambda - 3).$$

Esto implica que $\lambda = 1$, $\lambda = -1$, $\lambda = 3$ valores propios distintos.

Resolvemos $Ax = x$ para $\lambda = 1$

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ -2 & -2 & -4 \\ 1 & 1 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} -1 & -1 & -1 \\ 0 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

$$x_3 = 0 \Rightarrow x_1 + x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = -x_2 \quad x_2 = t.$$

El vector propio para $\lambda = 1$ es $t(-1, 1, 0)$ donde $t \neq 0 \in \mathbb{R}$.

El vector propio para $\lambda = -1$ es $t(0, 1, -1)$ donde $t \neq 0 \in \mathbb{R}$.

El vector propio para $\lambda = 3$ es $t(2, 3, -1)$ donde $t \neq 0 \in \mathbb{R}$.

Ejemplo 7.7.

Encuentre los autovalores propios repetidos de $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 1 \\ 0 & 3 & -1 \\ 2 & 1 & 3 \end{pmatrix}$.

Solución 7.7. Se puede mostrar que los valores propios de A son $\lambda = 2, 2, 4$.

$Ax = 2x$, resolvemos el sistema

$$\begin{aligned} x_2 - x_3 &= 0 \\ -x_2 + x_3 &= 0 \\ -2x_1 - x_2 - x_3 &= 0. \end{aligned}$$

Obtenemos $x_1 = -x_2 = -x_3$ los vectores propios son de la forma $t(1, -1, 1)$ $t \in \mathbb{R}$.

Si $\lambda = 4$ obtenemos los vectores propios $t(1, -1, 1)$ $t \neq 0$.

Teorema 7.3. Si λ es un valor propio de una matriz A de orden $n \times n$, entonces $E_\lambda = \{x : Ax = \lambda x\}$ es un subespacio C^n (\mathbb{R}^n si la matriz y los valores propios son reales). En este caso E_λ es llamado espacio propio de A correspondiente a λ .

Demostración 7.3.

Sea $x, y \in E_\lambda$, esto implica que $Ax = \lambda x$ y $Ay = \lambda y$.

$$\begin{aligned} A(x + y) &= Ax + Ay = \lambda x + \lambda y = \lambda(x + y) \in E_\lambda \\ A(\alpha x) &= \alpha Ax = \alpha(\lambda x) = \lambda(\alpha x) \in E_\lambda. \end{aligned}$$

En el ejemplo 7.6 se tiene que $\dim E_1 = \dim E_{-1} = \dim E_3 = 1$.

En el ejemplo 7.7 se tiene que $\dim E_2 = \dim E_4 = 1$.

Ejemplo 7.8. Sea $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 4 \end{pmatrix}$

- a) Mostrar que $P(\lambda) = (\lambda - 1)(\lambda - 1)(\lambda - 7)$ es decir, los valores propios de A son $\lambda = 1, 1$ y $\lambda = 7$.

b) *Mostrar que $E_1 = \{(x, y, z) : x(1, 0, -1) + y(0, 1, -1), a, b \in \mathbb{R}\}$, $\dim E_1 = 2$*

$$E_7 = \{(x, y, z) : x(1, 2, 3) \mid x \in \mathbb{R}\}, \quad \dim E_7 = 1.$$

Solución 7.8.

Queda como ejercicio verificar a) y b).

En este ejemplo la dimensión del espacio propio correspondiente al valor propio repetido $\lambda = 1$ es generado por dos vectores, lo cual es diferente a los ejemplos anteriores, que son generados por un vector.

Teorema 7.4. *Sea A una matriz $n \times n$ y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ valores propios distintos de A , con vectores propios correspondientes v_1, \dots, v_n . Entonces v_1, \dots, v_n son linealmente independientes. Además forman una base.*

Demostración 7.4.

Si demostramos que los vectores propios son linealmente independientes, estaremos mostrando que forman una base de \mathbb{R}^n . Demostraremos por inducción sobre el número de vectores y valores propios n . El resultado es inmediato para $n = 1$. Supongamos que el enunciado es cierto para $n - 1$ vectores propios. Sean $v_1, v_2, \dots, v_{n-1}, v_n$ n vectores propios que tienen n valores propios distintos $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-1}, \lambda_n$ y supongamos que existen a_i para $i = 1, 2, \dots, n$ tal que

$$a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n = 0 \quad (1).$$

Aplicando una transformación lineal T en ambos lados, obtenemos

$$T(a_1 v_1 + a_2 v_2 + \dots + a_n v_n) = T(0) = 0$$

$$a_1 T(v_1) + a_2 T(v_2) + \dots + a_n T(v_n) = 0$$

$$a_1 \lambda_1 v_1 + a_2 \lambda_2 v_2 + \dots + a_n \lambda_n v_n = 0 \quad (2).$$

Multiplcando la ecuación (1) por λ_n y restando esta ecuación con (2), obtenemos

$$\sum_{i=1}^{n-1} a_i (\lambda_i - \lambda_n) v_i = 0.$$

Pero como v_1, v_2, \dots, v_{n-1} son linealmente independientes, entonces $a_i (\lambda_i - \lambda_n) = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$.

