

ALCEU DOS SANTOS MAZZIEIRO  
PAULO ANTÔNIO FONSECA MACHADO

*Descobrimos e aplicando a*

# MATEMÁTICA

MANUAL DO PROFESSOR

**7** <sup>o</sup>  
ano

**Matemática**

**ENSINO  
FUNDAMENTAL**

2ª edição, Belo Horizonte, 2015

ALCEU DOS SANTOS MAZZIEIRO

- Bacharel, licenciado e especialista em Matemática pela UFMG. Atuou como: chefe dos Departamentos de Matemática do Centro Pedagógico, do Colégio Universitário e do Instituto de Ciências Exatas da UFMG; coordenador da área de Matemática do Projeto de Inovação Curricular e Capacitação de Docentes do Ensino Fundamental da Secretaria Estadual de Educação do Estado de Minas Gerais; coordenador da área de Matemática do Projeto de Correção do Fluxo Escolar para o Ensino Fundamental da Secretaria Estadual de Ensino do Estado da Bahia; e membro da equipe de consultores do Projeto de Capacitação de Professores de Ensino Médio da Rede Estadual de Ensino de Minas Gerais.

PAULO ANTÔNIO FONSECA MACHADO

- Bacharel e mestre em Matemática pela UFMG, doutor em Matemática pela Unicamp/UFBA. Atualmente é professor associado do Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da UFMG, do qual foi chefe em vários mandatos.



M477d    Mazzieiro, Alceu dos Santos  
          Descobrimdo e aplicando a matemática;  
          7º ano / texto de Alceu dos Santos Mazzieiro e  
          Paulo Antônio Fonseca Machado;  
          — Belo Horizonte: Dimensão, 2015. 2ª edição.  
          (6º ao 9º ano do ensino  
          fundamental – Matemática)

ISBN - 978 - 85 - 7319 - 500 - 2 (LA)  
ISBN - 978 - 85 - 7319 - 529 - 3 (LP)

1. Matemática-ensino fundamental. I. Machado,  
Paulo Antônio Fonseca. II. Título. III. Série.

CDU 51(075.2)

Ficha elaborada por Rinaldo de Moura Faria CRB/6 nº 1006

Copyright © 2004 by Alceu dos Santos Mazzieiro  
Paulo Antônio Fonseca Machado

Fundadores  
Gilberto Gusmão de Andrade  
Zélia Almeida

Diretora editorial  
Zélia Almeida

Editora  
Pilar Espí

Editores de arte  
Jan Deckers  
Ivan Reis

Coordenadora de produção  
Rúbia Calais

#### PRODUÇÃO EDITORIAL

Projeto gráfico/Capa  
Reginaldo Almeida

Ilustrações  
Júlia Bianchi, Son Salvador e Duke  
desenho técnico: Sérgio Pessoa, Tuim,  
Nivaldo Marques e Carlos Jorge

Revisão  
Alyne Dória

#### PRODUÇÃO GRÁFICA

Editoração eletrônica e Pré-impressão  
Tuim

Todos os direitos reservados à  
**EDITORA DIMENSÃO**  
Rua Rosinha Sigaud, 201 - Caiçara  
Telefax: (31) 3527-8000  
30770-560 - Belo Horizonte (MG)  
www.editoradimensao.com.br

2ª edição, 2015

**Impressão e acabamento:** Editora Fontana Ltda - Abril/2016

## **Estudante,**

Este livro foi elaborado para que você converse bastante na aula de Matemática. Calma, não estamos dizendo para você perturbar o ambiente. Nada disso. A conversa a que nos referimos tem a ver com os exercícios e atividades aqui propostos, que vão estimular você a participar da aula o tempo todo, sozinho ou em grupo.

De que maneira? Fácil: respondendo perguntas, resolvendo e inventando problemas ligados ao dia a dia, montando e desmontando objetos, fazendo contas com a calculadora, interpretando ou fazendo gráficos, desenhando figuras ou interpretando desenhos de figuras, discutindo como resolver ou inventar problemas, descobrindo propriedades dos números e das figuras. Sobretudo, aplicando suas descobertas em problemas da vida prática e em situações relacionadas com as outras matérias que você estuda.

Você verá como a aula de Matemática se torna agradável com a participação de todos.

Use este livro com carinho, pois ele será utilizado no próximo ano por outro aluno. Lembre-se de que não deve desenhar nem escrever nele, nem mesmo seu nome.

Uma última recomendação: crie o hábito de, assim que chegar em casa, fazer os exercícios marcados pela professora ou pelo professor. Principalmente por dois motivos: o primeiro, porque ainda estão em sua memória os assuntos estudados em aula, e o segundo porque, ao deixar para depois, imprevistos podem impedi-lo de resolver os exercícios. E esses são muito importantes para o complemento de sua aprendizagem.

Um abraço,  
Os Autores

# Como você vai usar o livro

Este livro é formado por nove capítulos e um glossário.

Os sete primeiros capítulos visam apresentar o conteúdo teórico e prático do ano escolar correspondente. São divididos em algumas seções temáticas, que por sua vez se subdividem, cada uma, em três partes cujos títulos, conteúdos e objetivos descrevemos a seguir.

Além das seções temáticas, há três outras seções especiais, também descritas à frente.

O capítulo 8 tem por objetivo uma revisão dos assuntos estudados, e o capítulo 9 contém atividades complementares a cada um dos sete primeiros capítulos.

O glossário, que se encontra após o capítulo 9, permite rever o significado de termos usados no livro ou conhecer o significado de novos termos, principalmente os ligados ao dia a dia.

## AS TRÊS PARTES DE CADA SEÇÃO DOS SETE PRIMEIROS CAPÍTULOS:

### EXPLORANDO O QUE VOCÊ JÁ SABE

Esta parte é composta de perguntas sobre assuntos que você já conhece e que são importantes para o estudo que virá a seguir.

### APRENDENDO EM SALA DE AULA

Aqui são colocados diversos exercícios e atividades em sala de aula, que você vai fazer sozinho ou, na maioria das vezes, em grupo, sempre orientado pela professora ou pelo professor.

### APRENDENDO EM CASA

São dispostos nesta parte exercícios e atividades para você resolver em casa. Nunca deixe de fazê-los, pois você e seus colegas irão apresentar e discutir as soluções nas aulas seguintes.

## AS SEÇÕES ESPECIAIS:

### EXPLORANDO O QUE VOCÊ APRENDEU E APRENDENDO MAIS

Nesta seção você encontrará exercícios e atividades propostos como revisão e, principalmente, aplicação do que você aprendeu em problemas práticos.

### SEÇÃO OLÍMPICA

Aqui você terá à sua disposição diversos problemas escolhidos e adaptados das provas da Olimpíada Brasileira de Matemática das Escolas Públicas (OBMEP) e da Olimpíada Brasileira de Matemática (OBM), para você testar suas habilidades matemáticas.

### VERIFIQUE SE VOCÊ APRENDEU

Lista de assuntos estudados no capítulo e números dos exercícios correspondentes. Essa lista é muito importante para que você reveja o estudo, descobrindo se aprendeu todos os assuntos, ou, caso contrário, voltando aos exercícios correspondentes e estudando-os novamente.



## Aos pais

Não faz muito tempo era bastante comum as pessoas terem aversão a Matemática. Motivo havia de sobra, basta reparar nas maneiras como se ensinava: exercícios sem qualquer aplicação prática, relacionados apenas e tão somente com a própria disciplina, davam a sensação de que havia dois mundos, o da Matemática e aquele em que vivemos.

Felizmente, os estudos sobre Educação Matemática e alguns documentos oficiais, como os Parâmetros Curriculares Nacionais, estão contribuindo de maneira decisiva para uma nova visão.

É com base principalmente nesses textos e documentos que propomos uma Matemática agradável, participativa e voltada para todos os contextos do nosso dia a dia. Este livro é feito para que seus filhos sejam preparados para os desafios do mundo atual, no qual, todos sabemos, as transformações ocorrem de forma cada vez mais veloz. Essas rápidas transformações requerem de cada um de nós capacidade de decidir sobre situações novas, criatividade, compreensão das diversas linguagens, além de coragem e competência para o exercício da cidadania.

Para que a aprendizagem de seu filho seja a mais eficiente possível, é necessário que vocês colaborem acompanhando os estudos dele em casa, discutindo as atividades propostas (nunca as resolvendo) e participando do projeto pedagógico da Escola.

Por fim, justificamos com um exemplo cotidiano por que Matemática se deve aprender fazendo. Para entender, observe a reação de uma criança bem pequena que “briga” para tomar a colherzinha da mão de quem a alimenta. Quando consegue, ela começa a levar a colherzinha ao nariz, à testa, até acertar a boca. E daí em diante não admite mais ser alimentada por outra pessoa. Ou seja, ela quer “resolver o problema” sozinha.

Esta criança nos ensina, assim, que desde os primeiros meses de idade o ser humano apresenta como característica essa vontade, essa necessidade de aprender fazendo, em vez de esperar que alguém faça por ele.

Um abraço,  
Os Autores

# SUMÁRIO

## **CAPÍTULO 1** - Números naturais e o dia a dia

Usando os números naturais .....	11
Mais aplicações de números naturais .....	16
Outros cálculos com números naturais .....	20
Um pouco mais sobre múltiplos e divisores .....	27
Usando os fatores dos números .....	31
Múltiplos e divisores comuns .....	36
Seção olímpica .....	44
Verifique se você aprendeu .....	46

## **CAPÍTULO 2** - As figuras geométricas e o dia a dia

Identificando e interpretando figuras .....	49
Medindo ângulos .....	56
Ângulos nos triângulos e nos polígonos .....	66
Ângulos na circunferência e nos polígonos .....	72
Simetrias, dobraduras e suas aplicações .....	77
Seção olímpica .....	82
Verifique se você aprendeu .....	86

## **CAPÍTULO 3** - Frações, decimais e o dia a dia

Aprendendo mais sobre frações .....	89
Aprendendo mais sobre decimais .....	101
História das frações .....	108
Seção olímpica .....	109
Verifique se você aprendeu .....	110

## **CAPÍTULO 4**

### *- Medidas e o dia a dia*

Aprendendo mais sobre medidas .....	113
Medidas de comprimento .....	118
Medindo áreas .....	131
Medidas de massa e capacidade .....	145
Medidas de volume .....	148
Usando medidas de tempo .....	156
Seção olímpica .....	162
Verifique se você aprendeu .....	166

## **CAPÍTULO 5**

### *- Resolvendo problemas e equações*

Resolvendo problemas passo a passo .....	169
Usando letras ou figuras para resolver problemas .....	179
Usando novamente equações para resolver problemas .....	196
Seção olímpica .....	200
Verifique se você aprendeu .....	202

## **CAPÍTULO 6**

### *- Proporcionalidade e semelhança*

Razões e proporcionalidade direta .....	205
Mais um pouco sobre porcentagens .....	213
Outras relações entre grandezas .....	220
Ampliações, reduções e semelhança .....	224
Seção olímpica .....	234
Verifique se você aprendeu .....	236



## **CAPÍTULO 7** - Números e gráficos

Números positivos e números negativos.....	239
Somando números positivos e números negativos .....	247
Subtraindo números positivos e números negativos .....	251
Calculando possibilidades e interpretando gráficos.....	255
Seção olímpica .....	268
Verifique se você aprendeu .....	270

## **CAPÍTULO 8** - Revendo e aprendendo mais

Revendo os capítulos de 1 a 4 e aprendendo um pouco mais ..	273
Revendo o capítulo 5 e aprendendo um pouco mais .....	278
Revendo os capítulos 6 e 7 e aprendendo um pouco mais .....	281
Seção olímpica .....	283

## **CAPÍTULO 9** - Atividades complementares

Atividades complementares do capítulo 1 .....	287
Atividades complementares do capítulo 2 .....	291
Atividades complementares do capítulo 3 .....	295
Atividades complementares do capítulo 4 .....	298
Atividades complementares do capítulo 5 .....	301
Atividades complementares do capítulo 6 .....	307
Atividades complementares do capítulo 7 .....	310
Desafios.....	317
Glossário .....	321
Sugestões de leituras e <i>sites</i> para os alunos .....	327

# CAPÍTULO 1

Números naturais e o dia a dia





Ao lado, explicitamos os objetivos gerais do capítulo. Sugerimos um breve comentário sobre os mesmos, utilizando as ilustrações da página.

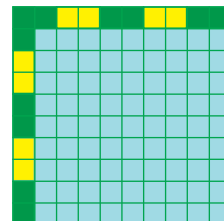
**Professor(a):** Neste e em outros capítulos, são exploradas diversas situações para que os alunos “descubram”, a partir de casos particulares, propriedades de números, de figuras, regras de cálculos etc. É extremamente importante que, após estas “descobertas”, sejam feitas observações afirmando que tais conclusões são verdadeiras (e, eventualmente, provar estes fatos) para que não fique a falsa ideia de que, a partir de poucos casos particulares, é possível generalizar. Sempre que possível, use expressões algébricas para expressar tais generalizações, bem como de algumas regularidades relacionadas com sequências numéricas.

## Você já sabe resolver problemas relacionados com números naturais. Neste capítulo, você vai aprender como:

- Registrar quantidades, usando vários sistemas de numeração ou códigos.
- Resolver problemas relacionados com contagem.
- Calcular possibilidades de escolhas de artigos que satisfaçam diversas características.
- Resolver problemas relacionados com sequências numéricas.
- Resolver problemas relacionados com as operações com números naturais, bem como inventar problemas com números naturais.
- Multiplicar ou dividir números naturais mentalmente.
- Interpretar o significado dos sinais ( ), [ ] em expressões envolvendo operações com números naturais.
- Calcular expressões numéricas, usando a calculadora.
- Tomar decisões na escolha de formas diferentes para resolver problemas.
- Usar letras para representar números em expressões envolvendo operações.
- Representar múltiplos ou frações de números, usando letras.
- Efetuar cálculos, envolvendo potências de expoentes naturais, de números naturais.
- Identificar, dentre números dados, os que são “quadrados perfeitos”.
- Relacionar o quadrado e o cubo de um número com área de quadrado ou com o volume de um cubo, respectivamente.
- Calcular raízes quadradas e raízes cúbicas de números naturais.
- Descobrir, através de regularidades, propriedades particulares de potências como: potências de dez, potências de expoente um, potências de expoente zero, e utilizá-las em cálculos de expressões numéricas.
- Descobrir propriedades das potências de mesma base, através do uso da definição de potência, e utilizar essas propriedades em cálculos.
- Classificar números naturais dados como números primos ou números compostos.
- Fatorar números compostos e usar a fatoração em diversas situações-problema como no reconhecimento de divisores ou múltiplos de um número dado.
- Usar a fatoração para criar múltiplos ou divisores de números dados.
- Enumerar múltiplos comuns ou divisores comuns de números dados.
- Calcular o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de números dados, usando a fatoração.
- Interpretar o significado de frases que contêm os símbolos  $\leq$  ou  $\geq$ .
- Identificar se pares de números dados são ou não “números primos entre si”.
- Calcular, mentalmente, o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de números primos entre si ou números múltiplos entre si.



1	10	100	1000



# Usando os números naturais

## Explorando o que você já sabe

Você já sabe ler e escrever números, fazer contas com a calculadora, fazer cálculos mentais e resolver problemas com **números naturais**. Agora, você vai rever alguns fatos sobre eles.

- Quais são os cinco primeiros **números naturais pares**?
- Quais são os cinco primeiros números naturais ímpares?
- Qual é o menor número natural de cinco **algarismos**?
- Qual é o menor número natural de cinco algarismos diferentes?
- Diga como se lê: 2 003 004.
- Explique como se multiplica  $13 \times 10$ .
- Qual é a **centena** mais próxima do número 532?
- Qual é a conta que se faz primeiro para calcular  $18 - (12 - 8)$ ?

## Aprendendo em sala de aula

Uma pequena **história da numeração**:

Você sabe que as invenções da humanidade foram se desenvolvendo ao longo dos tempos, relacionadas com as suas necessidades. Uma dessas invenções de grande utilidade para os homens foi a criação de **símbolos para representar quantidades**. Para que você tenha uma ideia de diversos tipos de numeração que já existiram e possa comparar com o atual, veja alguns exemplos:



Os egípcios criaram, cerca de 3 000 anos antes de Cristo, símbolos cuja correspondência com a nossa numeração se vê no quadro a seguir:

	NÚMERO	SÍMBOLO
Duas curiosidades sobre esse modo de registrar números: não havia um símbolo para o zero e os símbolos podiam ser escritos desordenadamente. Por exemplo, podiam escrever 12 com o símbolo do 10 seguido de dois símbolos do 1, ou antecedido, ou entre os dois.	1	
	10	⤿
	100	⤿⤿
	1 000	⤿⤿⤿⤿

1. Resolva em seu caderno: 1. Respostas dos alunos.

- Por curiosidade, escreva três mil, quatrocentos e vinte e cinco, usando a numeração egípcia.
- Escreva outro número qualquer e peça a um de seus colegas para descobrir que número você escreveu.

Recado ao(à) **Professor(a)**:  
Aproveitamos este espaço para comunicação direta entre nós. Nele, fazemos diversas observações e sugestões.

Todas as atividades que iniciam os estudos dos temas têm como título “Explorando o que você já sabe” e devem ser respondidas oralmente pelos alunos. Quando necessário, explore mais as situações com outras perguntas. Procure verificar se todos os alunos compreendem os significados dos termos usados. Sempre que possível, crie situações semelhantes no quadro, explorando-as.

- 0, 2, 4, 6, 8.
- 1, 3, 5, 7, 9.
- 10 000.
- 10 234.
- Dois milhões, três mil e quatro.
- Escreve-se 130.
- 500.
- $12 - 8$ .

### ATIVIDADES COLETIVAS

Sempre que possível, em todas as seções deste e de outros capítulos, proponha atividades coletivas aos alunos, explorando situações-problema contextualizadas e que propiciem diversos procedimentos como analisar, interpretar, discutir, argumentar, formular hipóteses, planejar estratégias de resolução, aplicar as estratégias na resolução, explicitar verbalmente a estratégia utilizada, verificar e validar resultados.

Explore também o uso de exemplos, contraexemplos, descobertas de diferenças, descobertas de semelhanças.

Recomende ou explore a leitura de:

“Atividades e jogos com números” (p. 1-25)

Marion Smoothey – Tradução de Sérgio Quadros

Coleção Investigação Matemática

Editora Scipione

Texto para o professor

Dez mandamentos para o professor

Revista do Professor de Matemática – Nº10 (p. 2).

Todas as atividades exploradas neste capítulo se referem a números naturais. Por este motivo, em enunciados do tipo “dois números naturais”, “múltiplos naturais de...”, muitas vezes escreveremos apenas “dois números”, “múltiplos de...” etc.

Duke, 2006

**Professor(a):** Para a sequência das atividades das aulas, recomendamos criar o hábito de ler as sugestões que fazemos antes de explorar os exercícios cujos números das respostas são colocados posteriormente a essas sugestões, porque a maior parte delas ou reforça atividades anteriores, ou, principalmente, prepara os alunos para as atividades seguintes.

Verifique se os alunos compreendem os significados de todos os pré-requisitos e conceitos novos explorados neste capítulo, principalmente aqueles em destaque, na cor azul.

Sugira pesquisas sobre a evolução dos diversos sistemas de numeração. Em particular, o sistema binário e seu uso nas tecnologias modernas, principalmente nos computadores.

Por questão de economia de espaço, muitas das respostas inseridas nas margens são breves. Entretanto, é necessário criar nos alunos o hábito de enunciar as respostas coerentes com as perguntas o mais completas possível. Exemplo: Quanto Jorge pagou pela bola? Resposta: Jorge pagou R\$.... pela bola (e não, simplesmente, R\$....).

Visite ou recomende os sites:  
[http://pt.wikipedia.org/wiki/Numerais\\_eg%C3%ADpcios](http://pt.wikipedia.org/wiki/Numerais_eg%C3%ADpcios)  
 (sobre sistema de numeração egípcio)

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Numera%C3%A7%C3%A3o\\_romana](http://pt.wikipedia.org/wiki/Numera%C3%A7%C3%A3o_romana)  
 (sobre sistema de numeração romana)

## 2. Respostas dos alunos.

3. a)  $4 \times 4 = 16$ ,  
 $4 : 4 = 1$ ;  $16 - 1 = 15$ ;  
 b) Respostas variadas.  
 Por exemplo:  
 $(4 + 4 + 4 + 4) - 4 : 4$ ;  
 $4 \times (4 - 4 : 4) = 12$ .

## 4. 1496.

Explore casos simples como:  
 AB 4247 até AB 4250 : 4  
 (Observe que:  
 $(4250 - 4247) + 1 = 3 + 1 = 4$ .)  
 Explorar diversos casos de números próximos para que o aluno perceba a regularidade: diferença dos números, **mais um**. Logo, a solução do problema 4 é dada por  
 $(5742 - 4247) + 1 = 1496$ .

Obs.: a primeira atividade extra, proposta na página 13, visa recordar aplicação do m.d.c. na resolução de problemas.

Os exemplos a seguir mostram como os algarismos foram se modificando até chegarem à forma que atualmente utilizamos:

	Algarismos Brâmanes Século I
	Algarismos Hindus Século IX
	Algarismos Árábicos Ocidentais Século XI
	Algarismos Indo-arábicos no Século XV

2. Imagine um sistema de numeração cujos algarismos fossem os vistos na tabela a seguir:

1	10	100	1000

Usando regras análogas às do sistema de numeração dos egípcios e os algarismos acima, escreva em seu caderno:

- a) Trinta e dois.  
 b) Duzentos e dois.  
 c) Um mil e quarenta e cinco.  
 d) Um mil, duzentos e trinta e quatro.

3. Brincando com algarismos.

Usando quatro algarismos “4”, podemos escrever 15 assim:

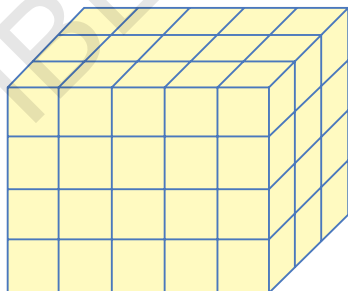
$$15 = 4 \times 4 - 4 : 4.$$

- a) Explique como são feitas as contas para provar que a igualdade acima é verdadeira.  
 b) Descubra outras maneiras de usar quatro algarismos 4 para escrever novamente o 15 e outros números menores que 15.

4. No mês passado, na cidade de Carrópolis, foram emplacados vários automóveis. Para isso, foram utilizadas desde a placa ABC 4247 até a placa ABC 5742, em ordem crescente. Quantos automóveis foram emplacados em Carrópolis, no mês passado?

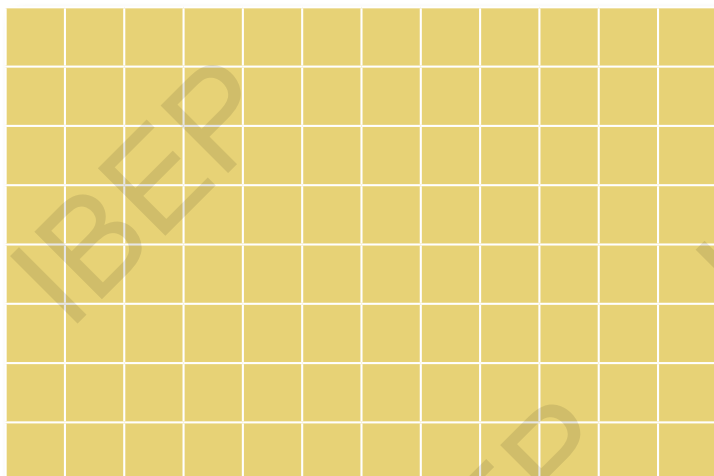
5. Observe o **paralelepípedo** representado na figura. Ele é formado de pilhas de pequenos **cubos**.

Discuta com seus colegas, conte e responda:



- Quantos desses cubos têm 3 faces na superfície do paralelepípedo?
- Quantos desses cubos têm apenas duas faces na superfície?
- Quantos desses cubos têm apenas uma face na superfície?
- Quantos desses cubos não têm faces na superfície?

6. Observe atentamente e responda, com base na figura:



- Quantas **colunas** de quadradinhos existem?
- Quantas **linhas** de quadradinhos existem?
- Quantos quadradinhos têm dois lados no contorno da figura?
- Quantos quadradinhos têm apenas um lado no contorno da figura?
- Quantos quadradinhos não possuem lados no contorno da figura?

7. Faça uma pesquisa com seus colegas na aula de hoje e registre no quadro quantos alunos têm 13 anos ou mais, e quantos têm menos de 13 anos. Depois, escreva em seu caderno os valores que substituem corretamente a informação.

Hoje, na minha turma, compareceram    alunos e    alunas. Do total de alunos,    têm 13 anos ou mais, e    têm menos de 13 anos.

Use material concreto para explorar o exercício 5.

5. a) 8 (nos vértices);  
 b) 24 (todos os que têm arestas contidas nas arestas da pilha, exceto os oito anteriores);  
 c) 22 (todos os que têm uma face comum com apenas uma das faces da pilha);  
 d) Os 6 restantes (como a pilha tem 60 cubos, temos:  
 $60 - (8 + 24 + 22) = 6$ ).

#### ATIVIDADE EXTRA

Uma caixa em forma de paralelepípedo tem as seguintes dimensões internas: 84 cm por 60 cm por 48 cm. Calcule: (a) Qual é o comprimento das arestas das maiores embalagens cúbicas que podem preencher totalmente o espaço interno desta caixa? (b) Quantas dessas embalagens são necessárias para que isso ocorra?

Solução: O comprimento da aresta, em cm, deve ser o m.d.c. de 84, 60 e 48, ou seja, 12 cm.

Logo, cabem

$7 \times 5 \times 4 = 140$  dessas embalagens.

#### ATIVIDADE EXTRA

Para cada metro quadrado de um muro, são necessários 65 tijolos de determinado tipo. Cada milheiro deste tijolo custa R\$ 600,00. Para construir 30 metros de um muro com 2 metros de altura, calcule: (a) Quantos tijolos serão necessários? (b) Quanto se pagará por todos os tijolos? Solução: (a)  $30 \times 2 \times 65 = 3\,900$  tijolos; (b)  $3,9 \times 600 = 2\,340$  reais.

6. a) 12;  
 b) 8;  
 c) 4 (nos vértices);  
 d)  $20 + 12 = 32$ ;  
 e) 60.

Promova uma discussão com os alunos sobre a importância dos números nas informações. Por exemplo, retire algumas notícias de jornais contendo informações numéricas e peça que as escrevam retirando os números. Depois, pergunte se, retirando os números, elas fazem sentido.

#### 7. Respostas dos alunos.

Promova uma discussão sobre o que significa ter mais de treze anos (14? 13 e um dia? etc.)



Antes de abordar o exercício 8, promova discussões entre os alunos para concluir que:

Em (c), **f** deve ser menor ou igual a **e**.

Em (d), **h** deve ser menor ou igual a **g**.

Em (e), **j** deve ser menor ou igual a **i**.

#### ATIVIDADE EXTRA

1) Para revestir o piso de cada um dos 60 corredores de um hospital, foram gastas 100 peças de cerâmicas. Quantas peças foram gastas ao todo?  
R) 6 000 peças.

2) No problema anterior, 12% das peças são brancas e as demais são verde-claras.

(a) Calcule o total de cada um desses tipos de peça.

(b) Calcule a razão entre peças brancas e peças verdes.

R) a)  $12\% \text{ de } 6\,000 = 720$ ;  
 $88\% \text{ de } 6\,000 = 5\,280$ .  
(Recorde que  $12\% = 12/100 = 0,12$ );

b)  $12/88 = 3/22$ .

11. (a) 4 portas, cinza;

(b) 4 portas, azul;

(c) 5;

(d) 4 portas, verde;

(e) 6;

(f) 2;

(g) 3;

(h) 6.

Utilize, também, a árvore de possibilidades para resolver o exercício 11. Para o 12, use um trecho da árvore ou resuma os dados na tabela a seguir:

ABCD	0 2 4 6 8	1 3 5 7 9	Total de opções
4	5	5	$4 \times 5 \times 5 = 100$
	Primeiras opções		

8. Copie os problemas a seguir, escrevendo números de três algarismos escolhidos por você no lugar das letras: 8. Atividades dos alunos.

a) Mirtes tinha (a) reais e ganhou mais (b) reais. Quanto Mirtes tem agora?

b) Um dicionário tem (c) palavras iniciadas pela letra “m” e (d) palavras iniciadas pela letra “p”. Quantas palavras iniciadas pelas letras “m” ou “p” existem nele?

c) Antônio tem (e) reais e Paulo tem (f) reais a menos. Quanto Paulo possui?

d) Fabrício recebeu (g) reais e gastou (h) reais em compras. Quanto Fabrício tem agora?

e) Frederico tinha uma dívida de (i) reais e já conseguiu pagar (j) reais. Qual é o valor da dívida atual de Frederico?

9. Releia os problemas que você copiou do exercício 8 e explique quais contas devem ser feitas para resolver cada um deles. 9. (a)  $a + b$ ; (c)  $e - f$ ;  
(b)  $c + d$ ; (d)  $g - h$ ; (e)  $i - j$ .

10. Você e seus colegas devem trocar entre si os problemas que vocês criaram no exercício 8 e resolvê-los. 10. Respostas variadas.

11. Uma fábrica de automóveis oferece determinado modelo com duas ou quatro portas, e nas três opções de cores: cinza, azul ou verde. A tabela a seguir o ajudará a calcular quantas opções pode ter um possível comprador.

#### Cálculo do total de tipos de automóveis possíveis de serem comprados

Total de portas	Cor	Escolha de tipos	
Duas portas	cinza	Duas portas, cinza	1
	azul	Duas portas, azul	2
	verde	Duas portas, verde	3
Quatro portas	cinza	a	4
	azul	b	c
	verde	d	e
Dois modelos	Três cores	Total de escolhas	
Total de modelos <b>f</b> , vezes total de cores <b>g</b> , fornecem <b>h</b> escolhas de tipos ao todo.			

Escreva, em seu caderno, o que substitui corretamente as letras **a**, **b**, ..., **h**.

12. Quantas placas podem ser fabricadas começando com uma das letras A, B, C, D, tendo como segundo símbolo um algarismo que representa um dos 5 primeiros números pares, e como terceiro símbolo um algarismo que representa um dos 5 primeiros números ímpares? (Por exemplo, B47 é uma dessas placas.) 12. 4 letras.

5 algarismos pares.

5 algarismos ímpares.

$4 \times 5 \times 5 = 100$ .

R) 100 placas.



## Aprendendo em casa

13. Copie as **seqüências** a seguir, em seu caderno, e escreva todos os números que faltam em cada uma delas:

a) 13 100, 13 200, ..., 14 000

c) 14 000, 14 500, ..., 18 500

b) 25 200, 25 400, ..., 27 000

d) 150 000, 151 000, ..., 159 000

14. Imagine que a letra **A** representa o algarismo **0**, **B** representa **1**, **C** representa **2**, e assim por diante, até **J**, que representa o algarismo **9**.

Use as regras de nosso sistema de numeração e resolva:

a) Como você escreveria, usando letras, os números 345, 864 e 1 032?

b) Que números são representados pelas palavras: BICA, BACIA, CABIA?

15. Mércia disse que nasceu em 18/06/86. Responda:

a) Em qual mês e ano Mércia nasceu?

b) Em 18/07/2010, quantos anos Mércia tinha?

16. Observe a seqüência de números da segunda linha a seguir.

Posição	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª	6ª	7ª	8ª	...	...
Seqüência	10	15	20	25	30	35	40	45	...	...

Sem escrever os números seguintes da seqüência, responda:

a) Quantas dezenas tem o número que ocupa a 32ª posição?

b) Qual o algarismo das unidades desse mesmo número? Justifique suas respostas.

17. Em um restaurante são oferecidas as opções dadas na tabela:

Refeições	Bebidas	Sobremesas
com carne bovina	sucos	doces
com carne suína	refrigerantes	bombons
com omelete	água mineral	frutas

Calcule todas as opções possíveis combinando um tipo de refeição, um de bebida e outro de sobremesa.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do "Aprendendo em casa" para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

13. a) 13 300, 13 400, 13 500, 13 600, 13 700, 13 800, 13 900;  
b) 25 600, 25 800;  
c) 15 000, 15 500, 16 000, 16 500, 17 000, 17 500, 18 000;  
d) 152 000, 153 000, 154 000, 155 000, 156 000, 157 000, 158 000.

Crie outras seqüências numéricas explorando regularidades. Crie, também, seqüências de figuras explorando regularidades. Por exemplo:

*+	*++
**+	**++
***+	* * * + +
****+	.....
.....	.....

14. a) DEF, IGE, BADC;  
b) 1 820, 10 280, 20 180.

15. a) Junho de 1986;  
b) 24 anos.

16. a) 16 dezenas. Regularidade: a quantidade de dezenas de um número que ocupa posição par é a metade do número da posição correspondente (metade de 32);  
b) O algarismo é 5. Regularidade: posições pares, algarismo 5, posições ímpares, algarismo zero.

Para resolver o exercício 17, use um trecho da árvore de possibilidades ou resuma os dados na tabela a seguir:

Refeições	Bebidas	Sobremesas	Total de opções
3	3	3	$3 \times 3 \times 3 = 27$
Primeiras opções	$3 \times 3 = 9$		

17.  $3 \times 3 \times 3 = 27$ .

Lembre-se da observação da página 11 sobre estas atividades orais.

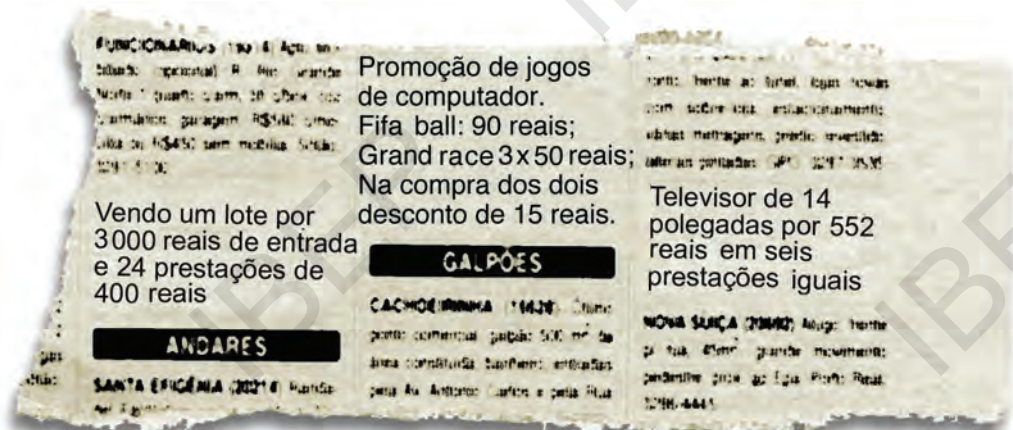
Explore os significados dos termos contidos nos três problemas ao lado: venda, entrada, prestação, compra, desconto. Ao início de cada seção, esclareça as principais razões de se estudarem os temas delas. Em particular, comente que, nesta seção, irão resolver diversos problemas (bem como inventar problemas), como os que são vistos nas páginas de 16 a 20.

Leia a observação da margem da página “Verifique se você aprendeu” do capítulo 2.

## Mais aplicações de números naturais

### Explorando o que você já sabe

Leia as notícias:



#### ATIVIDADES ORAIS

- Somar 3 000 com 24 x 400.
- $90 + 3 \times 50 - 15$ .
- $552 : 6$ .

Responda:

- Para saber o preço do lote, que contas devem ser feitas?
- Para saber quanto pagar ao comprar os dois jogos de computador, quais contas devem ser feitas?
- Qual conta se deve fazer para saber o valor de uma prestação na compra do televisor de 14 polegadas?

## Aprendendo em sala de aula

18. Use as notícias do quadro anterior, resolva e responda:

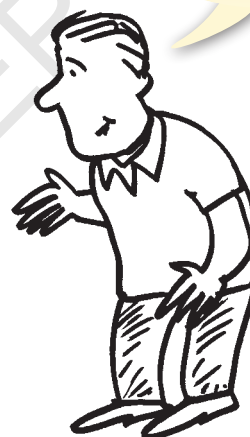
18. a) 12 600 reais;  
b) 225 reais;  
c) 92 reais.

- a) Qual é o preço total do lote?  
b) Quanto pagará quem comprar os dois jogos de computador?  
c) Qual é o valor de cada uma das seis prestações do televisor?

Peça aos alunos que tragam, na próxima aula, chaves “de boca”, parafusos, porcas ou quaisquer outras peças, bem como metros articulados com graduações em polegadas. Explore medidas destes materiais, em polegadas, assim como suas equivalências aproximadas, em centímetros.