Como $\lambda_i \neq \lambda_n$, entonces $c_i = 0$ para $i = 1, 2, \dots, n - 1$. Por la ecuación (1) se tiene que $c_n = 0$ por lo tanto v_1, v_2, \dots, v_n es linealmente independiente.

Ejemplo 7.9. Sea $A = \begin{pmatrix} 3 & -5 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ Calcular los valores propios, los vectores propios y los espacios propios correspondientes a los vectores propios de A .

Solución 7.9.

Por definición

$$\det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 3 - \lambda & -5 \\ 1 & -1 - \lambda \end{vmatrix} = \lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0,$$

esto implica que $\lambda = 1 \pm i$.

Luego

$$\begin{aligned} \lambda_1 = 1 + i, \quad \lambda_2 = 1 - i, \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \end{pmatrix}, \quad E_{1+i} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 + i \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \\ v_2 = \begin{pmatrix} 2 - i \\ 1 \end{pmatrix} \quad y \quad E_{1-i} = \text{gen} \left\{ \begin{pmatrix} 2 - i \\ 1 \end{pmatrix} \right\}. \end{aligned}$$

7.1. Matrices semejantes y diagonalización

El propósito de estudiar este concepto, es analizar bajo qué circunstancia, si se tiene una matriz cuadrada, existe otra matriz semejante a ella que sea diagonal, es decir que tenga los mismos valores propios.

Definición 7.2. Se dice que dos matrices A y B son semejantes si existe una matriz invertible C de $n \times n$ tal que $B = C^{-1}AC$.

$$B = C^{-1}AC \Leftrightarrow CB = AC.$$

Ejemplo 7.10. Demuestre que $T(A) = C^{-1}AC$ es lineal $T : M_{n \times n} \rightarrow M_{n \times n}$.

Solución 7.10.

Es inmediato por las propiedades de las matrices.

Teorema 7.5. Si A y B son matrices semejantes $n \times n$, entonces A y B tienen el mismo polinomio característico y por lo tanto los mismos valores propios.

Demostración 7.5.

Si $B = C^{-1}AC$

$$\begin{aligned}\det(B - \lambda I) &= \det(C^{-1}AC - \lambda I) = \det(C^{-1}AC - C^{-1}(\lambda I)C) \\ &= \det(C^{-1}[AC - \lambda IC]) = \det(C^{-1}(A - \lambda I)C) \\ &= \det(C^{-1}) \det(A - \lambda I) \det(C) \\ &= \det C^{-1} \det C \det(A - \lambda I) = \det(A - \lambda I).\end{aligned}$$

Definición 7.3. Una matriz $A_{n \times n}$ es diagonalizable si existe una matriz diagonal D tal que A es semejante a D .

El problema radica en cómo encontrar la matriz D semejante a una matriz dada A .

Verificar que una matriz es semejante a otra es fácil, pero encontrar dicha matriz no lo es, tenemos que recurrir al siguiente teorema:

Teorema 7.6. Una matriz $A_{n \times n}$ es diagonalizable si y sólo si tienen n vectores propios linealmente independientes. En tal caso, la matriz D es semejante a A y viene dada por

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & & & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

Donde $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son valores propios de A y C es una matriz cuyas columnas son vectores propios linealmente independientes de A .

$D = C^{-1}AC$, es decir, una matriz A es diagonalizable si tiene valores propios distintos.

Demostración 7.6. La demostración se propone como ejercicio.

Ejemplo 7.11. Si $A = \begin{pmatrix} 4 & 2 \\ 3 & 3 \end{pmatrix}$, muestre que A es diagonalizable y escriba A como $A = C^{-1}DC$.

Solución 7.11.

Se deja como ejercicio resolver el ejemplo.

En general no toda matriz es diagonalizable, pero las matrices simétricas tienen la propiedad de serlo.

Teorema 7.7. Sea A una matriz simétrica real $n \times n$, entonces los valores propios de A son reales.

Demostración 7.7.

Sea λ un valor propio de A con vector propio x , $Ax = \lambda x$, $x \in \mathbb{C}^n$.

Recordemos

$$\langle \alpha x, y \rangle = \alpha \langle x, y \rangle$$

$$\langle x, \alpha y \rangle = \bar{\alpha} \langle x, y \rangle$$

$$\langle Ax, x \rangle = \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle.$$

Como $A = A^t$, entonces

$$\langle Ax, x \rangle = \langle x, A^t x \rangle = \langle x, Ax \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle,$$

luego

$$\lambda \|x\|^2 = \bar{\lambda} \|x\|^2 \Rightarrow \lambda = \bar{\lambda}.$$

Si

$$\lambda = a + bi \Rightarrow \bar{\lambda} = a - bi,$$

entonces $a + bi = a - bi$ esto implica que $b = 0$ por lo tanto $\lambda = a \in \mathbb{R}$.

Teorema 7.8. Sea A una matriz simétrica real $n \times n$, si λ_1 y λ_2 son valores propios de A distintos, con correspondientes vectores propios v_1 , v_2 , entonces v_1 , v_2 son ortogonales.

Demostración 7.8.

Tenemos:

$$A \cdot v_1 = \lambda_1 v_1 \cdot v_2 = \lambda_1 (v_1 \cdot v_2) \quad (1)$$

y

$$Av_1 \cdot v_2 = v_1 \cdot A^t v_2 = v_1 \cdot (\lambda_2 v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2), \quad (2)$$

luego por (1) y (2), se concluye que

$$\lambda_1 (v_1 \cdot v_2) = \lambda_2 (v_1 \cdot v_2) \Rightarrow (\lambda_1 - \lambda_2) (v_1 \cdot v_2) = 0,$$

como $\lambda_1 \neq \lambda_2 \Rightarrow v_1 v_2 = 0$.

Esto significa que si $A_{n \times n}$ es simétrica entonces A tiene n vectores propios ortonormales.

Definición 7.4. Se dice que una matriz A $n \times n$ es diagonalizable ortogonalmente si existe una matriz ortogonal Q tal que

$$Q^T A Q = D \quad \text{donde} \quad D = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_n)$$

y $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ son valores propios de A . En este caso $Q^t = Q^{-1}$.

Teorema 7.9. Sea A una matriz real $n \times n$. Entonces A es diagonalizable si y sólo si A es simétrica.

Demostración 7.9.

Si A es simétrica, entonces por el teorema anterior A es diagonalizable ortonormalmente, por lo tanto existe una matriz Q cuyas columnas son los vectores propios dados en el teorema anterior.

Supongamos que A es diagonalizable ortogonalmente, entonces existe una matriz Q tal que

$$Q^t A Q = D \Rightarrow Q Q^t A Q Q^t = Q D Q^t \Rightarrow A = Q D Q^t,$$

entonces

$$A^t = (Q D Q^t)^t = (Q^t)^t D^t Q^t = Q D Q^t = A,$$

luego A es simétrica.

Observación Procedimiento para encontrar una matriz diagonalizable:

- i) Encuentre una base para cada espacio propio de A .
- ii) Encuentre la base ortonormal para cada espacio propio de A .
- iii) Escriba Q como la matriz cuyas columnas son los vectores propios ortonormales obtenidos en ii)

Ejemplo 7.12. Diagonalizar la matriz simétrica A 2×2 , usando una matriz ortogonal.

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix} \quad A = A^T.$$

Solución 7.12.

$$\begin{vmatrix} 3 - \lambda & 4 \\ 4 & -3 - \lambda \end{vmatrix} = (3 - \lambda)(-3 - \lambda) = 0 \Rightarrow -(9 - \lambda^2) - 16 = 0$$

$$\lambda^2 - 25 = 0 \Rightarrow \lambda = 5, \lambda = -5.$$

Si $\lambda = 5$

$$\begin{pmatrix} 3-5 & 4 \\ 4 & -3-5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 4 & -8 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} -2 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$-2x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_1 = 2x_2,$$