Professor, vi um anúncio de um televisor de 14 polegadas. Uma polegada tem quantos centímetros?

Uma polegada mede, aproximadamente, 2,5 centímetros!



Son Salvador

É isso mesmo.  
Mas, sobre a polegada,  
voltaremos a falar  
mais tarde.



Visite ou recomende o site [http://www.inmetro.gov.br/consumidor/produtos/tela\\_tv.asp](http://www.inmetro.gov.br/consumidor/produtos/tela_tv.asp)

Estimule sempre este tipo de atividade por parte de seus alunos, pois ela propicia a socialidade e permite que percebam que a Matemática pode ser desenvolvida por eles mesmos.

**20. R\$ 33,00. 42 rádios.**

R\$ 3 300,00.

**21.** Sugestão: organizar um quadro como o seguinte: primeiro, todas possíveis com 1 centavo, depois, com 5 (sem o 1), depois, com 10 (sem o 1 e o 5) e, finalmente, com 50 (sem 1, 5 e 10).

19. Reúna-se com seu grupo de estudos e **invente três problemas**:
- a) Um problema relacionado com a compra de um artigo no qual o comprador paga certo valor de **entrada** e o restante em **prestações iguais**.
  - b) Um problema relacionado com o **desconto** para quem comprar dois artigos de preços dados.
  - c) Um problema relacionado com a compra de um artigo em prestações iguais, sem entrada.

Depois de inventá-los, troque-os com aqueles que seus colegas de outro grupo inventaram e passem a resolvê-los.

20. Um camelô compra 100 rádios iguais por R\$ 4 200,00 e vende por R\$ 75,00, cada um. Qual o lucro que ele tem na venda de um rádio? Quantos desses rádios ele terá que vender para lucrar R\$ 1 386,00? Vendendo os rádios restantes ao mesmo preço, qual será o lucro total que ele terá?
21. Lair tem uma moeda de 1 centavo, uma de 5 centavos, uma de 10 centavos e uma de 50 centavos. Descubra todas as quantias possíveis que Lair pode formar usando esses tipos de moedas.
22. Marta tem moedas de 1 real, 50 centavos e 25 centavos e fez uma compra na padaria que ficou em 3 reais. Escreva ao menos três maneiras possíveis com as quais ela pode ter pago. Considere que Marta tem uma quantidade suficiente de moedas de cada tipo.

[illegible]

O problema 22 tem por objetivo explicitar para os alunos que problemas em Matemática podem ter mais de uma solução.

- 22.1** moeda de 1 real, 1 de 50 centavos, 6 de 25 centavos, ou 3 de 1 real, ou 2 de um real e 2 de 50 centavos etc.

Volte a explorar atividades em grupos ao abordar os exercícios de 23 a 29.

Para melhor orientar os trabalhos, a seu critério, escreva no quadro um dos roteiros de resolução de problemas da seção 8.2.2 do Manual do Professor.

23. Esquema para resolver o exercício 23.

Faça, no quadro, uma tabela como a que se vê a seguir. Explore com perguntas, pela ordem, os valores que devem ocupar os espaços indicados com 1ª, 2ª etc.

DADOS:

Canais	H	M
A	30	14
B	1ª	16
Out	30	2ª

1ª)  $100 - (30 + 30) = 40$ ;

2ª)  $42 - (14 + 16) = 12$ ;

3ª)  $30 - 14 = 16$ ;

4ª)  $40 - 16 = 24$ ;

5ª)  $30 - 12 = 18$ .

R) 58 mulheres

$(16 + 24 + 18 = 58)$ .

Opcionalmente, use um esquema gráfico para resolver o exercício 24.

24. Somando os três valores pagos pelas três amigas, encontraremos o preço total dos seis artigos comprados. Dividindo este preço por dois, encontramos a soma dos preços de 1 bicicleta, 1 televisor e 1 lava-louças. Ao subtrair, sucessivamente, deste valor as importâncias de R\$ 774,00, R\$ 882,00 e R\$ 972,00, obteremos, respectivamente, os preços de um lava-louças, um televisor e uma bicicleta, respectivamente R\$ 540,00, R\$ 432,00 e R\$ 342,00.

25. A = 5, B = 6, C = 5, D = 6.

Comente que é possível provar (ou se quiser, diga que os matemáticos provam) que a frase (a) do exercício 26 é verdadeira, sem usar casos particulares. A seu critério, prove a verdade da frase (a) usando os recursos que conhece.

26. (e).

O exercício 27 sugere uma regularidade no produto por 11: 132, 143, 154 etc.

23. Uma **pesquisa sobre preferência** de dois canais A e B de TV foi feita entre 100 adultos. Entre os entrevistados, 30 preferem o canal A e 30 preferem outros canais. Entre os 42 homens, 14 preferem o canal A e 16 o canal B. Pergunta-se: quantas mulheres preferem o canal B?

24. Três amigas compraram 2 bicicletas, 2 televisores e 2 lava-louças ao mesmo preço por artigo. A primeira comprou uma bicicleta e um televisor por R\$ 774,00, a segunda comprou uma bicicleta e um lava-louças por R\$ 882,00, e a terceira comprou um televisor e um lava-louças por R\$ 972,00. Qual é o preço de cada um desses artigos comprados?

25. Escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

a)  $(4 + 6) : 2 = a$

c)  $(3 + 7) : 2 = c$

b)  $(4 + 8) : 2 = b$

d)  $(3 + 9) : 2 = d$

26. Apenas uma das frases a seguir é falsa. Descubra qual:

a) A soma de dois números naturais pares é um número natural par.

b) Entre dois números naturais pares diferentes, existe pelo menos outro número natural.

c) A soma de dois números naturais ímpares é um número natural par.

d) Entre dois números naturais ímpares diferentes, existe pelo menos um número natural.

e) A soma de um número natural par com outro ímpar pode ser um número par.

27. Multiplique 12, 13 e 14 por 11 e observe bem os resultados. Agora, veja se é capaz de **calcular mentalmente** os produtos de 15, 16 e 17 por 11.

27. 165, 176, 187.

28. Para **indicar a multiplicação de dois números**, usamos diversas representações. Veja algumas:

$90 \times 5$ ,  $(90)(5)$ ,  $90(5)$ ,  $(90)5$ ,  $90.5$

28.  $12 \times 5$ ,  $(12)(5)$ ,  
 $12(5)$ ,  $(12)5$ .

Represente, de quatro modos diferentes, o produto de 12 por 15.

29. Desenhe 4 pontos A, B, C e D, de modo que não haja três quaisquer deles em linha reta. Desenhe **caminhos** retos ou curvos, nas seguintes quantidades: de A para B, 3 caminhos; de A para C, 2 caminhos; de A para D, 1 caminho; de B para C, 3 caminhos; de B para D, 2 caminhos; e de C para D, 1 caminho.

29. 30 caminhos: AD: 1;  
ABD:  $3 \times 2 = 6$ ,  
ACD:  $2 \times 1 = 2$ ,  
ABCD  $3 \times 3 \times 1 = 9$ ,  
ACBD:  $2 \times 3 \times 2 = 12$ .

Considerando os caminhos que você construiu, resolva:

Quantos caminhos diferentes ligam o ponto A ao ponto D?

(Considere apenas caminhos que não passem mais de uma vez por um mesmo ponto.)

30. Você se lembra? No sexto ano, você aprendeu que:

$(22 - 13) - 6 = 9 - 6 = 3$

$22 - (13 - 6) = 22 - 7 = 15$

30. a)  $13 - 8 = 5$ ;  
b)  $25 - 4 = 21$ ;  
c)  $11 - 5 = 6$ ;  
d)  $20 - 2 - 4 = 14$ .

Calcule:

a)  $(25 - 12) - 8$

b)  $25 - (12 - 8)$

c)  $(21 - 10) - (8 - 3)$

d)  $20 - (10 - 8) - 4$



### 31. Usando a calculadora:

Veja como Cláudio calculou  $(20 - 10) - (8 - 3)$  seguindo as instruções do manual da calculadora:



Siga os passos	Aperte as teclas	Leia no visor
Limpar a calculadora	On/c	0
Digite	8	8
Digite	-	8
Digite	3	3
Digite	=	5
Digite	M +	5 <sup>M</sup>
Digite	20	20 <sup>M</sup>
Digite	-	20 <sup>M</sup>
Digite	10	10 <sup>M</sup>
Digite	=	10 <sup>M</sup>
Digite	-	10 <sup>M</sup>
Digite	5 <sup>M</sup>	5 <sup>M</sup>
Digite	=	5 <sup>M</sup>
<b>Resposta:</b>		<b>5</b>

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os exercícios: 28 (enunciado e quadro) e 30 (os dois exemplos).

Sugira aos alunos que tragam, nas próximas aulas, suas calculadoras e seus manuais e explore outros cálculos usando-as, principalmente, em situações nas quais é necessário utilizar as "memórias". Adverta que, nos manuais de calculadoras de marcas diferentes entre si, existem diferenças relacionadas com a sequência de operações a ser seguida no cálculo de expressões que requeiram o uso da memória. Essa é a razão de mencionar os manuais no exercício 31.

31. a)  $12 - 3 = 9$ ;  
b)  $15 - 9 = 6$ ;  
c)  $15 \times 6 = 90$ .

Agora, use as instruções do manual da sua calculadora para calcular:

- a)  $(23 - 11) - (8 - 5)$       b)  $(7 + 8) - (12 - 3)$       c)  $(4 + 11) \times (9 - 3)$

### 32. A tabela a seguir contém as distâncias em quilômetros entre as cidades A, B, C e D.

	A	B	C	D
A				
B	60			
C	100	150		
D	80	90	100	

**Um exemplo:**

Na tabela, a distância entre as cidades A e B é de 60 quilômetros.

Teófilo é um vendedor que mora na cidade A. Para vender seus produtos, ele viaja para as cidades B, C e D.

- a) Partindo da cidade A, quantos caminhos ele pode fazer para ir à cidade D, passando ou não por uma ou duas das outras cidades?  
b) Qual é o menor desses caminhos?  
c) Qual é o maior desses caminhos?

Explore o exercício 32, calculando:  
 $ABD = AB + BD = 60 + 90$ ,  
 $ACD = AC + CD = 100 + 100$  etc.

Observação: deve-se considerar que, em cada caminho, Teófilo não passa mais de uma vez pela mesma cidade.

32. a) Cinco; AD, ABD, ACD, ABCD, ACBD;  
b) AD;  
c) ACBD.

Visite ou recomende o site [http://www.aondefica.com/distancias\\_br.asp](http://www.aondefica.com/distancias_br.asp) (permite calcular distâncias entre diversas cidades do Brasil).

Nas próximas aulas, peça aos alunos que tragam revistas-guia de turismo e explore tabelas de distâncias contidas nessas revistas. Explore, também, as mais variadas atividades relacionadas com turismo, com base nas diversas informações contidas em tais revistas.



33. a)  $3y, 3 \cdot y$ ;  
b)  $4y, 4 \cdot y$ .

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

34. 70 reais.

35. 26 reais.

36. 729 reais.

Sugestão para o 37:  
 $(A + B) + (B + C) - (A + B + C) = B$

37. Celso R\$ 515,00;  
Alberto R\$ 325,00;  
Bernardo R\$ 435,00.

38. a) O quíntuplo do número;

b) A soma do triplo com o quádruplo do número.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

Explore, nesta aula ou nas próximas, dados contidos em folhetos de lojas, para que os alunos formulem, em casa, problemas semelhantes aos de números 34 a 36. Em aulas posteriores, peça-lhes que discutam e resolvam tais problemas.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, as frases iniciais dos exercícios 33 e 40, bem como o quadro em destaque do exercício 40.

#### ATIVIDADES ORAIS

- $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ .
- $10 \times 10 \times 10 \times 10$ .
- $4^7$ .
- $6^3 \times 3^5$ .
- $2 \times 10^9$ .

33. Se usarmos a letra **x** para representar um número, seu dobro pode ser representado assim: **2x**.

Se representarmos um número pela letra **y**, escreva como você representaria de duas maneiras diferentes:

a) O triplo do número.

b) O quádruplo do número.

## Aprendendo em casa

34. Ailton comprou um sofá por 480 reais, pagando 60 reais de entrada e o restante dividido em 6 prestações de mesmo valor. Calcule qual é o valor de cada **prestação** pago por Ailton.

35. Maurício comprou uma secadora de roupa e um telefone sem fio. A secadora custa 135 reais e o telefone custa 98 reais. O vendedor deu um **desconto** e, por isso, Maurício pagou 207 reais pela compra. De quanto foi o desconto concedido pelo vendedor?

36. Márcia comprou um fogão, pagando 9 **prestações** iguais de 81 reais. Quanto Márcia pagou pelo fogão?

37. Alberto e Bernardo têm juntos 760 reais. Bernardo e Celso têm juntos 950 reais. Quanto tem cada um se os três juntos têm 1 275 reais?

## Outros cálculos com números naturais

### Explorando o que você já sabe

38. Se **z** representa um número, o que representam:

a)  $5z$ ?

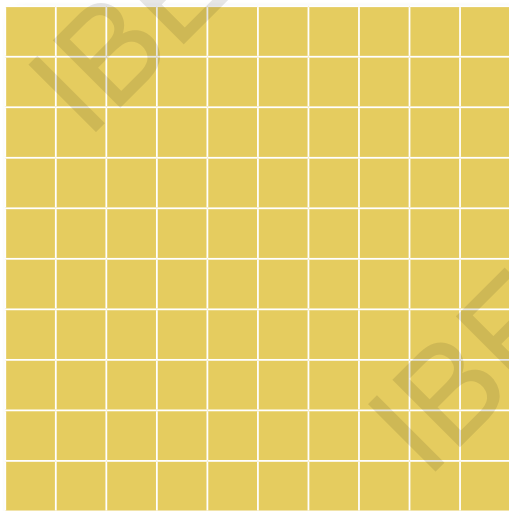
b)  $3z + 4z$ ?

Observe os itens ao lado das perguntas e responda:

- |   |  |
|---|--|
| • Como representar o primeiro item como um produto?                               | • $3^6$  |
| • E o segundo item?   | • 10 000   |
| • Como representar o terceiro e o quarto itens usando potências?                  | • $4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4 \times 4$          |
| • Como representar o último item como um produto de dois por uma potência de dez? | • $6 \times 6 \times 6 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ |
|   | • 2 000 000 000  |

## Aprendendo em sala de aula

39. Observe a figura a seguir, formada de linhas e colunas de quadradinhos:



- Quantas linhas ela possui?
- Quantas colunas ela possui?
- Escreva quantos quadradinhos ela possui, usando uma potência.
- Considerando cada pequeno quadrado como unidade de área, qual a área do quadrado da figura ao lado?

39. a) 10;  
b) 10;  
c)  $10 \times 10 = 100 = 10^2$ ;  
d) 100.

40. O quadrado de um número natural chama-se “quadrado perfeito”. Por exemplo, 4, 9, 16, 25 são quadrados perfeitos porque são o quadrado de 2, 3, 4 e 5, respectivamente. Vale observar que os quadrados perfeitos correspondem a áreas de quadrados cujos lados têm, por medidas, números naturais.

Liste todos os quadrados perfeitos entre 180 e 400.

Você se lembra? No sexto ano, você aprendeu que:

Para calcular a área de um retângulo, medimos a base e a altura com a mesma unidade de medida e multiplicamos as duas medidas.

A área de um quadrado é o quadrado da medida de seu lado.

41. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, os valores que substituem cada letra. Fique atento às unidades de medida correspondentes.

Medida do lado do quadrado							
8 cm	5 m	7 cm	6 cm	4 m	10 m	e	f
Área do quadrado							
64 cm <sup>2</sup>	25 m <sup>2</sup>	a	b	c	d	81 cm <sup>2</sup>	100 cm <sup>2</sup>

Esclareça que, após o estudo desta seção, saberão calcular as medidas dos lados de alguns quadrados, conhecidas as áreas deles, bem como calcular as medidas das arestas de alguns cubos conhecidos os volumes deles. Além destes fatos, descobrirão como efetuar cálculos com potências e como aplicar esses conhecimentos na resolução de problemas como o de número 69 da página 27.

Destaque, para os alunos, a correlação entre o cálculo da área de um quadrado e o termo “quadrado perfeito”.

Peça aos alunos que expliquem como resolveram os exercícios 39a e 39b. Verifique se descobriram que uma boa estratégia para a contagem a é usar a coluna de quadrados coloridos e, para a contagem b, é usar a linha de quadrados coloridos.

Peça aos alunos que expliquem, também, como resolveram o exercício 39c: (10 linhas x 10 colunas).

### ATIVIDADE EXTRA

Peça as razões entre os quadrados amarelos e os verdes na figura do exercício 39 (8/11).

Idem, amarelos e o total de quadrados ( $8/100 = 2/25$ ).

Que expressem a razão 8/100 ou 2/25 em forma de porcentagem ( $0,08 = 8\%$ ).

40.  $14 \times 14 = 196$ .  
 $15 \times 15 = 225$ .  
 $16 \times 16 = 256$ .  
 $17 \times 17 = 289$ .  
 $18 \times 18 = 324$ .  
 $19 \times 19 = 361$ .

Peça aos alunos que expliquem como resolveram o exercício 40. Verifique se descobriram que uma boa estratégia é observar que 100 é o quadrado de 10 e começar com tentativas a partir dos quadrados de 11, 12 etc. Alguns alunos podem colocar na lista  $20 \times 20 = 400$ . Discuta com eles o significado de “entre” no enunciado do problema e explique por que este número não deve estar na lista.

### ATIVIDADE EXTRA

Calcule o lado do quadrado equivalente a um retângulo que mede 9 m por 4 m.

R) 6 m. (Recorde que figuras planas equivalentes são figuras que têm áreas iguais.)

41. a) 49 cm<sup>2</sup>;  
b) 36 cm<sup>2</sup>;  
c) 16 m<sup>2</sup>;  
d) 100 m<sup>2</sup>;  
e) 9 cm;  
f) 10 cm.

42. 12 metros.

Verifique se os alunos criaram uma estratégia de resolução. Por exemplo, como é fácil saber que 100 é o quadrado de 10, começar por tentativas de quadrados de 11, 12 etc., porque, sendo 144 maior que 100, uma estimativa para a resposta é que ela seja maior que 10.