(donde \sim significa en este caso, equivalencia por filas), por consiguiente

$$E_5 = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) = x_2(2, 1)\} \quad v_1 = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \quad \|v_1\| = \sqrt{5} \quad u_1 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Si $\lambda = -5$

$$\begin{pmatrix} 3+5 & 4 \\ 4 & -3+5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 8 & 4 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$8x_1 + 4x_2 = 0 \Rightarrow x_2 = -2x_1,$$

por lo tanto

$$E_{-5} = \{(x_1, x_2) : (x_1, x_2) = x_2(1, -2)\}, \quad v_2 = \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}, \quad \|v_2\| = \sqrt{5} \quad y \quad u_2 = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \end{pmatrix}.$$

$$Q = \frac{1}{\sqrt{5}} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad Q^T = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \quad D = \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} A = QDQ^T &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 5 & 0 \\ 0 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} \\ &= \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 10 & -5 \\ 5 & 10 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \frac{1}{5} \begin{pmatrix} 15 & 20 \\ 20 & -15 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 4 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

7.2. Transformación lineal adjunta

Ejemplo 7.13. Sea V un espacio euclideo, para cada $a \in V$ fijo, sea $T(x) = \langle a, x \rangle$. Muestre que

- i) T es lineal
- ii) T es biyectivo.

Solución 7.13.

$$i) \quad T(x+y) = \langle a, x+y \rangle = \langle a, x \rangle + \langle a, y \rangle = T(x) + T(y)$$

$$T(\lambda x) = \langle a, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle a, x \rangle = \bar{\lambda} T(x).$$

ii) T es biyectivo

$$T(x) = T(y) \Rightarrow \langle a, x \rangle = \langle a, y \rangle$$

$$\langle a, x + y \rangle = 0 \text{ si } a = x - y,$$

entonces

$$\langle x - y, x - y \rangle = 0 \Rightarrow x - y = 0 \Rightarrow x = y,$$

luego T es inyectiva. Claramente T es sobre por definición, por consiguiente T es biyectiva.

Si V es un espacio euclideo y U una transformación lineal de V en V , para cada $x \in V$ fijo, definimos la forma lineal

$$T_x(z) = \langle U(z), x \rangle.$$

Claramente U es una transformación lineal. Su demostración se deja como ejercicio.

Como T_x es biyectiva por el ejemplo anterior, entonces existe un $z \in V$ tal que $T_z(x) = \langle z, y \rangle$, por lo tanto definimos $T^* : V \rightarrow V$; tal que

$$\langle z, T^*(x) \rangle = \langle T(z), x \rangle,$$

la función T^* se llama transformación adjunta de T .

Teorema 7.10. T^* es una transformación lineal.

Demostración 7.10.

$$\begin{aligned} \langle z, T^*(x + y) \rangle &= \langle T(z), x + y \rangle = \langle T(z), x \rangle + \langle T(z), y \rangle \\ &= \langle z, T^*(x) \rangle + \langle z, T^*(y) \rangle \\ &= \langle z, T^*(x) + T^*(y) \rangle, \end{aligned}$$

luego $T^*(x + y) = T^*(x) + T^*(y)$.

$$\langle z, T^*(\lambda x) \rangle = \langle T(z), \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle T(z), x \rangle = \bar{\lambda} \langle z, T^*(x) \rangle = \langle z, \lambda T^*(x) \rangle$$

$$T^*(\lambda x) = \lambda T^*(x).$$

Observación Si $T(x) = Ax$ y los elementos de A son reales, entonces $T^*(x) = A^*x$ donde A^* es la matriz adjunta de la matriz A y en este caso matriz adjunta es la transpuesta $A^* = A^t$.

7.3. Transformaciones lineales hermitianas

Definición 7.5. Sea V un espacio euclideo y S un subespacio de V . Una transformación lineal T es hermitiana en S si:

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle \quad \text{para todo } x, y \in S.$$

Si $V = \mathbb{R}$, las transformaciones lineales hermitianas se llaman simétricas.

Teorema 7.11. Una transformación lineal T es hermitiana si y sólo si $T^* = T$.

Demostración 7.11.

Si T hermitiana, entonces

$$\langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle = \langle T^*(x), y \rangle \Rightarrow T(x) = T^*(x).$$

Si $T = T^*$, entonces

$$\langle T(x), y \rangle = \langle T^*(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle,$$

luego T es hermitiana.

Si $T(x) = Ax$ y T es hermitiana, entonces A es hermitiana y se denota por A^* . Si el espacio es real, entonces a es simétrica, esto es $A = A^t$.

Teorema 7.12. Los valores propios de una función lineal hermitiana son reales.

Demostración 7.12.

Sea λ un valor propio de T , es decir $T(x) = \lambda x$ $x \neq 0$

$$\begin{aligned} \langle T(x), x \rangle &= \langle \lambda x, x \rangle = \lambda \langle x, x \rangle \\ \langle T(x), x \rangle &= \langle x, T(x) \rangle = \langle x, \lambda x \rangle = \bar{\lambda} \langle x, x \rangle, \end{aligned}$$

esto implica que $\lambda = \bar{\lambda}$ luego λ es real.

Teorema 7.13. Si α, β son valores propios distintos de la transformación lineal hermitiana T , entonces E_α y E_β son ortogonales.

Demostración 7.13.

Sean $x \in E_\alpha$ y $y \in E_\beta$, entonces

$$T(x) = \alpha x \quad y \quad T(y) = \beta y$$

$$a) \quad \alpha \langle x, y \rangle = \langle \alpha x, y \rangle = \langle T(x), y \rangle = \langle x, T(y) \rangle.$$

$$b) \quad \beta \langle x, y \rangle = \langle x, \beta y \rangle = \langle x, T(y) \rangle$$

Restando a) y b) obtenemos $(\alpha - \beta) \langle x, y \rangle = 0$, como $\alpha - \beta \neq 0$, entonces $\langle x, y \rangle = 0$.

7.4. Problemas y ejercicios resueltos

Ejercicio 7.1. Verifique que $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix}$ es un vector propio de la matriz

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

Solución 7.1.

El vector \vec{v} es un vector propio de A si existe λ tal que $Av = \lambda v$

$$Av = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 6 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = 2v.$$

Ejercicio 7.2. Demostrar que si A y B son dos matrices de orden $n \times n$ y A es invertible, entonces las matrices $A^{-1}B$ y BA^{-1} tienen los mismos valores propios.

Solución 7.2.

Debemos probar que $\det(A^{-1}B - \lambda I) = \det(BA^{-1} - \lambda I)$.

$$\begin{aligned} \det(A^{-1}B - \lambda I) &= \det(A^{-1}BA^{-1}A - \lambda A^{-1}A) = \det(A^{-1}(BA^{-1} - \lambda I)A) \\ &= \det A^{-1} \det(BA^{-1} - \lambda I) \det A = \det(BA^{-1} - \lambda I). \end{aligned}$$

Puesto que $\det A^{-1} \cdot \det A = 1$.

Ejercicio 7.3. Demuestre que si una matriz cuadrada $n \times n$ tiene n vectores propios linealmente independientes, entonces es semejante a una matriz diagonal D

Solución 7.3.

Sean v_1, v_2, \dots, v_n los n vectores propios linealmente independientes correspondientes a los valores propios $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$, de tal forma $Av_i = \lambda_i v_i$, $i = 1, \dots, n$. Si P es la matriz cuyas columnas son los vectores v_1, v_2, \dots, v_n , entonces

$$\begin{aligned} AP &= (Av_1 \quad Av_2 \quad \dots \quad Av_n) = (\lambda_1 v_1 \quad \lambda_2 v_2 \quad \dots \quad \lambda_n v_n) \\ &= [v_1 \quad v_2 \quad \dots \quad v_n] \begin{pmatrix} \lambda_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{pmatrix} = PD. \end{aligned}$$

Como las n columnas de P son linealmente independientes, entonces P es invertible, así

$$AP = PD \quad \Rightarrow \quad P^{-1}AP = D.$$

Ejercicio 7.4. Dada la matriz $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{bmatrix}$, halle

- El polinomio característico de A .
- Los valores propios de A .
- Una base de cada uno de los subespacios propios. ¿Es A semejante a una matriz diagonal D ?

Solución 7.4.

- Sea $p(\lambda)$ el polinomio característico de A , entonces

$$\begin{aligned} p(\lambda) &= \det(A - \lambda I) = \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 & 2 \\ 0 & 2 - \lambda & 1 \\ -1 & 2 & 2 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda) \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 - \lambda & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} \\ &= (2 - \lambda)((1 - \lambda)(2 - \lambda) + 2) - 2(1 - \lambda) - 2 \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 4) - (4 - 2\lambda) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 4 - 2) = (2 - \lambda)(\lambda^2 - 3\lambda + 2) \\ &= (2 - \lambda)(\lambda - 2)(\lambda - 1) = (\lambda - 2)^2(1 - \lambda). \end{aligned}$$

- Los valores propios de A son las raíces del polinomio característico, así $p(\lambda) = 0$ implica $\lambda = 2$ (multiplicidad 2), y $\lambda = 1$.
- El subespacio propio correspondiente al valor propio λ se define como

$$E(\lambda) = \{v \in \mathbb{R}^3 : Av = \lambda v\} = \{v \in \mathbb{R}^3 : (A - \lambda I)v = 0\}.$$

Para $\lambda = 2$ resolvemos el sistema homogéneo $(A - 2I)v = 0$

$$A - 2I = \begin{pmatrix} -1 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)f_3 + f_1 \\ (-2)f_2 + f_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde, $z = 0$, $2y - x = 0$, así $v = (x, y, z) = (2y, y, 0) = y(2, 1, 0) \quad y \in \mathbb{R}$

$$E_2 = \{y(2, 1, 0) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (2, 1, 0) \rangle$$

Una base de E_2 es $\{(2, 1, 0)\}$, $\dim E_2 = 1$.