43. A medida do lado de um quadrado é representada pelo número cujo quadrado é a área.

44. a) 8;  
b) 4;  
c) A raiz quadrada de um número natural  $N$  é outro número natural  $R$  tal que  $R^2 = N$ . Chame a atenção dos alunos para o fato de que nem todo número natural é um quadrado perfeito. Por exemplo, não existe nenhum número natural  $N$  tal que  $2 = N^2$ . Você pode introduzir aqui, a ideia de “aproximação”;  $(1,4)^2 = 1,96$ , etc. Pode usar calculadoras para discutir esta ideia. Deixe claro que mais detalhes sobre raízes serão vistos futuramente.

45. A raiz quadrada de 49 é igual a 7.

Sugestão sobre verificação da aprendizagem

Ao elaborar questões de verificação da aprendizagem, um bom recurso dentre diversos outros é utilizar problemas semelhantes aos explorados no capítulo, trocando algum dado pela incógnita e vice-versa (e respectivos valores).

Exemplificando:

Situação-problema explorado: Luciana quer comprar um celular e possui R\$ 128,00, que equivalem à metade do preço deste aparelho. Qual o preço do celular?

Situação-problema de verificação: Luciana quer comprar um celular que custa R\$ 256,00, mas possui apenas metade desse valor. Quanto Luciana precisa ter a mais para comprar o celular?

42. Nelson mediu um lote de forma quadrada e anotou a área dele: 144 metros quadrados. Quanto medem, em metros, cada um de seus quatro lados?

43. Discuta com seus colegas e escreva uma frase que explique como se calcula a medida do lado de um quadrado quando se conhece sua área.

44. Observe a tabela a seguir. Ela permitirá a você descobrir o que é a “raiz quadrada de um número natural”.

Número natural	64	25	49	100	81
Raiz quadrada do número	8	5	7	10	9

Resolva com base na tabela:

- Qual é a raiz quadrada de 64?
- Qual é a raiz quadrada de 16?
- Discuta com seus colegas e escreva uma frase que explique o que é a raiz quadrada de um número natural.

A **raiz quadrada** de um número é representada pelo símbolo  $\sqrt{\quad}$ . Assim,  $\sqrt{36} = 6$  se lê: a raiz quadrada de 36 é igual a 6.

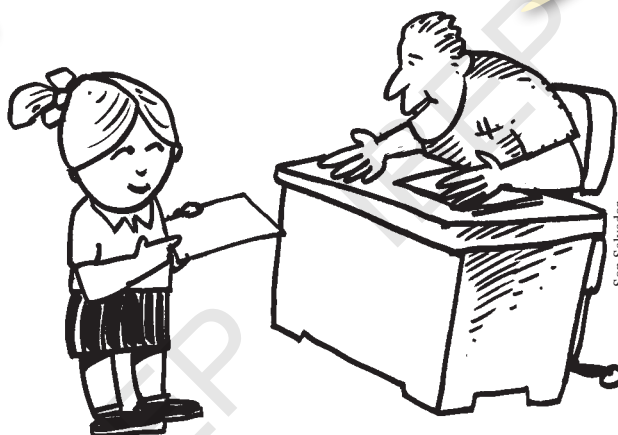
45. Escreva como se lê:  $\sqrt{49} = 7$ .

Professor, eu observei que a medida do lado de um quadrado é obtida calculando a raiz quadrada da área do quadrado.

Estive pensando: existe um processo parecido para o cubo? Conhecendo o volume do cubo, é possível calcular a medida da aresta?

Existe sim. Observe que, por exemplo, se a aresta de um cubo mede 4 cm, seu volume mede:  $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64 \text{ cm}^3$ .

Logo, dado o volume do cubo, a medida de sua aresta é dada pelo número cujo cubo seja igual ao número que representa a medida do volume.



Son Salvador

Isso se chama  
calcular a raiz cúbica do número.  
A raiz cúbica de um número  
se representa pelo  
símbolo:  $\sqrt[3]{\phantom{x}}$

Lemos esse  
símbolo assim:  
"raiz cúbica de..."



46. Escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras A e B:

- a) Como  $3^3 = 27$ , temos que  $\sqrt[3]{27} = A$ ;  
b) Como  $10^3 = 1\ 000$ , temos que  $\sqrt[3]{1000} = B$ .

47. Escreva os quadrados dos dezesseis primeiros números naturais.

48. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras: (Sugestão: use os resultados do exercício anterior.)

Número	9	49	4	121	25	196	1	144	64	225	100	0	36	169	16	81
Raiz quadrada	a	b	c	d	e	f	g	h	i	j	k	l	m	n	o	p

49. Escreva os cubos dos 7 primeiros números naturais. 49. 0, 1, 8, 27, 64, 125, 216.

50. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras: (Sugestão: use os resultados do exercício anterior.)

Número	1 000	8	125	0	216	27	1	64
Raiz cúbica	a	b	c	d	e	f	g	h

Você se lembra? No capítulo 3 do livro do sexto ano, você aprendeu que:

- a)  $32\ 000 = 32 \times 1\ 000 = 32 \times 10^3$ ;  
b)  $120\ 000 = 12 \times 10\ 000 = 12 \times 10^4$ ;  
c) Se o expoente é **um**, o valor da potência é igual à base:

$$4^1 = 4 \quad 231^1 = 231$$

- d) Se o expoente é **zero**, o valor da potência é **um**: (para bases diferentes de zero)

$$13^0 = 1 \quad 867^0 = 1$$

46.  $A = 3$ ;  
 $B = 10$ .

47. 0, 1, 4, 9, 16, 25, 36, 49, 64, 81, 100, 121, 144, 169, 196, 225.

48. a) 3; g) 1; m) 6;  
b) 7; h) 12; n) 13;  
c) 2; i) 8; o) 4;  
d) 11; j) 15; p) 9.  
e) 5; k) 10;  
f) 14; l) 0;

#### ATIVIDADE EXTRA

1 - Sugira aos alunos que verifiquem as respostas do exercício 48, calculando as raízes quadradas usando calculadoras.

2 - Você já sabe que, em um triângulo retângulo, o lado maior chama-se hipotenusa e os dois outros lados chamam-se catetos.

Desenhe dois triângulos retângulos cujos catetos tenham as seguintes medidas: (I) 6 cm e 8 cm, (II) 8 cm e 15 cm.

Verifique que as hipotenusas dos triângulos (I) e (II) medem 10 cm e 17 cm.

Use calculadora para verificar que:

(I)  $6^2 + 8^2 = 10^2$ ;  
(II)  $8^2 + 15^2 = 17^2$ .

Comente que os resultados anteriores não são mera coincidência, mas sim uma propriedade importante dos triângulos retângulos: O Teorema de Pitágoras – “Em todo triângulo retângulo, o quadrado da medida da hipotenusa é igual à soma dos quadrados das medidas dos catetos”.

Faça observarem que, conhecidas as medidas dos catetos, a medida da hipotenusa é a raiz quadrada da soma dos quadrados deles.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, o quadro em destaque do exercício 44 (segundo quadro) e os itens do “Você se lembra?”.

50. a) 10; e) 6;  
b) 2; f) 3;  
c) 5; g) 1;  
d) 0; h) 4.

# ATIVIDADE EXTRA

Use o Teorema de Pitágoras e a calculadora para resolver: "Um retângulo mede 7 cm por 24 cm. Quanto mede sua diagonal?"  
R) 25 cm.

51. a)  $45 \times 10^3$ ;  
b)  $7 \times 10^6$ ;  
c)  $12 \times 10^7$ ;  
d)  $2 \times 10^{11}$ .

52. a) 137;  
b) 1;  
c) 25;  
d) 1.

53. Respostas variadas.

Professor, posso chamar as potências  $2^3$ ,  $2^4$ ,  $2^5$ ,  $2^6$ , de "potências de mesma base"?



Pode, pois como se vê, todas elas têm a mesma base: 2.

Son Salvador

Os exemplos a seguir sugerem regras práticas para multiplicar ou dividir potências de mesma base.

Observe:

3 fatores

$$2^2 \times 2^3 = \underbrace{(2 \times 2)}_{2 \text{ fatores}} \times \underbrace{(2 \times 2 \times 2)}_{3 \text{ fatores}} = \underbrace{2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2}_{5 \text{ fatores}} = 2^5; \text{ logo, } 2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5$$

2 fatores

5 fatores

54. a) No primeiro exemplo,  $2^2$  e  $2^3$ ; no segundo,  $4^2$  e  $4^4$ ; e, no terceiro,  $7^3$  e  $7^4$ ;

- b)  $2 + 3 = 5$ ;

- c) O produto de potências de mesma base é uma potência de mesma base que os fatores, cujo expoente é a soma dos expoentes dos fatores dados.

$$4^2 \times 4^4 = (4 \times 4) \times (4 \times 4 \times 4 \times 4) = 4^{2+4} = 4^6;$$

$$7^3 \times 7^4 = (7 \times 7 \times 7) \times (7 \times 7 \times 7 \times 7) = 7^{3+4} = 7^7;$$

54. Responda:

- a) Em cada um dos exemplos acima, quais as potências de mesma base que estão sendo multiplicadas?  
b) No primeiro exemplo acima, qual o expoente da potência que se obtém multiplicando  $2^2$  por  $2^3$ ?  
c) Observe os dois outros exemplos e escreva em seu caderno a frase a seguir, completando-a: o produto de potências de mesma base é uma potência de mesma base que os fatores, cujo expoente...

55. a)  $3^9$ ;  
b)  $4^6$ .

55. Em cada caso, escreva qual a potência que representa o produto das seguintes potências de mesma base:

a)  $3^4 \times 3^5$

b)  $4^2 \times 4^4$



56. Discuta com seus colegas e escreva uma frase que explique como se faz para multiplicar potências de mesma base.

Você viu que:

$$2^2 \times 2^3 = 2^{2+3} = 2^5,$$

$$\text{mas } 2^2 = 4, 2^3 = 8 \text{ e } 2^5 = 32.$$

Logo, a igualdade anterior é equivalente à igualdade  $4 \times 8 = 32$ .

Mas, como  $32 : 8 = 4$ , podemos concluir que:

$$2^5 : 2^3 = 2^2 \text{ (observe que } 2 = 5 - 3 \text{)}.$$

57. Escreva uma frase que explique como se faz para dividir potências de mesma base.

58. Calcule, usando o que você descobriu, como dividir potências de mesma base:

a)  $13^8 : 13^5$

b)  $5^9 : 5^6$

Em alguns problemas, você precisará saber como se calcula uma "potência de potência". Por exemplo, como calcular  $(2^3)^4$ ? Observe o exemplo a seguir, para obter a resposta a essa pergunta.



Exemplo:

4 fatores

$$\text{Você sabe que: } 3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3$$

Agora, observe:

4 fatores

$$(2^3)^4 = (2^3) \times (2^3) \times (2^3) \times (2^3) = 2^{3+3+3+3} = 2^{12}; \text{ logo, } (2^3)^4 = 2^{3 \times 4} = 2^{12}.$$

59. Em cada caso, responda qual a potência de mesma base, com um único expoente, que representa:

a)  $(3^5)^7$

b)  $(9^3)^8$

60. Escreva uma frase que explique como se faz para calcular uma potência de potência.

56. Para multiplicar potências de mesma base, repete-se a base e soma-se os expoentes.

Explore mais as situações dos exercícios 56 e 58 com outros exemplos antes de explorar os exercícios seguintes: 57 e 59.

Use, também, expressões literais como  $a^n \times a^m$ ,  $a^n : a^m$  e  $(a^n)^m$ .

57. Para dividir potências de mesma base, repete-se a base e subtraem-se os expoentes.

Ao discutir o exercício 57, chame a atenção para situações em que o expoente do divisor é maior que o expoente do dividendo com, por exemplo,  $2^3 : 2^5 = 8 : 32 = 1 : 4 = 1 : 2^2 = 1 : 2^{(5-3)}$ . Diga que estas situações serão vistas mais adiante e, que no momento, só serão exploradas as em que o expoente do dividendo é maior ou igual ao expoente do divisor.

58. a)  $13^3$ ;  
b)  $5^3$ .

Em casa, os alunos devem anotar no caderno os textos das respostas 56, 57 e 60.

59. a)  $3^{35}$ ;  
b)  $9^{24}$ .

60. Para calcular uma potência de potência, repete-se a base e multiplica-se os expoentes.

Para que não fique a falsa ideia de se poder generalizar a partir de casos particulares, afirme que as regras expressas pelas frases das respostas 56, 57 e 60 são verdadeiras quaisquer que sejam as potências envolvidas nos cálculos. Explore mais as aplicações delas:

- a) Usando expressões contendo dois ou três fatores de uma base e dois ou três fatores de outra base;  
b) Envolvendo potências de potências com mais de dois expoentes a serem multiplicados, como  $[(2^3)^4]^5$ .

Professor(a): Novamente lembramos que o capítulo é sobre números naturais (logo, “fatores” significa “fatores naturais”, “números” significa “números naturais” etc.)

## Aprendendo em casa

61. (b) e (d).

a)  $3 \times 4 \times 5 \times 6$

c)  $3 \times 4 \times 6 \times 8 \times 5$

b)  $7 \times 7 \times 7 \times 7$

d)  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

62. a)  $3^5$ ;  
b)  $4^2$ ;  
c)  $2^5$ ;  
d)  $4^3$ .

62. Escreva o produto de cada multiplicação a seguir como potência:

a)  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$

c)  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$

b)  $4 \times 4$

d)  $4 \times 4 \times 4$

63. a)  $3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81$ ;  
b)  $2 \times 2 \times 2 = 8$ ;  
c)  $4 \times 4 \times 4 = 64$ ;  
d)  $3 \times 3 = 9$ .

63. Escreva as potências a seguir como multiplicações de fatores iguais e calcule-as.

a)  $3^4$

b)  $2^3$

c)  $4^3$

d)  $3^2$

64. a)  $7^5$ ;  
b)  $23^6$ ;  
c) 1;  
d) 0;  
e) 1 000 000 000.

64. Calcule:

a)  $7^{11} : 7^6$

b)  $23^9 : 23^3$

c)  $1^{12}$

d)  $0^{18}$

e)  $10^9$

65. a)  $3^{60}$ ;  
b)  $5^{12}$ .

65. Calcule:

a)  $[(3^2)^3]^{10}$

b)  $(5^4)^3$

66. a)  $3^7$ ;  
b)  $5^{26}$ ;  
c)  $2^{103}$ ;  
d)  $3^{24}$ .

66. Escreva o resultado na forma de potência:

a)  $3^4 \times 3^3$

b)  $5^{11} \times 5^{15}$

c)  $2^{101} \times 2^2$

d)  $3^{12} \times 3^{12}$

Insista com cálculos de potências até ter certeza de que os alunos não estão confundindo tais cálculos com o cálculo de produtos da base pelo expoente. Constantemente, se veem alunos cometerem erros do tipo  $2^3 = 6$ ,  $3^2 = 6$  etc.

Antes de aplicar as atividades “Explorando o que você já sabe” da página 27, veja as observações sobre elas na página 11.

67. Veja como calcular  $3^5$ , usando a calculadora.



Siga os passos	Aperte as teclas	Leia no visor
Limpar a calculadora	On/c	0
Digite	3	3
Digite	*	3
Digite	=	9
Digite	=	27
Digite	=	81
Digite	=	243
Resposta:	$3^5 = 243$	

67. a) 4;  
b) 8;  
c) 16;  
d) 32;  
e) 64;  
f) 128.

Observe que, para calcular  $3^5$ , digitamos o 3, depois o sinal x e depois **quatro** vezes o sinal = (uma vez a menos que o expoente).

Agora, use a calculadora para obter os valores das potências sucessivas de 2, a seguir:

a)  $2^2$

b)  $2^3$

c)  $2^4$

d)  $2^5$

e)  $2^6$

f)  $2^7$

68. Use os resultados obtidos no exercício anterior para comprovar que:

a)  $2^2 \times 2^3 = 2^5$       b)  $2^3 \times 2^4 = 2^7$       c)  $2^7 : 2^2 = 2^5$

69. Maura é modelo e recebeu duas propostas diferentes por dez dias seguidos de trabalho: ou R\$ 1 500,00; ou 2 reais no primeiro dia, 4 reais, no segundo, 8, no terceiro, dobrando sempre até o décimo dia. Qual é a opção mais vantajosa para Maura?

70. Você se lembra? No capítulo 3 do sexto ano, você aprendeu que:

$$200 \times 4\,000 = (2 \times 100) \times (4 \times 1\,000) = 8 \times 100\,000 = 8 \times 10^5$$

Reescreva, em seu caderno, as multiplicações a seguir como o produto de um número natural por uma potência de 10:

a)  $300 \times 50\,000$       b)  $1\,200 \times 3\,000$

71. Escreva em seu caderno:

a)  $(2^6)^7$  como uma única potência de 2.

b)  $(5^4)^4$  como uma única potência de 5.

## Um pouco mais sobre múltiplos e divisores

### Explorando o que você já sabe

Abaixo, você vê algumas frases, das quais apenas uma é falsa. Qual é ela?

- 1, 2, 3, 4, 6, 8 são divisores de 48.
- Todos os múltiplos de 10 são também múltiplos de 2 e de 5.
- Todo número diferente de zero é, ao mesmo tempo, múltiplo e divisor dele mesmo.
- O zero é múltiplo de qualquer número.
- 48 e 36 são múltiplos comuns de 4 e 6.
- 4 e 6 são divisores comuns de 24 e 36.
- Se 7 é divisor de 14 e 14 é divisor de 308, então 7 é divisor de 308.
- Todo divisor de 45 é também divisor de 15.
- Se 210 é múltiplo de 105 e 105 é múltiplo de 15, então 210 é múltiplo de 15.

### Aprendendo em sala de aula

72. Leia, pense e resolva:

Um depósito contém entre mil e dois mil litros de óleo. É possível distribuir todo esse óleo usando somente garrafas de 3 litros ou garrafões de 25 litros. Porém, não é possível distribuir em garrafas de 4 litros ou de 9 litros. Qual pode ser a maior quantidade de óleo contida nesse depósito?

68. a)  $4 \times 8 = 32$ ;  
b)  $8 \times 16 = 128$ ;  
c)  $128 : 4 = 32$ .

69. A segunda, porque  $2 + 4 + 8 + 16 + \dots + 216 + 512 + 1\,024$  é maior que 1 500. Basta verificar que a soma das duas últimas parcelas já é maior que 1 500.

70. a)  $15 \times 10^6$ ;

b)  $36 \times 10^5$ .