Para $\lambda = 1$ resolvemos el sistema homogéneo $(A - I)v = 0$

$$A - I = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-2)f_2 + f_1 \\ (-1)f_2 + f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde $y + z = 0$ y $y - x = 0$. Así,

$$(x, y, z) = (y, y, -y) = y(1, 1, -1), \quad y \in \mathbb{R}.$$

$$E_1 = \{y(1, 1, -1) : y \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 1, -1) \rangle.$$

El conjunto $\{(1, 1, -1)\}$ es una base de E_1 y $\dim E_1 = 1$.

- d) La matriz A no es semejante a una matriz diagonal, pues no es posible hallar una base de vectores propios para \mathbb{R}^3 , sólo se pueden tener dos vectores propios linealmente independientes, $v_1 = (2, 1, 0)$ y $v_2 = (1, 1, -1)$.

Ejercicio 7.5. Determine si la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ es semejante a una matriz diagonal D . En caso afirmativo, halle una matriz P invertible tal que $P^{-1}AP = D$.

Solución 7.5.

Será semejante a una matriz diagonal si existe una base de vectores propios para \mathbb{R}^3 . Calculemos los valores propios de A y los vectores propios correspondientes.

$$\begin{aligned} \det(A - \lambda) &= \begin{vmatrix} 2 - \lambda & 1 & 1 \\ 2 & 3 - \lambda & 2 \\ 1 & 1 & 2 - \lambda \end{vmatrix} = (1 - \lambda)((2 - \lambda)(4 - \lambda) - 3) \\ &= (1 - \lambda)(\lambda^2 - 6\lambda + 5) = (1 - \lambda)(\lambda - 5)(\lambda - 1) = 0. \end{aligned}$$

Los valores propios son $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 5$.

Iniciemos calculando los vectores propios correspondientes a $\lambda_1 = \lambda_2 = 1$ que son las soluciones no nulas del sistema $(A - I)v = 0$.

$$A - I = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Si $v = (x, y, z)$, entonces $x + y + z = 0$, así

$$(x, y, z) = (x, y, -x - y) = x(1, 0, 1) + y(0, 1, -1),$$

donde x, y no son ceros simultáneamente. Los vectores $v_1 = (1, 0, -1)$ y $v_2 = (0, 1, -1)$ son vectores propios linealmente independientes, correspondientes a los valores propios λ_1 y λ_2 .

Los vectores propios correspondientes a $\lambda_3 = 5$ son las soluciones no nulas del sistema

$$A - 5I = \begin{pmatrix} -3 & 1 & 1 \\ 2 & -2 & 2 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{\substack{(-2)f_3 + f_2 \\ (3)f_3 + f_1}} \begin{pmatrix} 0 & 4 & -8 \\ 0 & -4 & 8 \\ 1 & 1 & -3 \end{pmatrix} \xrightarrow{((1)f_2 + f_1; (-1/4)f_2; (-1)f_2 + f_3)} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

De aquí se deduce que $y = 2z, x = z$.

$$(x, y, z) = (z, 2z, z) = z(1, 2, 1), z \neq 0$$

$v_3 = (1, 2, 1)$ es un vector propio linealmente independiente correspondiente al valor propio $\lambda_3 = 5$.

El conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es linealmente independiente y constituye una base de \mathbb{R}^3 , por tanto A es semejante a una matriz diagonal.

Si P es la matriz cuyas columnas son v_1, v_2, v_3 , entonces P es invertible y por lo tanto se cumple que:

$$D = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 5 \end{pmatrix} = P^{-1}AP, \quad \text{donde} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ejercicio 7.6. Sea T una transformación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 definida por

$$T(x, y, z) = (7x - 2y + z, -2x + 10y - 2z, x - 2y + 7z).$$

Halle si es posible, una base ortonormal B de \mathbb{R}^3 tal que $[T]_{BB}$ sea diagonal. Verifique que $[T]_{BB} = D = P^t[T]_{BB}P$, donde P es ortonormal.

Solución 7.6.