71. a)  $2^{42}$ ;

b)  $5^{16}$ .

Explorar regularidades para estabelecer a divisibilidade por 9. Comentar que a soma dos algarismos de números divisíveis por 9 é divisível por 9 (e reciprocamente). Exemplos: 27 (2 + 7), 99 (9 + 9), 108 (1 + 8) etc.

Explorar regularidades para estabelecer a divisibilidade por 25.

(a) Verificar, usando calculadora, que:

1 975, 1 950, 1 925, 1 900,

1 875, 1 850, 1 825 são

todos divisíveis por 25.

(b) Comentar que os dois últimos algarismos formam os números 00, 25, 50 ou 75, todos divisíveis por 25.

Use, também, a regularidade dos produtos de 25 por 4 a 5 números naturais, sugeridos pelos alunos, para concluir que todos os produtos satisfazem a condição comentada acima. Logo, como são múltiplos de 25, 25 é divisor deles.

#### ATIVIDADES ORAIS

• A penúltima frase é falsa.

Contraexemplo:

9 é divisor de 45 e não é divisor de 15.

Caso sejam percebidas dúvidas relacionadas com os conceitos de múltiplos, divisores, múltiplos comuns e divisores comuns, explore atividades análogas a algumas propostas no capítulo 5 do livro do sexto ano.

72. 1 950 litros.

O número procurado deve ser múltiplo de  $3 \times 25 = 75$  e não múltiplo de 4 ou 9. Como o quociente de 2 000 por 75 é maior que 26, basta calcular os produtos de 75 por 26, 25, etc., até encontrar a solução. Observamos que:  $75 \times 26 = 1\,950$  já satisfaz as condições do problema.

74. Em ambos os casos, o número deve ser múltiplo de 12 para ter os fatores 3 e 4. O maior número de 4 algarismos é 9 999. A divisão  $9\,999 : 12$  tem por quociente 833,25. Logo,  $833 \times 12 = 9\,996$  é o maior número procurado. Observe que  $834 \times 12 = 10\,008$ , que tem 5 algarismos. O menor número de 4 algarismos é 1 000 e a divisão do mesmo por 12 tem por quociente 83,33... Logo,  $84 \times 12 = 1\,008$  é o menor número procurado. Observe que  $83 \times 12 = 996$  tem três algarismos.

75. A B C  
4 8 12  
16 20 24  
28 32 36  
A – (múltiplos de 3) + 1  
B – (múltiplos de 3) + 2  
C – (múltiplos de 3)  
 $276 : 3 = 92$   
(múltiplo de 3). R) Celso.

76. 3 figurinhas para 12 crianças;  
4 figurinhas para 9 crianças;  
6 figurinhas para 6 crianças; 9  
figurinhas para 4 crianças; 12  
figurinhas para 3 crianças; 18  
figurinhas para 2 crianças; 36  
figurinhas para 1 criança.

77. 1 e 36, 2 e 18, 3 e 12,  
4 e 9, 6 e 6.

78. 1 e 36, 2 e 18, 3 e 12,  
4 e 9, 6 e 6.

79. a) 77; b) 76 e 78.

80. a)  $11 = 1 \times 11$ ,  
 $13 = 1 \times 13$ ,  
 $17 = 1 \times 17$ ,  
 $19 = 1 \times 19$ ;  
b)  $4 = 1 \times 2 \times 2$ ,  
 $6 = 1 \times 2 \times 3$ ,  
 $8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2$ ,  
 $9 = 1 \times 3 \times 3$ ,  
 $10 = 1 \times 2 \times 5$ ,  
 $12 = 1 \times 2 \times 2 \times 3$  etc.

81. a)  $1 \times 2$ ;  
b)  $1 \times 3$ ;  
c)  $1 \times 2 \times 2$ ;  
d)  $1 \times 5$ ;  
e)  $1 \times 2 \times 3$ ;  
f)  $1 \times 7$ ;  
g)  $1 \times 2 \times 2 \times 2$ ;  
h)  $1 \times 3 \times 3$ ;  
i)  $1 \times 2 \times 5$ ;  
j)  $1 \times 11$ ;  
k)  $1 \times 2 \times 2 \times 3$ ;  
l)  $1 \times 13$ ;  
m)  $1 \times 2 \times 7$ ;  
n)  $1 \times 3 \times 5$ ;  
o)  $1 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ;  
p)  $1 \times 17$ ;  
q)  $1 \times 2 \times 3 \times 3$ ;  
r)  $1 \times 19$ ;  
s)  $1 \times 2 \times 2 \times 5$ .

73. Qual é o maior número de 5 algarismos que é múltiplo de 9? E o menor?

73. Maior: 99 999.

Menor: 10 008.

74. Qual o maior número de 4 algarismos que é múltiplo de 3 e 4? E o menor?

75. Antônio, Bernardo e Celso começaram a dizer a sequência de múltiplos de 4. Antônio disse 4, Bernardo disse 8, Celso disse 12, Antônio disse 16, e assim por diante. Qual deles vai dizer o número 276?

76. Laerte tem 36 figurinhas. Ele pode dar 1 figurinha para 36 crianças, ou 2 para 18 crianças. Escreva as outras maneiras como ele pode doar todas as figurinhas.

77. Escreva todos os pares de números naturais cujo produto é 36.

78. Você sabe que, se o comprimento de um retângulo mede 9 cm e a largura mede 4 cm, então a área dele mede  $36 \text{ cm}^2$ . Escreva todas as possíveis medidas inteiras, em centímetros, de um retângulo cuja área seja  $36 \text{ cm}^2$ .

79. Os três exercícios anteriores estão relacionados com um mesmo fato: a procura de pares de números naturais cujo produto é 36.

a) Qual deles usa linguagem matemática?

b) Quais deles usam linguagem corrente?

80. Dê exemplos de:

a) Números naturais, entre dez e vinte, que só possam ser escritos como produto de exatamente dois números naturais.

b) Números naturais, entre um e vinte, que possam ser escritos como produto de mais de dois números naturais.

81. Observe as afirmações no quadro a seguir:

O produto  $1 \times 2 \times 3 \times 5$  contém a maior quantidade possível de fatores do número 30.

O produto  $1 \times 2 \times 2 \times 2$  contém a maior quantidade possível de fatores do número 8.

O produto  $1 \times 23$  contém a maior quantidade possível de fatores do número 23.

Agora, escreva cada um dos números a seguir como produto da maior quantidade possível de números naturais:

a) 2

f) 7

k) 12

p) 17

b) 3

g) 8

l) 13

q) 18

c) 4

h) 9

m) 14

r) 19

d) 5

i) 10

n) 15

s) 20

e) 6

j) 11

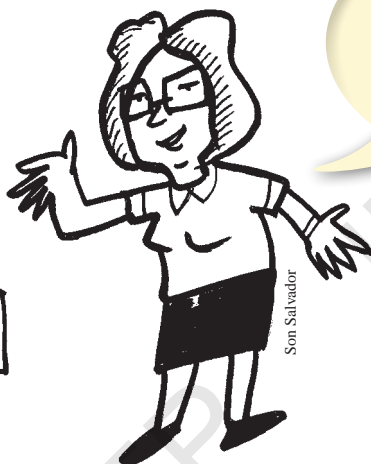
o) 16



Professora, li em um livro que existem números chamados **números primos**. O que significa isso?



Você mesmo vai responder a essa pergunta. Para isso, vou dar exemplos não apenas de números primos, como também de **números compostos**.



Esclareça aos alunos que só são chamados números primos ou números compostos os números naturais maiores que 1. Assim, o zero e o um não são considerados nem primos nem compostos.

82. Observe:

$$2 = 2 \times 1$$

$$3 = 3 \times 1$$

$$13 = 13 \times 1$$

$$19 = 19 \times 1$$

Responda:

- a) Os quatro números acima estão escritos como produtos de quantos números naturais?
- b) É possível escrevê-los como produto de uma quantidade maior de números naturais diferentes?

Recomende ou explore a leitura de:

“Atividades e jogos com números” (p. 26-31).

Marion Smoothey – Tradução de Sérgio Quadros  
Coleção Investigação Matemática.

Editora Scipione.

82. a) 2;  
b) Não.

83. Observe:

$$4 = 1 \times 2 \times 2$$

$$8 = 1 \times 2 \times 2 \times 2$$

$$18 = 1 \times 2 \times 3 \times 3$$

Responda:

- a) O número 4 está escrito como produto de quantos números naturais?
- b) Os números 8 e 18 estão escritos como produto de quantos números naturais?

83. a) 3;  
b) 4.



Os números 2, 3, 13, 19 são exemplos de números primos, enquanto que os números 4, 8 e 18 são exemplos de números compostos.

84. Escreva os números a seguir como produto do maior número possível de números naturais:

a) 7

b) 10

c) 23

d) 12

84. a)  $1 \times 7$ ;  
b)  $1 \times 2 \times 5$ ;  
c)  $1 \times 23$ ;  
d)  $1 \times 2 \times 2 \times 3$ .

85. Dois dos números anteriores são números primos e dois são números compostos.

- a) Quais deles você diria que são números primos?
- b) Quais deles você diria que são números compostos?

85. a) 7 e 23;  
b) 10 e 12.

86. a) Número primo é todo número natural, maior que 1, que só pode ser escrito como produto de números naturais com exatamente dois fatores.

b) Número composto é todo número natural, maior que 1, que pode ser escrito como produto de mais de dois números naturais.

Em casa, os alunos devem anotar em seus cadernos as respostas (a) e (b) do exercício 86.

87. Verdadeiro.

88. Itens (a) até (d), atividades dos alunos.

e) Todos eles são números primos porque cada um só pode ser escrito como produto de dois números naturais: ele mesmo e o 1.

f) Atividade dos alunos.

Relacione os itens (a), (b), (c), (d), do exercício 88, com o conceito de múltiplos de um número natural.

Comente com os alunos que este procedimento para se encontrar números primos, ilustrado na tabela com os números primos menores do que 1 000, já era usado pelos gregos muitos anos antes de Cristo.

86. Discuta com seus colegas e escreva em seu caderno duas frases:

- a) A primeira, que explique o que é um número primo.
- b) A segunda, que explique o que é um número composto.

87. Discuta com seus colegas e decidam se é verdadeira ou falsa a frase: se um número natural (diferente de zero e um) só é divisível por ele mesmo e por 1, então ele é um número primo.

88. Escreva todos os números naturais de 1 até 50, em cinco linhas de 10 números cada: (1 a 10, 11 a 20 etc.)

- a) A partir do 2, sem cortar o 2, dê um risco em todos os números de dois em dois.
- b) A partir do 3, sem cortar o 3, dê um risco em todos os números de três em três.
- c) A partir do 5, sem cortar o 5, dê um risco em todos os números de cinco em cinco.
- d) A partir do 7, sem cortar o 7, dê um risco em todos os números de sete em sete.
- e) Excluindo o 1, o que você pode dizer dos números que não cortou? Justifique sua resposta.
- f) Dê um risco sobre o 1.

Usando um processo semelhante ao do exercício anterior, você pode obter a seguinte tabela de números primos menores que 1 000:

Números primos menores que 1 000													
2	3	5	7	11	13	17	19	23	29	31	37	41	43
47	53	59	61	67	71	73	79	83	89	97	101	103	107
109	113	127	131	137	139	149	151	157	163	167	173	179	181
191	193	197	199	211	223	227	229	233	239	241	251	257	263
269	271	277	281	283	293	307	311	313	317	331	337	347	349
353	359	367	373	379	383	389	397	401	409	419	421	431	433
439	443	449	457	461	463	467	479	487	491	499	503	509	521
523	541	547	557	563	569	571	577	587	593	599	601	607	613
617	619	631	641	643	647	653	659	661	673	677	683	691	701
709	719	727	733	739	743	751	757	761	769	773	787	797	809
811	821	823	827	829	839	853	857	859	863	877	881	883	887
907	911	919	929	937	941	947	953	967	971	977	983	991	997

89. Primos: 683, 857, 241, 433 e 577.  
Compostos: 343, 897, 391, 511 e 559.

89. Use a tabela anterior para verificar quais dos números a seguir são primos e quais são compostos:

- a) 343                      c) 683                      e) 241                      g) 433                      i) 559
- b) 897                      d) 857                      f) 391                      h) 511                      j) 577

## Aprendendo em casa

90. Use a tabela de números primos para classificar os números a seguir como primos ou compostos:

a) 139    b) 135    c) 241    d) 217    e) 297    f) 313    g) 563

90. a) Primo; b) Composto; c) Primo; d) Composto; e) Composto; f) Primo; g) Primo.

91. Escreva todos os pares de números naturais cujo produto é 24.

91. 1 x 24; 2 x 12; 3 x 8; 4 x 6.

92. Escreva a maior quantidade possível de pares de números naturais cujo produto seja:

a) 21    b) 22    c) 25    d) 29    e) 31

92. a) 3 x 7; 1 x 21; b) 2 x 11; 1 x 22; c) 5 x 5; 1 x 25; d) 1 x 29; e) 1 x 31.

93. Classifique os números do exercício anterior como primos ou compostos.

93. a) Composto; b) Composto; c) Composto; d) Primo; e) Primo.

## Usando os fatores dos números

### Explorando o que você já sabe

Abaixo, você vê algumas frases. Apenas uma delas é falsa. Qual?

- 1, 2, 3, 4, 6, 8 são divisores de 48.
- 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 são divisores de 36.
- 1 e 25 são divisores de 25.
- 1 é divisor de qualquer número natural.
- Todo número natural é divisor dele mesmo.

## Aprendendo em sala de aula

94. No quadro a seguir, você vê dois tipos de representações de números como produtos de alguns de seus fatores. Observe-o atentamente:

Fatorações	Fatorações completas
$84 = 4 \times 21$	$84 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 = 2^2 \times 3 \times 7$
$180 = 10 \times 18$	$180 = 2 \times 5 \times 2 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^2 \times 5$
$108 = 2 \times 54$	$108 = 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 = 2^2 \times 3^3$
$81 = 9 \times 9$	$81 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 3^4$

Agora, responda:

- a) Na coluna das “fatorações”, existem fatores que sejam números primos? Existem fatores que não sejam números primos? **94. a)** Na fatoração  $108 = 2 \times 54$ , existe o fator 2 que é primo, enquanto que, nas fatorações de 84, 81 e 180, os fatores não são números primos.
- b) Na coluna das “fatorações completas” existem fatores que não sejam números primos ou potências de números primos? **b)** Não. Nas fatorações completas, todos os fatores são primos ou potências de números primos.
- c) Classifique as igualdades a seguir como fatorações ou fatorações completas dos números escritos no primeiro membro: **1ª.**  $60 = 2^2 \times 3 \times 5$  • **2ª.**  $48 = 6 \times 8$  • **3ª.**  $80 = 2^4 \times 5$  • **4ª.**  $72 = 8 \times 9$  • **5ª.**  $16 = 4 \times 4$  • **6ª.**  $16 = 2^4$  **c)** São fatorações a 2ª., 4ª. e 5ª. E são fatorações completas a 1ª., 3ª. e 6ª.
- d) As representações de números como produtos que contêm apenas fatores que sejam números primos ou potências de números primos recebem que nome? **d)** Recebem o nome de fatorações completas desses números.
- e) Que nome recebe a representação de um número como potência de um único número primo? **e)** Chama-se fatoração completa desse número.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

### ATIVIDADES ORAIS

A última, porque zero não é divisor de zero.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”

Os exercícios 94 e 95 a seguir visam a caracterizar e distinguir: “fatoração de um número” de “fatoração completa de um número”. Somente depois de explorá-los e, se julgar necessário, propor outras atividades com o mesmo objetivo, escreva no quadro as frases a seguir, dizendo que devem anotá-las em seus cadernos:

Chama-se “fatoração de um número” a representação dele como um produto de números naturais.

Chama-se “fatoração completa de um número” a representação dele como produto de fatores que sejam números primos ou potências de números primos.

Em particular, se um número é representado pela potência de um único número primo, essa potência também se denomina fatoração completa desse número.

Esclareça que o tema que vai ser apresentado nesta unidade – fatoração completa – será de grande utilidade em outros temas, como o estudo dos múltiplos e divisores de números naturais, o cálculo do máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de números naturais, o cálculo de algumas raízes quadradas ou raízes cúbicas de números naturais, na simplificação de frações.

Explique que a fatoração (não completa) é útil, em certas situações, como um primeiro estágio para obter a fatoração completa. Por exemplo, da fatoração  $72 = 8 \times 9$  se conclui facilmente a fatoração completa  $72 = 2^3 \times 3^2$ . Proponha que usem as fatorações  $4 \times 27$  e  $8 \times 25$  e obtenham fatorações completas de 108 e 200, respectivamente.

95. a)  $36 = 4 \times 9$ ;  
 b)  $36 = 2^2 \times 3^2$ ;  
 c) Não;  
 d) Não, porque 8 não é número primo;  
 e)  $16 = 2^4$  e  $27 = 3^3$ .

Comente com os alunos:

• Para fatorar completamente um número, devemos tentar dividi-lo sucessivamente pelos números primos 2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19 etc.

• Para iniciar a fatoração, devemos tentar inicialmente dividir o número por 2 tantas vezes quantas forem possíveis de se obterem divisões exatas.

• Depois, passamos às tentativas de divisão por 3.

• Depois, por cinco.

• E assim sucessivamente, até obtermos 1 como quociente.

Observe que esta é uma sugestão para sistematizar a fatoração. Não seria errado escrever:

$$924 = 2 \times 3 \times 7 \times 2 \times 11.$$

96. a)  $2^3 \times 3^2 \times 11$ ;  
 b)  $2^5 \times 5$ ;  
 c)  $2^5 \times 3$ ;  
 d)  $2 \times 3^2 \times 17$ ;  
 e)  $2^3 \times 3 \times 17$ .

Recorde as propriedades das potências de expoente zero e um; depois peça que resolvam. Representem todas as potências de 7 com expoente no máximo igual a 3 e calculem seus valores.

97. a) 2 ou 3;  
 b) 1, 2 e 3;  
 c) Não;  
 d) 3; 1;  
 e) Não;  
 f) Não;  
 g) 1;  
 h) Fatorações completas:  
 $24 = 2^3 \times 3$  e  
 $36 = 2^2 \times 3^2$ . O expoente 3 do fator 2 de 24 é maior que o expoente 2 do mesmo fator de 36. Logo, 24 não é divisor de 36;  
 i)  $18 = 2 \times 3^2$  e seus divisores são: 1, 2, 3,  $2 \times 3 = 6$ ,  $3^2 = 9$  e 18.

Comente: Observe a fatoração do número 18, do exercício 98. Como os divisores de 18 são: 1, 2, 3,  $6 = 2 \times 3$ ,  $9 = 3 \times 3$ , e  $18 = 1 \times 2 \times 3 \times 3$ , observamos que seus divisores têm, no máximo, o 1 como expoente do fator 2, bem como, no máximo, o 2 como expoente do fator 3. Esse fato permitirá aos alunos responder os itens do exercício 98.

95. Faça o que se pede ou responda:

- a) Escreva uma fatoração de 36 cujos fatores não sejam números primos.  
 b) Escreva a fatoração completa de 36.  
 c) Na fatoração completa de um número, podem existir fatores que não sejam números primos ou potências de números primos?  
 d) O produto  $5 \times 8$  é uma fatoração completa de 40? Justifique.  
 e) Os casos particulares  $8 = 2^3$ ,  $9 = 3^2$  são também chamados fatorações completas de 8 e 9, respectivamente. Escreva as fatorações completas de 16 e 27.

96. O que você vê a seguir são exemplos de **como fatorar completamente** os números 600 e 924:

Fatoração completa de números naturais			
600	2 (menor n° primo que divide 600)	924	2
300	2 (menor n° primo que divide 300)	462	2
150	2 (menor n° primo que divide 150)	231	3
75	3 (menor n° primo que divide 75)	77	7
25	5 (menor n° primo que divide 25)	11	11
5	5	1	
1			
Logo, $600 = 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 5 \times 5$ ou $600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$		Logo, $924 = 2 \times 2 \times 3 \times 7 \times 11$ ou $924 = 2^2 \times 3 \times 7 \times 11$	

Agora, fatore completamente os números:

- a) 792      b) 160      c) 96      d) 306      e) 408

97. Observe as **fatorações completas** dos números 24 e 36 e alguns de seus divisores:

Número	Alguns divisores do número				
$24 = 2^3 \times 3$	$4 = 2^2$	$8 = 2^3$	$6 = 2 \times 3$	$12 = 2^2 \times 3$	$24 = 2^3 \times 3$
$36 = 2^2 \times 3^2$	$4 = 2^2$	$9 = 3^2$	$6 = 2 \times 3$	$12 = 2^2 \times 3$	$18 = 2 \times 3^2$

Responda:

- a) Na tabela, os divisores de 24 têm quais fatores primos?  
 b) Quais os outros divisores de 24 que não constam da tabela?  
 c) Algum divisor de 24 tem fator primo diferente de 2 ou 3?  
 d) Qual o expoente do fator 2 na fatoração do número 24? E do fator 3?  
 e) Observe os expoentes do fator 2 dos divisores de 24; algum deles é maior que 3?  
 f) Observe os expoentes do fator 3 dos divisores de 24; algum deles é maior que 1?  
 g) Qual o maior expoente que o fator 3 de um divisor de 24 pode ter?  
 h) Use as fatorações completas de 24 e 36 para justificar por que 24 não é divisor de 36.  
 i) Fatore 18 e escreva todos os seus divisores.



98. Observe as fatorações completas a seguir:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

$$40 = 2^3 \times 5$$

Agora, use os fatores primos de cada número e seus expoentes para dizer pelo menos uma razão pela qual:

- a) 12 não é divisor de 18.
- b) 12 é divisor de 36.
- c) 12 é divisor de 24.
- d) 12 não é divisor de 40.
- e) 18 é divisor de 36.
- f) 18 não é divisor de 40.
- g) 20 é divisor de 40.
- h) 20 não é divisor de 36.

99. Responda:

- a) Qual é o menor número pelo qual se deve dividir  $2^2 \times 3^3$  para se ter um divisor de  $2^2 \times 3$ ?
- b) Qual é o menor número pelo qual se deve dividir  $2^2 \times 3^3 \times 5$  para se ter um divisor de  $2^2 \times 3 \times 5^2$ ?

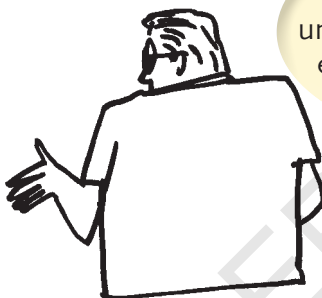
100. Verdadeiro ou falso:

- a) Um número pode ter fatores primos diferentes dos fatores primos de seus divisores. **Verdadeiro.**
- b) Um divisor de um número pode ter fatores primos diferentes dos fatores primos do número. **Falso.**
- c) O expoente de um fator primo de um divisor de um número não pode ser maior que o expoente do mesmo fator primo do número. **Verdadeiro.**

- a) Escreve cada um de seus fatores primos com expoentes que variam desde o expoente 1 até o expoente que ele contém na fatoração completa do número.
- b) Escreve todos os produtos possíveis de se obter usando dois dos números obtidos no item “a” anterior e que não sejam potências de um mesmo fator primo.
- c) Se existirem 3 fatores primos, escreve todos os produtos possíveis usando três dos números obtidos no item “a” anterior e que não sejam potências de um mesmo fator primo.
- d) E assim por diante.

Professor,  
a Leonor escreve  
divisores de um número  
fatorado como se vê no  
quadro ao lado:

Este  
processo sempre  
dá certo?



Sim! Essa é a maneira  
correta de escrever divisores de  
um número. Não se pode esquecer,  
é claro, que o número 1 é divisor  
de qualquer número.

- 98. a) O expoente do fator 2 do número 12 é maior que o expoente do fator 2 do número 18;
- b) Os expoentes dos fatores primos de 12 não são maiores que os correspondentes do número 36;
- c) Os expoentes dos fatores primos de 12 não são maiores que os correspondentes do número 24;
- d) O número 12 tem os fatores 2 e 3, enquanto o número 40 tem os fatores 2 e 5;
- e) Os expoentes dos fatores primos de 18 não são maiores que os correspondentes do número 36;
- f) O número 18 tem os fatores 2 e 3, enquanto o número 40 tem os fatores 2 e 5;
- g) Os expoentes dos fatores primos de 20 não são maiores que os correspondentes do número 40;
- h) O número 20 tem os fatores 2 e 5, enquanto o número 36 tem os fatores 2 e 3.

- 99. a) 9;
- b) 9.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, o enunciado e o quadro em destaque, do exercício 96, e os textos do diálogo e do quadro do exercício 100.

Os conceitos de múltiplos, divisores, múltiplos comuns, divisores comuns, m.m.c., m.d.c. foram estudados no capítulo 5 do sexto ano.

**Professor(a):** Explore a noção de função, propondo aos alunos que calculem os quatro valores de A na expressão  $A = 2^n \times 3$  correspondentes à substituição de n por 1, 2, 4 e 6. Explore também, atividades semelhantes com expressões com números naturais, como, por exemplo,  $A = 2n$ .  $A = 2n - 1$ ,  $A = n^2$ , etc.

101. a) Sim;  
b) Sim;  
c) Sim;  
d) Sim;  
e) Não, sim, sim;  
f) Sim;  
g) Não: 6 tem os fatores 2 e 3 e não é múltiplo de 12;  
h) Fator 2  $\Rightarrow$  2;  
fator 3  $\Rightarrow$  1.

Comente: Chama-se “contraexemplo” de uma afirmação qualquer argumento que permita concluir que ela é falsa. A frase “um número que tem os fatores 2 e 3 é múltiplo de 36” é falsa, e alguns contraexemplos para ela são: a) 6 tem os fatores 2 e 3 e não é múltiplo de 36; b) 12 tem os fatores 2 e 3 e não é múltiplo de 36.

Argumente: Observe a fatoração do número 12, do exercício 102. Como alguns dos primeiros múltiplos de 12 são 12, 24, 36, observamos que seus múltiplos têm, no mínimo, o 2 como expoente do fator 2, bem como, no mínimo, o 1 como expoente do fator 3. Esse fato permitirá aos alunos responderem os itens do exercício 102.

102. a) Porque o expoente do fator 2 de 18 é menor que o expoente do fator 2 de 12;  
b) Porque o expoente de cada fator primo de 36 é, no mínimo, igual ao expoente do mesmo fator primo de 12;  
c) Porque o expoente de cada fator primo de 24 é, no mínimo, igual ao expoente do mesmo fator primo de 12;  
d) Porque 40 não tem o fator primo 3;  
e) Porque o expoente de cada fator primo de 36 é, no mínimo, igual ao expoente do mesmo fator primo de 18;  
f) Porque 40 não tem o fator primo 3;  
g) Porque os expoentes dos fatores primos de 40 não são menores que os expoentes dos fatores primos de 20;  
h) Porque 36 não tem o fator primo 5;  
i) Porque o expoente do fator 3 de 120 é menor que o expoente do fator 3 de 18;  
j) Porque o expoente de cada fator primo de 120 é, no mínimo, igual ao expoente do mesmo fator primo de 24.

103. a) 9;  
b) 5.

101. Observe as fatorações completas dos números 10 e 12 e alguns de seus múltiplos:

Número dado	Alguns múltiplos do número			
$10 = 2 \times 5$	$2^2 \times 5 = 20$	$2 \times 5^2 = 50$	$2^2 \times 5^2 = 100$	$3 \times 2 \times 5 = 30$
$12 = 2^2 \times 3$	$2^3 \times 3 = 24$	$2^2 \times 3^2 = 36$	$2^2 \times 3 \times 5 = 60$	$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$

Responda:

- a) Todos os múltiplos de 10 têm os fatores primos 2 e 5?  
b) Um múltiplo de dez pode ter um fator diferente de 2 e de 5?  
c) Todos os múltiplos de 12 têm os fatores 2 e 3?  
d) Um múltiplo de 12 pode ter um fator diferente de 2 e de 3?  
e) Os expoentes do fator 2 dos múltiplos de 12 são menores que os expoentes do fator 2 de 12? Podem ser iguais? Podem ser maiores?  
f) Um número que tem os fatores 2 e 5 é múltiplo de 10?  
g) Um número que tem os fatores 2 e 3 é múltiplo de 12? Justifique sua resposta.  
h) Para que um número seja múltiplo de 12, quais são os menores expoentes que seus fatores 2 e 3 devem ter?

102. Observe as fatorações completas a seguir:

$12 = 2^2 \times 3$	$18 = 2 \times 3^2$	$20 = 2^2 \times 5$	$120 = 2^3 \times 3 \times 5$
$24 = 2^3 \times 3$	$36 = 2^2 \times 3^2$	$40 = 2^3 \times 5$	

Agora, use os fatores primos de cada número e seus expoentes para dizer pelo menos uma razão pela qual:

- a) 18 não é múltiplo de 12.  
b) 36 é múltiplo de 12.  
c) 24 é múltiplo de 12.  
d) 40 não é múltiplo de 12.  
e) 36 é múltiplo de 18.  
f) 40 não é múltiplo de 18.  
g) 40 é múltiplo de 20.  
h) 36 não é múltiplo de 20.  
i) 120 não é múltiplo de 18.  
j) 120 é múltiplo de 24.

103. Responda:

- a) Qual é o menor número pelo qual se deve multiplicar  $2^2 \times 3$  para se ter um múltiplo de  $2^2 \times 3^3$ ?  
b) Qual é o menor número pelo qual se deve dividir  $2^2 \times 3 \times 5^2$  para se ter um divisor de  $2^2 \times 3^3 \times 5$ ?

104. Verdadeiro ou falso:

- a) Um múltiplo de um número pode ter fatores primos diferentes dos fatores primos desse número.
- b) Um número pode ter fatores primos diferentes dos fatores primos de um de seus múltiplos.
- c) O expoente de um fator primo de um múltiplo de um número não pode ser menor que o expoente do mesmo fator primo do número.

104. a) Verdadeiro;  
b) Falso;  
c) Verdadeiro.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os textos do diálogo do exercício 104.

Explore as fatorações completas do exercício 102 para propor aos alunos que, após a leitura dos diálogos da ilustração ao lado, calculem 4 múltiplos de 24, 36 e 40.

Descobri como formar múltiplos de 12: como  $12 = 2^2 \times 3$ , basta calcular produtos contendo os fatores 2 e 3, com expoentes de 2 maiores ou iguais a 2, e expoentes de 3 maiores ou iguais a 1.

Correto!  
Mas observe que, se você multiplicar um desses múltiplos por qualquer número, ainda obterá múltiplos de 12. Por exemplo,  $2^3 \times 3 = 24$  é múltiplo de 12. Mas  $2^3 \times 3 \times 5 = 24 \times 5 = 120$  também é múltiplo de 12.



Soni Salvador

## Aprendendo em casa

105. Explique por quê:

- a)  $3 \times 18$  não é uma fatoração completa de 54.
- b)  $3 \times 3 \times 6$  não é uma fatoração completa de 54.
- c)  $3 \times 3 \times 3 \times 2$  é uma fatoração completa de 54.

105. a) Porque 18 não é fator primo de 54;  
b) Porque 6 não é fator primo de 54;  
c) Porque 54 está escrito como produto de fatores primos.

106. Escreva:

- a) Uma fatoração de 48 que não seja completa.
- b) Uma fatoração completa de 48.

106. a)  $4 \times 12$ ;  
b)  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3$ .

Lembre aos alunos que os números naturais são múltiplos e divisores de si mesmos, com exceção do zero que não é divisor dele mesmo.

107.

- a)  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ;
- b)  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2$ ;
- c)  $3 \times 3 \times 3$ ;
- d)  $3 \times 3 \times 3 \times 3$ ;
- e)  $2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3$ .

108. a) 128;

- b) 16;
- c) 108;
- d) 108.

- a) Multipliquei 32 pelo menor fator possível, que é 2, uma vez, obtendo 64. Depois novamente por 2, obtendo 128.
- b) Os divisores de 64 maiores que 15 são: 16, 32 e 64. O menor deles é o 16.
- c) Como  $27 = 3^3$  e  $4 = 2^2$ , o menor múltiplo deles é o produto:  $3^3 \times 2^2 = 108$ .
- d) Como:  
 $27 = 3^3$  e  $12 = 2^2 \times 3$ , o menor múltiplo deles é  $2^2 \times 3^3 = 4 \times 27 = 108$ .

109. a) 1, 3, 5, 7, 9, 15;

- b) Porque os expoentes de seus fatores 3 e 7 não são menores que os expoentes 3 e 7 do número 21.

Ver na página 11 observações sobre as atividades "Explorando o que você já sabe".

Caso julgue conveniente, explique que a restrição feita ao zero na definição de mínimo múltiplo comum é necessária pois, se não houvesse tal restrição, o zero seria o mínimo múltiplo comum de quaisquer conjuntos de números e tal fato não teria nenhuma utilidade futura.

#### ATIVIDADES ORAIS

- 0, 4, 8.
- 4.
- 0, 15, 30.
- 15.
- 1 e 2.
- 2.
- 1 e 5.
- 5.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os quatro quadros em destaque da seção "Explorando o que você já sabe".

107. Fatore completamente:

- a) 32
- b) 64
- c) 27
- d) 81
- e) 864

108. Escreva:

- a) O menor múltiplo de 32 que seja maior que 100.
- b) O menor divisor de 64 que é maior que 15.
- c) O menor múltiplo de 27 e de 4.
- d) O menor múltiplo de 27 e 12.

Justifique suas respostas.

109. Um número tem a seguinte fatoração completa:  $3^2 \times 5^2 \times 7$ .

- a) Escreva todos os divisores desse número menores que 20.
- b) Por que ele é múltiplo de 21?

## Múltiplos e divisores comuns

### Explorando o que você já sabe

Múltiplos de 2	0	2	4	6	8	10	12	14
Múltiplos de 3	0	3	6	9	12	15	18	21
O mínimo múltiplo comum de 2 e 3 é 6.								

O **mínimo múltiplo comum** de dois ou mais números é o seu menor múltiplo comum diferente de zero.

Representamos o mínimo múltiplo comum pela sigla m.m.c.

<b>Divisores de 8</b>	<b>1, 2, 4, 8</b>
<b>Divisores de 12</b>	<b>1, 2, 3, 4, 6, 12</b>
<b>Divisores comuns de 8 e 12</b>	<b>1, 2, 4</b>
<b>Maior divisor comum de 8 e 12: 4</b>	<b>4</b>

O maior divisor comum de dois ou mais números é também chamado de "**máximo divisor comum**" deles.

Representamos o máximo divisor comum pela sigla m.d.c.

- Quais são os três primeiros múltiplos comuns de 2 e 4?
- Qual é o mínimo múltiplo comum de 2 e 4?
- Quais são os três primeiros múltiplos comuns de 3 e 5?
- Qual é o mínimo múltiplo comum de 3 e 5?
- Quais são os divisores comuns de 8 e 6?
- Qual é o máximo divisor comum de 8 e 6?
- Quais são os divisores comuns de 15 e 10?
- Qual é o máximo divisor comum de 15 e 10?