La matriz de la transformación lineal T en la base usual de \mathbb{R}^3 es:

$$A = [T]_{BB} = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$$

como esta matriz es simétrica, es semejante a una matriz diagonal D , donde los elementos de la diagonal son los valores propios de A .

Calculemos los valores propios de A :

$$\begin{aligned}\det(A - \lambda I) &= \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10 - \lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7 - \lambda \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 1 \\ 0 & 6 - \lambda & 12 - 2\lambda \\ 1 & -2 & 7 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (6 - \lambda) \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 7 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (6 - \lambda) \begin{vmatrix} 7 - \lambda & -2 & 5 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -2 & 11 - \lambda \end{vmatrix} \\ &= (6 - \lambda)((7 - \lambda)(11 - \lambda) - 5) = (6 - \lambda)(\lambda^2 - 18\lambda + 72) \\ &= (6 - \lambda)^2(\lambda - 12) = 0,\end{aligned}$$

entonces $\lambda_1 = \lambda_2 = 6$ y $\lambda_3 = 12$.

Calculemos los vectores propios:

Para $\lambda = 6$, hallamos las soluciones no nulas del sistema homogéneo $(A - 6I)v = 0$

$$A - 6I = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (2)f_1 + f_2 \\ (1)f_1 + f_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde, $x - 2y + z = 0$, luego

$$v = (x, y, z) = (x, y - x + 2y) = x(1, 0, -1) + y(0, 1, 2)$$

donde x, y no son ceros simultáneamente.

$v_1 = (1, 0, -1)$ y $v_2 = (0, 1, 2)$ son dos vectores propios linealmente independientes.

Para $\lambda = 12$, hallamos las soluciones no nulas del sistema $(A - 12I)v = 0$

$$A - 12I = \begin{pmatrix} -5 & -2 & 1 \\ -2 & -2 & -2 \\ 1 & -2 & -5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-1)f_2 + f_1 \\ (-1)f(2) + f(3); (-1/2)f(2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -3 & 0 & -3 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (1)f_1 + f_3 \\ (1/3)f_1; (1)f_1 + f_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

De donde, $-x + z = 0$, $y + 2z = 0$. Así

$$v = (x, y, z) = (z, -2z, z) = z(1, -2, 1), \quad z \neq 0, \quad v_3 = (1, -2, 1)$$

es un vector propio linealmente independiente.

El conjunto $\{v_1, v_2, v_3\}$ es una base de vectores propios para \mathbb{R}^3 , además $v_1 \cdot v_3 = 0$, $v_2 \cdot v_3 = 0$.

El vector $v_2 = v_1 \times v_3 = (-2, -2, -2)$ pertenece a E_6 y es perpendicular a v_1 y v_3 .

Sean

$$u_1 = \frac{v_1}{\|v_1\|} = \frac{(1, 0, -1)}{\sqrt{2}}, \quad u_2 = \frac{v_2}{\|v_2\|} = \frac{(-2, -2, -2)}{2\sqrt{3}},$$

$$u_3 = \frac{v_3}{\|v_3\|} = \frac{(1, -2, 1)}{\sqrt{6}}.$$

$B = \{u_1, u_2, u_3\}$ es una base ortonormal de vectores propios para \mathbb{R}^3 , que cumple $[T]_{BB} = D$.

Si P es la matriz cuyas columnas son u_1, u_2 y u_3 , entonces P es ortogonal y se cumple que

$$D = \begin{pmatrix} 6 & 0 & 0 \\ 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & 0 & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} \\ \frac{1}{\sqrt{6}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ 2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \\ 0 & -\frac{1}{\sqrt{3}} & -\frac{2}{\sqrt{6}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{3}} & \frac{1}{\sqrt{6}} \end{pmatrix} = P^t A P.$$