## Aprendendo em sala de aula

110. Veja as frases a seguir e justifique o que se afirma em cada uma delas, ou responda o que se pergunta.

- 2, 3, 6 e 12 são divisores comuns de 12 e 36.
- Um número cuja fatoração completa contenha fator primo diferente de 2 e 3 não é divisor comum de 12 e 36.
- A fatoração completa de um número apresenta apenas os fatores 2 e 3. Qual o maior expoente que tais fatores podem ter para que o número seja divisor comum de 12 e 36? Qual o número que satisfaz essas condições?
- Verdadeiro ou falso: para calcular o m.d.c de dois (ou mais) números, devemos fatorá-los e calcular o produto de seus fatores comuns, cada um com o menor dos expoentes apresentados nas fatorações.
- 36, 72, 108 são alguns múltiplos comuns de 12 e 36.
- Qual é a condição para que um número seja múltiplo comum de 12 e 36?
- Verdadeiro ou falso: para calcular o m.m.c de dois (ou mais) números, devemos fatorá-los e calcular os produtos de todos os seus fatores primos, cada um com o menor dos expoentes apresentados nas fatorações
- Verdadeiro ou falso: como  $12 = 2^2 \times 3$ ,  $36 = 2^2 \times 3^2$ , e  $60 = 2^2 \times 3 \times 5$ , temos: m.m.c. (12,36) = 36, m.m.c. (12,60) = 60 e m.m.c. (36,60) = 180

111. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

$12 = 2^2 \times 3$	Menor expoente de 2 : 1	Menor expoente de 3 : 1
$18 = 2 \times 3^2$		
m.d.c. (12, 18) = 6	m.d.c. (12, 18) = $2^1 \times 3^1 = 2 \times 3 = 6$	
$36 = 2^2 \times 3^2$	Menor expoente de 2 : <b>a</b>	Menor expoente de 3 : <b>b</b>
$24 = 2^3 \times 3$		
m.d.c. (36, 24) = 12	m.d.c. (36, 24) = $2^c \times 3^d$	

112. Escreva como você fez para calcular o máximo divisor comum de dois números usando suas fatorações completas.

110. a) Como:  
 $12 = 2^2 \times 3$  e  $36 = 2^2 \times 3^2$ , 2, 3,  $6 = 2 \times 3$  e  $12 = 2^2 \times 3$  são divisores de 12 e 36 porque os expoentes de seus fatores primos não são maiores que os expoentes correspondentes de 12 e 36.

b) Como:  
 $12 = 2^2 \times 3$  e  $36 = 2^2 \times 3^2$ , para que um número seja divisor comum deles, deve ter, em sua fatoração completa, apenas os fatores 2 e 3;

c) O expoente de 2 deve ser, no máximo 2, para que o número seja divisor de 12 e 36, e o expoente de 3 deve ser, no máximo 1, para que o número seja divisor de 12. O número que satisfaz essas condições é o número 12 porque  $12 = 2^2 \times 3$ ;

d) Verdadeiro;

e) 36 é múltiplo de 12 e dele mesmo. Como:  
 $72 = 2^3 \times 3^2$  e  $108 = 2^2 \times 3^3$ , eles são múltiplos de 12 e 36 porque os expoentes dos fatores 2 e 3 de ambos não são menores que os correspondentes nas fatorações de 12 e 36;

f) Como:  
 $12 = 2^2 \times 3$  e  $36 = 2^2 \times 3^2$ , para que um número seja múltiplo comum deles, a fatoração do número deve ter, no mínimo, os fatores 2 e 3 com os expoentes de 2 maiores que ou iguais a 2 e os expoentes de 3 maiores que ou iguais a 2.

g) Verdadeiro;

h) Verdadeiro.

**Professor(a):** Esclareça que, como 36 é o m.m.c. de 12 e 36, qualquer múltiplo dele também é múltiplo de 12 e 36. Dê exemplos e destaque os novos fatores primos ou novos expoentes dos fatores primos já existentes.

Afirme que as regras para calcular m.d.c. e m.m.c. contidas nos itens (d) e (g) são verdadeiras para quaisquer quantidades de números.

111. (a) 2;  
 (b) 1;  
 (c) 2;  
 (d) 1.

112. Possível resposta:

Primeiro, escrevi o produto dos fatores primos comuns aos dois números. Depois, escrevi, como expoente de cada um desses fatores, o menor de seus expoentes visto em suas fatorações completas. Finalmente, calculei os produtos correspondentes.

Recorde como obter frações equivalentes dividindo os dois termos por um mesmo número. Exemplifique:  $36/84 = 18/42 = 9/21 = 3/7$ .

Destaque uma das aplicações do m.d.c.: a simplificação de frações. Exemplifique: dada a fração  $36/84$ , é possível obter a fração equivalente  $3/7$ , calculando o m.d.c. de 36 e 84 (que é 12) e dividindo ambos pelo m.d.c. A simplificação de frações dividindo os termos pelo m.d.c. deles permite cálculos com números bem menores que os das frações que foram simplificadas.

113.

	12	18	20	24
36	12	18	4	12
40	4	2	20	8
120	12	6	20	24

114.

	12	18	20	24
36	36	36	180	72
40	120	360	40	120
120	120	360	120	120

Explore o exercício a seguir, para que os alunos observem a necessidade do cálculo do mínimo múltiplo comum de mais de dois números:

Uma árvore de Natal tem lâmpadas verdes, vermelhas e azuis. As verdes se acendem de 3 em 3 segundos, as vermelhas, de 4 em 4 segundos e as azuis, de 9 em 9 segundos. Ao ligá-las, todas se acenderam. Depois de quantos segundos se acenderão juntas novamente pela primeira vez? E pela segunda vez? R) 36 segundos. 72 segundos.

Explore as fatorações completas nos quadros do alto da página para calcular m.m.c. e m.d.c. de mais de dois números. Exemplificando: m.m.c. de 12, 18 e 20. Primeiro, de 12 e 18:  $2^2 \times 3^2 = 36$ . Depois, de 36 e 20:  $2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$ . De modo análogo, calcule o m.d.c. de 3 números obtendo o m.d.c. de dois quaisquer deles e depois o m.d.c. entre este valor encontrado e o terceiro número.

Explore a leitura do texto:

M.d.c. e m.m.c.

Revista do Professor de Matemática – N° 13 (p. 34).

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

m.d.c.	60	140	360
144	12	4	$2^3 \times 3^2 = 72$
280	20	140	40
600	60	20	120

Use as fatorações completas a seguir para resolver os exercícios de m.d.c. e m.m.c.:

$$12 = 2^2 \times 3$$

$$24 = 2^3 \times 3$$

$$18 = 2 \times 3^2$$

$$36 = 2^2 \times 3^2$$

$$20 = 2^2 \times 5$$

$$40 = 2^3 \times 5$$

$$120 = 2^3 \times 3 \times 5$$

113. Na tabela a seguir, você vê o m.d.c. de alguns números. Por exemplo, o m.d.c. de 20 e 36, que é 4. Use as fatorações anteriores e escreva, em seu caderno, no lugar de cada letra, o m.d.c. correspondente aos números da linha e da coluna que se encontram nessas letras:

m.d.c.	12	18	20	24
36	a	b	$2^2 = 4$	d
40	e	f	g	h
120	i	j	k	l

114. Usando as fatorações completas vistas antes do exercício 113, você vê o cálculo do m.m.c. dos números 36 e 20. Escreva, no seu caderno, no lugar de cada letra, o m.m.c. correspondente aos números da linha e da coluna que se encontram nessas letras.

m.m.c.	12	18	20	24
36	a	b	$2^2 \times 3^2 \times 5 = 180$	d
40	e	f	g	h
120	i	j	k	l

## Aprendendo em casa

Use as fatorações a seguir para calcular o m.d.c. e o m.m.c., em cada caso, das tabelas dos exercícios a seguir:

$$60 = 2^2 \times 3 \times 5$$

$$144 = 2^4 \times 3^2$$

$$140 = 2^2 \times 5 \times 7$$

$$280 = 2^3 \times 5 \times 7$$

$$360 = 2^3 \times 3^2 \times 5$$

$$600 = 2^3 \times 3 \times 5^2$$

115. Na tabela a seguir, você vê o m.d.c. de 144 e 360: 72. Use as fatorações anteriores e escreva, em seu caderno, no lugar de cada letra, o m.d.c. correspondente aos números da linha e da coluna que se encontram nessas letras:

m.d.c.	60	140	360
144	a	b	$2^3 \times 3^2 = 72$
280	c	d	e
600	f	g	h

116. Observe a tabela a seguir e proceda de modo análogo ao anterior para calcular o m.m.c. correspondente aos números das linhas e colunas que se encontram nas letras:

m.m.c.	60	140	360
144	<b>a</b>	<b>b</b>	$2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$
280	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>
600	<b>f</b>	<b>g</b>	<b>h</b>

## Explorando o que você aprendeu e aprendendo mais

117. Desenhe, em um quadriculado, um quadrado de 16 pequenos quadrados iguais. Considere o lado de cada um desses pequenos quadrados como unidade de medida. Quantos quadrados de perímetro maior que 8 existem no quadrado desenhado? Quantos retângulos existem de perímetro maior que 12?
118. Uma frase escrita com **ou** é verdadeira desde que uma das suas componentes o seja. Veja dois exemplos de frases verdadeiras e as justificativas:

a frase $2 < 7$ ou $2 = 7$	é verdadeira porque $2 < 7$ ;
a frase $3 < 3$ ou $3 = 3$	é verdadeira porque $3 = 3$ .

Diga por que as frases a seguir são verdadeiras:

- a)  $7 > 7$  ou  $7 = 7$ .      b)  $9 > 5$  ou  $9 = 5$ .

119. Veja, na tabela a seguir, dois símbolos e seus significados:

Símbolos	Significados
$\leq$	“menor que ou igual a...”
$\geq$	“maior que ou igual a...”

Agora, decida se cada frase a seguir é verdadeira ou falsa:

- a)  $7 \leq 7$     b)  $9 \geq 5$     c)  $13 \leq 19$     d)  $4 \geq 8$     e)  $12 \geq 12$

120. Em cada item a seguir, a letra representa números naturais que satisfaçam a propriedade dada por desigualdades. Escreva, em seu caderno e para cada caso, todos os números naturais representados pela letra correspondente:

- a)  $3 \leq a \leq 10$     b)  $5 \leq b < 12$     c)  $4 < c \leq 13$

116.

m.m.c.	60	140	360
144	720	5040	$2^4 \times 3^2 \times 5 = 720$
280	840	280	2520
600	600	4200	1800

117. Existem 5: 4 quadrados de perímetro 12 mais um quadrado de perímetro 16. Existem 5 retângulos de perímetro maior que 12. (Lembre que um quadrado é um retângulo.)

118. a) É verdadeira porque  $7 = 7$ ;  
b) É verdadeira porque  $9 > 5$ .

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os enunciados e os quadros em destaque dos exercícios 118 e 119.

119. a) Verdadeira;  
b) Verdadeira;  
c) Verdadeira;  
d) Falsa;  
e) Verdadeira.

Peça que os alunos justifiquem cada resposta.

Comente que, de modo diferente do significado do **ou** explorado nos exercícios 118 e 119, para que uma frase escrita com **e** seja verdadeira, é necessário que suas duas componentes sejam verdadeiras. Exemplifique: a) A frase “o quadrado é um retângulo e é também um losango” é verdadeira porque, sendo o quadrado um quadrilátero com os quatro ângulos retos, é um retângulo e, tendo os quatro lados de medidas iguais, é também um losango. b) A frase “a soma de dois números pares é par e se a soma de dois números é par eles são números pares” é falsa porque somente a primeira componente é verdadeira. Um possível contraexemplo da segunda componente é  $18 = 11 + 7$ , isto é, 18 é par e é soma de dois números que não são pares.

120. a) 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10;  
b) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11;  
c) 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13.

Caso julgue pertinente, complete a observação da página anterior sobre o “e” e o “ou”.

Explore com perguntas a situação relacionada com o “conjunto união” a seguir:

Observem os conjuntos U, A e B a seguir:

$$U = \{8; 9; 10; 11; 12; 13\};$$

$$A = \{8; 9; 10; 11\};$$

$$B = \{10; 11; 12; 13\}.$$

Respondam se as frases a seguir são verdadeiras ou falsas:

- Os elementos do conjunto A pertencem ao conjunto U.
- Os elementos do conjunto B pertencem ao conjunto U.
- Podemos dizer que o conjunto U é formado dos elementos que pertencem ao conjunto A ou ao conjunto B.

Comente que a frase (c) é verdadeira porque, tendo ambas componentes verdadeiras, em particular, cada uma delas é verdadeira, e, portanto, a frase (c) satisfaz o que se diz no exercício 118.

Utilize o diagrama da árvore para que os alunos resolvam, no quadro, os exercícios 123 e 124. Convencie abreviaturas para as palavras, sugerindo legendas (palavras x abreviaturas). Opcionalmente, use tabelas como as sugeridas nas margens das páginas 14 e 15.

122. a) 15;  
b) 5;  
c) 9;  
d) 12;  
e) 8.

123. 6.

124.  $3 \times 2$ .

Solicite que os alunos proponham, em casa, exercícios semelhantes aos de número 121 a 124 para posterior apresentação e discussão em sala.

125. a)  $2 \times 2 \times 17$ ;  
b)  $2 \times 3 \times 5 \times 7$ ;  
c)  $3 \times 3 \times 3 \times 3 \times 3$ ;  
d)  $2 \times 2 \times 2 \times 3 \times 13$ ;  
e)  $2 \times 2 \times 3 \times 3 \times 3 \times 5$ ;  
f)  $2 \times 3 \times 5 \times 5 \times 5$ ;  
g)  $7 \times 11 \times 13$ ;  
h)  $11 \times 11 \times 11$ .

121. Em uma papelaria, existem cadernos, para vender, com as seguintes características:

Tamanhos: pequeno, médio e grande.

Cores de capas: vermelho, azul, verde, cinza.

Números de páginas: 100, 150 e 200 páginas.

- Escreva a multiplicação que permite calcular quantos tipos diferentes de caderno existem à venda na papelaria.
- Calcule o total desses tipos.
- Quantos desses tipos têm tamanho pequeno ou médio?
- Quantos desses tipos têm 200 páginas?
- Quantos desses tipos não têm capa cinza?
- Quantos desses tipos têm capa verde?

121. a)  $3 \times 4 \times 3$ ;  
b) 36;  
c) 24;  
d) 12;  
e) 27;  
f) 9.

122. Uma indústria fabrica três tipos de telefone: de mesa, de parede e sem fio. Eles são apresentados nas cores cinza, preto, branco, verde e azul.

- Quantos tipos diferentes de telefones a indústria fabrica?
- Quantos tipos diferentes de telefone de mesa a indústria fabrica?
- Quantos tipos diferentes de telefone cinza, preto ou branco a indústria fabrica?
- Quantos tipos diferentes de telefones que não são azuis a indústria fabrica?
- Quantos tipos diferentes de telefone que não são de mesa nem azuis a indústria fabrica?

123. Uma fábrica de móveis produz mesas para escritórios, de madeira e de ferro. As mesas podem ter duas, três ou quatro gavetas. Um comprador quer fazer a lista de todos os possíveis tipos de mesa que a fábrica produz. Quantos tipos ele obterá ao todo?

124. Certo artigo é vendido em embalagens em uma das cores: amarelo, verde ou azul. As palavras impressas têm as cores em branco ou preto. Calcule, usando uma multiplicação, quantos tipos diferentes de embalagens existem desse artigo.

125. Fatore completamente os números:

- 68
- 210
- 243
- 312
- 540
- 750
- 1 001
- 1 331



Julia Bianchi, 2006



126. Observe cada fatoração obtida no exercício anterior e resolva:

- Escreva o maior número diferente de 68 e que seja divisor de 68.
- Escreva o menor número diferente de 68 e que seja múltiplo de 68.
- Escreva o menor divisor de 210 e que seja maior que 100.
- Escreva dois múltiplos de 210 e que sejam menores que 650.
- Escreva dois números que sejam múltiplos de 27 e divisores de 243.
- Escreva o maior fator primo de 312.
- Escreva todos os divisores de 540 menores que 13.
- Escreva os divisores de 750 menores que 60.
- Escreva o menor fator primo de 1 001.
- Escreva o único fator primo de 1 331.

Você já sabe o que são números primos. Mas você sabe que existem números que são chamados “**primos entre si**”? Vou dar alguns exemplos para ver se você descobre como explicar o que são esses números.



Son Salvador

Estes números são primos entre si	
8 e 9	10 e 21
4 e 27	8 e 25
Estes números não são primos entre si	
8 e 10	14 e 21
6 e 20	6 e 18

127. Fatore os pares de números primos entre si dados como exemplos pela professora. Agora, responda:

- 8 e 9 têm algum fator primo em comum?
- Algum dos outros pares de primos entre si têm fatores primos em comum?
- 8 e 10 têm fator primo em comum. Qual?
- Os outros pares de números: 14 e 21, 6 e 20, 6 e 18 têm fatores primos em comum?
- Se dois números têm um fator primo em comum, você diria que são números primos entre si?
- O m.d.c. de 8 e 9 é 1. Calcule: m.d.c. (10, 21), m.d.c. (4, 27) e m.d.c. (8, 25).
- Qual é o valor do máximo divisor comum dos quatro pares de números primos entre si, dos exemplos da professora?
- Verifique se algum dos pares de números a seguir tem m.d.c. igual a 1: (8, 10), (14, 21), (6, 20), (6, 18).

**Professor(a):** Novamente lembramos que o capítulo é sobre números naturais (logo, “fatores” significa “fatores naturais”, “números” significa “números naturais” etc.)

126. a) 34;  
b) 136;  
c) 105;  
d) 420 e 630;  
e) 81 e 243; ou 27 e 81; ou 27 e 243;  
f) 13;  
g) 1, 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10, 12;  
h) 1, 2, 3, 5, 6, 10, 15, 25, 30, 50;  
i) 7;  
j) 11.

#### ATIVIDADE EXTRA

As medidas de um retângulo, em centímetros, são expressas por números naturais. Calcule essas medidas, sabendo que a área mede  $36 \text{ cm}^2$  e o perímetro mede 26 cm.

**Solução:** devemos encontrar dois números cujo produto é 36 e cuja soma é 13 (metade do perímetro). Como os divisores de 36 são 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36, basta observar que, dentre eles, o par de divisores cuja soma é 13 e o produto é 36 é dado pelos números 4 e 9.

Resposta: 4 cm e 9 cm.

127. a) Não;  
b) Não;  
c) 2;  
d) Sim:  $14 \times 21 \rightarrow 7$ ;  $6 \times 20 \rightarrow 2$ ;  $6 \times 18 \rightarrow 2$  e 3;  
e) Não;  
f) O m.d.c. de todos eles é 1;  
g) 1;  
h) Não.

128. a) Primos entre si;  
b) 1.

Mais uma vez, atividade que reforça o fato de que definições são equivalências, ou seja, valem o direto e o recíproco da propriedade que caracteriza o ente ou o conceito definido.

Comente que as duas frases dos itens (a) e (b) do exercício 128 podem ser resumidas em uma única (e a escreva no quadro para que copie): Dois números são primos entre si, se e somente se o seu m.d.c. for 1.

Do mesmo modo, outra forma de caracterizar números primos entre si é (escreva no quadro para que copie): Dois números são primos entre si, se e somente se não têm fatores primos em comum.

Observação: em anos posteriores, exploramos o estudo de proposições, suas recíprocas, contrárias e contrarrecíprocas, bem como a existência de equivalências ou não entre essas formas. Em particular, a característica das definições em Matemática, envolvendo diretas e recíprocas assumidas como verdadeiras, como se disse para a definição de números primos na frase inicial deste comentário.

Recorde que as notações a seguir representam produtos:  $a \times b$ ,  $ab$  (produto de  $a$  por  $b$ ),  $7n$  (produto de 7 por  $n$ ),  $8 \times (4 + 3)$ ,  $8(4 + 3)$  (produto de 8 pela soma  $4 + 3$ ).