Ejercicios del capítulo 7

- 1) Halle los valores propios de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & a & b \\ 0 & c & d \end{pmatrix}$ y verifique que el $\det(A)$ es igual al producto de los valores propios.
- 2) Si al menos una de las matrices A ó B es invertible, pruebe que el polinomio característico de AB es igual al de BA .
- 3) Sean A una matriz $n \times n$, demuestre que A y A^t tienen el mismo polinomio característico.
- 4) Si A es $n \times n$ y $A^k = 0$ para algún $k \in \mathbb{Z}^+$ muestre que $p(\lambda) = \lambda^n$ (sugerencia: use la definición de valor propio).
- 5) Si v es un vector propio de A asociado al valor propio λ , demuestre que v es un vector propio de A^2 asociado al valor propio λ^2 . Además, demuestre que v es un vector propio de A^k asociado al valor propio λ^k .
- 6) Sea T una rotación de $\pi/2$ radianes en el plano. Muestre que T no tiene vectores propios reales, pero todo $v \neq 0$ es un vector propio de T^2 .
- 7) Si v es un vector propio de A asociado al valor propio λ , demuestre que v es un vector propio de A^2 asociado al valor propio λ^2 . Además, demuestre que v es un vector propio de A^k asociado al valor propio λ^k .
- 8) Sea T una rotación de $\pi/2$ radianes en el plano. Muestre que T no tiene vectores propios reales, pero que todo $v \neq 0$ es un vector propio de T^2 .
- 9) Para cada una de las matrices dadas calcule: el polinomio característico, los valores propios, los subespacios E_λ y su dimensión. Decida si dichas matrices son semejantes a una matriz diagonal D ; en caso afirmativo, halle la matriz P invertible que cumple $P^{-1}AP = D$.

a) $\begin{pmatrix} 2 & -4 & 2 \\ -4 & 2 & -2 \\ 2 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

b) $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

c) $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ -1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$.

d) $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & -3 & 3 \end{pmatrix}.$

- 10) Pruebe que las matrices $\begin{pmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 \\ 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 \\ -3 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ tienen los mismos valores propios, pero no son semejantes.
- 11) Determine a, b, c, d, e y f sabiendo que los vectores $(1, 1, 1)$, $(1, 0, -1)$ y $(1, -1, 0)$ son vectores propios de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ d & e & f \end{pmatrix}.$
- 12) Si A es una matriz invertible y λ es un valor propio de A , demuestre que $1/\lambda$ es un valor propio de A^{-1} .
- 13) Si A es una matriz real de orden n tal que $A^2 = -I$, demuestre que:
- A es invertible.
 - n es par.
 - A no tiene valores propios reales.
 - $\det(A) = 1$.
- 14) Pruebe que A es invertible si y sólo si $\lambda = 0$ no es un valor propio de A .
- 15) Para las matrices dadas, halle una base ortonormal de vectores propios y una matriz ortogonal P tal que $d = P^t A P$.
- $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 3 & -2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$
 - $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 4 \\ 3 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$
- 16) Sea $T(x, y, z) = (2x + y, x + 2y, x + y + z)$ una transformación lineal de \mathbb{R}^3 en \mathbb{R}^3 . ¿Existe una base B de \mathbb{R}^3 tal que $[T]_{BB}$ sea diagonal?. En caso afirmativo, halle dicha base y las coordenadas del vector $v = (1, 1, 2)$ relativas a esta base.

Otros títulos de interés:

- **Estadística básica aplicada,**
Ciro Martínez Bencardino
- **Estadística y muestreo,**
Ciro Martínez Bencardino
- **Fundamentos de estadística.
Para la investigación en educación,**
Mireya Ardila Rodríguez
- **Álgebra lineal y programación lineal**
Francisco Soler, Fabio Molina y
Lucio Rojas.
- **Didáctica de las matemáticas**
Robinson Castro Puche y
Rubby Castro Puche.
- **Fundamentos de matemática**
Francisco Soler Fajardo y
Reinaldo Nuñez.
- **Matemáticas financieras aplicadas**
Jhonny de Jesús Meza Orozco
- **Matemáticas financieras
empresariales**
Jhonny de Jesús Meza Orozco
- **Matemáticas para informática**
Ismael Gutiérrez García.

Introducción al Álgebra lineal



Quienes participamos en el desarrollo de esta obra pretendemos que sea usada como texto guía o de consulta en los primeros cursos de álgebra lineal de pregrado, que deben cursar aquellos estudiantes de ingenierías o matemáticas. Consta de siete capítulos en los que, sin perder de vista la formalidad de los contenidos, el lector podrá encontrarse con una presentación sencilla, práctica y amena haciendo posible un primer acercamiento al estudio del álgebra lineal. Cada capítulo cuenta con una variedad de ejemplos y ejercicios que permiten al lector afianzar los conceptos y resultados que aquí se presentan, de tal manera que hay un avance notable hacia el rompimiento del paradigma tradicional que hace ver los cursos de álgebra lineal con un notable grado de dificultad. Con esto queremos manifestar que junto con el propósito inicial, también deseamos hacer un aporte para que la complejidad de las matemáticas se presente sin perder rigurosidad, pero estando cada vez más al alcance de todos.

Área: Ciencias Exactas

Colección: Matemáticas

ECOE
EDICIONES