Comente que, nos produtos  $a \times b$ ,  $ab$  e  $7n$ , as letras  $a$ ,  $b$ ,  $n$  representam números.

**Professor(a):** Os exercícios 131, 133 e 134 relacionam dois blocos de conteúdo: números e álgebra. Sempre que possível, proponha atividades que explorem outros blocos de conteúdo.

131. a)  $5 \times 6 + 5p$ ;  
b)  $7k + 7 \times 8$ ;  
c)  $9n + 9m$ ;  
d)  $hx + hy$ .

128. Com base nas respostas dos exercícios anteriores, copie as frases a seguir em seu caderno, discuta com seus colegas e complete-as de maneira que fiquem corretas, segundo suas interpretações.

- a) Se o m.d.c. de dois números é 1, eles se chamam...  
b) Se dois números são primos entre si, então o m.d.c. deles é...

129. V ou F:

- a) Se dois números não têm fatores primos em comum, eles são primos entre si.  
b) Se dois números têm um fator primo em comum, eles não são primos entre si.

129. a) V; b) V.

130. Você calculou o m.d.c. de 6 e 18 e encontrou 6. Escreva, sem calcular, o m.d.c. dos pares de números:

- a) 5 e 10      b) 8 e 16      c) 4 e 40      d) 7 e 35

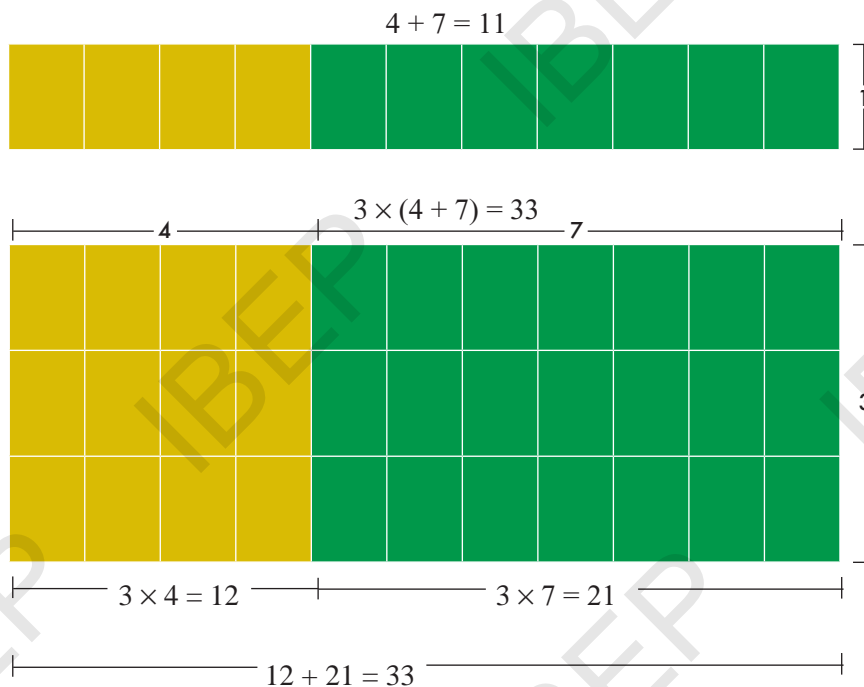
130. a) 5;  
b) 8;  
c) 4;  
d) 7.

131. Observe como calcular, de duas maneiras diferentes,  $3 \times (4 + 7)$ :

$$\text{Primeira: } 3 \times (4 + 7) = 3 \times 11 = 33.$$

$$\text{Segunda: } 3 \times (4 + 7) = 3 \times 4 + 3 \times 7 = 12 + 21 = 33.$$

A figura a seguir confirma graficamente esses resultados:



Observe que, se tivermos que desenvolver o produto  $7 \times (4 + n)$ , só podemos fazer assim:  $7 \times 4 + 7n$ , porque não sabemos como somar 4 com  $n$ .

Desenvolva os produtos a seguir:

- a)  $5(6 + p)$       b)  $7(k + 8)$       c)  $9(n + m)$       d)  $h(x + y)$

132. A propriedade que você acabou de usar é muito útil no cálculo mental. Por exemplo, para multiplicar mentalmente  $15 \times 12$ , podemos pensar assim:

Como  $12 = 10 + 2$ ,

então  $15 \times 12 = 15 \times (10 + 2) = 15 \times 10 + 15 \times 2 = 150 + 30 = 180$ .

Agora, é com você. Nas expressões abaixo, decomponha cada segundo fator em uma soma conveniente e desenvolva como você calcularia mentalmente:

a)  $17 \times 13$

b)  $25 \times 12$

c)  $33 \times 11$

d)  $16 \times 25$

133. A propriedade que você usou também vale quando trocamos a ordem dos fatores ou a operação é a subtração. Veja os exemplos e resolva os exercícios seguintes:

Exemplos:  $(7 + p) \times 4 = 7 \times 4 + p \times 4 = 7 \times 4 + 4p$

$$9(12 - x) = 9 \times 12 - 9x$$

$$(15 - y) \times 5 = 15 \times 5 - 5y$$

Desenvolva:

a)  $(11 + z) \times 6$

b)  $(k - 9) \times 5$

c)  $(a + b) \times c$

134. Algumas vezes, você terá que usar a propriedade que usou no sentido inverso:

Por exemplo:  $4x + 7x = (4 + 7)x = 11x$

$$3y + 4y + 6y = (3 + 4 + 6)y = 13y$$

Escreva como produto:

a)  $7x + 3x$

b)  $8y + 7y$

c)  $3z + 2z + 5z$

Veja, no quadro, um resumo dos resultados anteriores:



- $15 \times 12 = 15 \times (10 + 2) = 15 \times 10 + 15 \times 2$
- $7 \times (p + 4) = 7p + 7 \times 4$
- $9 \times (12 - x) = 9 \times 12 - 9x$
- $(a + b) \times c = ac + bc$
- $4x + 7x = (4 + 7)x = 11x$
- $3y + 4y + 6y = (3 + 4 + 6)y = 13y$

Comente com os alunos que esta propriedade relacionando adição ou subtração e multiplicação explorada nos exercícios de 131 a 134 é chamada distributividade. Faça um diagrama que explique o porquê deste nome, mostrando que, na verdade, estamos “distribuindo” a operação de multiplicação pela soma.

**Professor(a):** Explore a noção de função e da distributividade, propondo aos alunos que calculem os valores de A e B quando se substitui, sucessivamente, n por 3, 5 e 9 nas expressões a seguir, e comparem os valores obtidos para A e B, em cada substituição.  
 $A = 2 \times (5 + n) = 2 \times \dots$   
 $B = 2 \times (5 + n) = 2 \times 5 + 2 \times n = 10 + \dots$

132. a)  $17 \times (10 + 3) =$   
 $17 \times 10 + 17 \times 3 =$   
 $170 + 51 = 221;$   
 b)  $25 \times (10 + 2) =$   
 $25 \times 10 + 25 \times 2 =$   
 $250 + 50 = 300;$   
 c)  $33 \times 11 =$   
 $33 \times (10 + 1) =$   
 $33 \times 10 + 33 \times 1 =$   
 $330 + 33 = 363;$   
 d)  $16 \times 25 =$   
 $16 \times (20 + 5) =$   
 $16 \times 20 + 16 \times 5 =$   
 $320 + 80 = 400.$

133. a)  $(11 + z) \times 6 =$   
 $11 \times 6 + 6z;$   
 b)  $(k - 9) \times 5 =$   
 $5k - 9 \times 5;$   
 c)  $(a + b) \times c = ac + bc.$

134. a)  $7x + 3x =$   
 $(7 + 3)x = 10x;$   
 b)  $8y + 7y =$   
 $(8 + 7)y = 15y;$   
 c)  $3z + 2z + 5z =$   
 $(3 + 2 + 5)z = 10z.$

O abuso de linguagem usado no exercício 134 (“sentido inverso”) sugere, caso julgue conveniente, explorar as propriedades da igualdade: reflexiva, simétrica e transitiva.

Proponha mais atividades como as seguintes:

- a) cálculos de produtos do tipo  $14 \times 17$  (segundo fator maior que o primeiro) para verificar se os alunos usam a comutatividade calculando:  $14 \times 17 = 17 \times 14 = 17(10 + 4) = \dots$   
 b) cálculos de produtos do tipo:  
 $25 \times 9 = 25(10 - 1) =$   
 $250 - 25 = 225$

## Seção olímpica

1. 11 anos.

2. O maior é 31. Sugestão:  
 $(n-1) + n + (n+1) = 90$ ;  
 logo,  $n = 30$  e  $n+1 = 31$ .

3. 1 110 litros. Gastava: 1 780 litros. Passou a gastar: 670 litros. Logo, economizou  $1780 - 670$  litros, ou seja, 1 110 litros por semana.

4.  $5 \times 2^{27}$ . Registrando alguns resultados em uma tabela, evidencia-se a lei de formação da sequência relacionada com os números dos triângulos: no estágio  $2k$ , o valor que aparece é  $5^{k-1}$ . Logo, o número que aparece no  $56^{\circ}$  triângulo é  $5 \times 2^{27}$ .

Estágio	Triângulo	Quadrado
1	3	2
2	5	1
3	$6 = 3 \times 2$	4
4	$10 = 5 \times 2$	2
5	$12 = 3 \times 2^2$	8
6	$20 = 5 \times 2^2$	4
7	$24 = 3 \times 2^3$	16
8	$40 = 5 \times 2^3$	8

5. **Professor(a):** nesta questão parece, a princípio, que faltam dados. Observe, no entanto, que será preciso usar a hipótese de que uma certa quantidade – no caso o número de alunos – é um número INTEIRO. Seja  $x$  o número de bombons que cada aluno da  $6^{\text{a}}$  série recebeu. Então cada aluno da  $7^{\text{a}}$  série recebeu  $x - 2$  bombons, de onde número de alunos da  $6^{\text{a}}$  série  $= 286/x$  e número de alunos da  $7^{\text{a}}$  série  $= 286/(x - 2)$ . Como número de alunos é um número inteiro, segue que  $x$  e  $x - 2$  são divisores de 286. Os divisores de 286 são 1, 2, 11, 13, 22, 26, 143 e 286. Como os únicos divisores de 286 que diferem de 2 são 11 e 13, segue que  $x = 13$ . Portanto, o número de alunos da turma da  $7^{\text{a}}$  série é  $286/11 = 26$ .

1. (OBEMP 2005) O aniversário de Carlinhos é no dia 20 de julho. Em agosto de 2005, ao preencher uma ficha em sua escola, Carlinhos inverteu a posição dos dois últimos algarismos do ano em que nasceu. A professora que recebeu a ficha disse: – *Carlinhos, por favor, corrija o ano de seu nascimento, senão as pessoas vão pensar que você tem 56 anos!* Qual é a idade de Carlinhos?

2. (OBMEP 2005) A soma de três números inteiros consecutivos é igual a 90. Qual é o maior destes três números?

3. (OBMEP 2009) Daniela fez uma tabela mostrando a quantidade de água que gastava em algumas de suas atividades domésticas.

Atividade	Consumo	Frequência durante os sete dias da semana
Lavar roupa	150 litros por lavagem	1 vez ao dia
Tomar um banho de 15 minutos	90 litros por banho	1 vez ao dia
Lavar o carro com mangueira	100 litros por lavagem	1 vez na semana

Para economizar água, ela reduziu a lavagem de roupa a 3 vezes por semana, o banho diário a 5 minutos e a lavagem semanal do carro a apenas um balde de 10 litros. Quantos litros de água ela passou a economizar por semana?

4. (OBMEP 2013) No primeiro estágio de um jogo, Pedro escreve o número 3 em um triângulo e o número 2 em um quadrado. Em cada estágio seguinte, Pedro escreve no triângulo a soma dos números do estágio anterior e, no quadrado, a diferença entre o maior e o menor desses números. Qual é o número escrito no triângulo do  $56^{\circ}$  estágio?

5. (OBMEP 2006) Uma professora distribuiu 286 bombons igualmente entre seus alunos da  $6^{\text{a}}$  série. No dia seguinte, ela distribuiu outros 286 bombons, também igualmente, entre seus alunos da  $7^{\text{a}}$  série. Os alunos da  $7^{\text{a}}$  série reclamaram que cada um deles recebeu 2 bombons a menos que os alunos da  $6^{\text{a}}$  série. Quantos alunos a professora tem na  $7^{\text{a}}$  série?



6. (OBMEP 2008) Pedro Américo e Cândido Portinari foram grandes pintores brasileiros e Leonardo da Vinci foi um notável artista italiano. Pedro Américo nasceu em 1843. Já Leonardo nasceu 391 anos antes de Pedro Américo e 451 anos antes de Portinari. Em que ano Portinari nasceu?

7. (OBMEP 2008) Pedrinho preencheu a tabela com números inteiros de forma que em cada linha, coluna ou diagonal o número do meio é a média aritmética dos outros dois. Qual é a soma dos números que apareceram nas casas em cinza?

	7	
9		
		20

6. 1903

7. A tabela final é:

4	7	10
9	12	15
14	17	20

Portanto, o valor procurado é  $4 + 15 = 19$ .

8. São 75 balas, portanto cada criança recebeu 25 balas. Fazendo as combinações possíveis, chega-se à conclusão de que a criança que recebeu o saquinho de 4 balas ficou com o saquinho de 11 balas também.

9.  $37$ ; m.d.c.  $(240, 180, 320) = 20$ ;  
número de CDs =  $(240 + 180 + 320) : 20 = 37$

8. (OBMEP 2014) Isabel tem oito saquinhos com 3, 4, 7, 9, 11, 12, 13 e 16 balas, respectivamente. Ela distribuiu os saquinhos para três crianças, de tal modo que cada uma delas recebeu a mesma quantidade de balas. Uma das crianças recebeu o saquinho com 4 balas. Dentre os saquinhos que essa criança recebeu, qual continha mais balas?

9. (OBM) Letícia vendeu todos seus CDs de videogames para três amigos, que lhe pagaram, respectivamente, R\$ 240,00, R\$ 180,00 e R\$ 320,00. Todos os CDs tinham o mesmo preço. Quantos CDs tinha Letícia no mínimo?



## REVISÃO

A seu critério, utilize, dentre as sugestões a seguir, a atividade que julgar necessária visando verificar:

O uso, com compreensão, das diversas propriedades das operações e técnicas de cálculo com números naturais na resolução de situações-problema contextualizadas, dos diversos sinais de associação no cálculo de expressões, de letras ou símbolos diversos representando números no equacionamento de situações-problema, de códigos, do registro de quantidades usando vários sistemas de numeração, dos conceitos de potências, quadrado e cubo de números naturais, múltiplos, divisores, números primos, números compostos, fatorações, múltiplos, divisores, máximo divisor comum, mínimo múltiplo comum.

Como os alunos trabalham coletivamente, diante de situações-problema contextualizadas, relacionadas com os diversos temas estudados no capítulo.

Exemplificando:

1. Problemas usando medidas de tempo em horas e remuneração por hora.

2. Problemas envolvendo compra de materiais, conhecidos os preços por metros.

3. Registro de estoques de materiais utilizando gráficos.

4. Problemas de aquisição de artigos de lojas ou supermercados com valores dados em tabelas.

5. Problemas relacionados com as seguintes atividades:

Cálculos envolvendo potências de expoentes naturais de números naturais.

Identificar, dentre números dados, os que são “quadrados perfeitos”.

Relacionar quadrado e o cubo de um número com área de quadrado ou com o volume de um cubo, respectivamente.

Identificar as raízes quadradas e as raízes cúbicas de quadrados e cubos de números naturais.

Descobrir, através de regularidades, propriedades particulares de potências como: potências de dez, potências de expoente um, potências de expoente zero, e utilizá-las em cálculos de expressões numéricas.

Descobrir propriedades das potências de mesma base através do uso da definição de potência e utilizar essas propriedades em cálculos.

Identificar números primos, números compostos dentre números de um conjunto de números naturais dados.



## Verifique se você aprendeu

Se ainda tem dúvidas sobre	Reveja os exercícios
Numeração.	1 a 4.
Contagem ou cálculo de possibilidades.	5 e 6, 11, 12, 16, 17, 29, 39, 117, 121 a 124.
Como resolver problemas que têm letras representando números.	7 a 10, 33, 38, 131, 133, 134.
Como resolver problemas com números naturais.	19 a 24, 32, 34 a 37.
Sequências de números.	13.
Códigos usando letras e números.	14.
Como interpretar informações que contêm números.	15, 18.
Como resolver problemas com mais de uma solução.	21, 22.
Propriedades de números pares e de números ímpares.	25, 26.
Cálculo mental.	27, 132.
Cálculo de expressões.	30, 31, 132 a 134.
Como calcular, usando a calculadora.	31, 67.
Potências, quadrado e cubo de números naturais.	40 a 43, 47, 49.
Raiz quadrada ou raiz cúbica.	44 a 46, 48, 50.
Cálculos de potências, usando propriedades.	51 a 66, 68 a 71.
Cálculos de potências, usando a calculadora.	67.
Múltiplos e divisores. Números primos entre si.	72 a 82, 126, 127.
Números primos e números compostos.	83 a 90, 93, 126, 127, 128, 129.
Fatorações, múltiplos e divisores. Fatoração e fatoração completa.	91 a 109, 125.
Múltiplos comuns ou divisores comuns. Máximo divisor comum e mínimo múltiplo comum.	110 a 116, 128 a 130.
Sinais de desigualdades $\leq$ e $\geq$ .	118, 119, 120.

Usar a fatoração em diversas situações-problema, como no reconhecimento de divisores ou múltiplos de um número dado, para criar múltiplos ou divisores de números dados.

Enumerar múltiplos comuns ou divisores comuns de números dados.

Calcular o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de números dados usando a fatoração.

Interpretar o significado de frases que contêm os símbolos  $\leq$  ou  $\geq$ .

Identificar se pares de números dados são ou não “números primos entre si”.

Calcular mentalmente o máximo divisor comum e o mínimo múltiplo comum de números primos entre si ou números múltiplos entre si.

**Professor(a):** Leia a observação da página 22 (Sugestão sobre verificação da aprendizagem).



# CAPÍTULO 2

## As figuras geométricas e o dia a dia



Yury Chaban | Dreamstime.com

Ao lado, explicitamos os objetivos gerais do capítulo. Sugerimos um breve comentário sobre os mesmos, utilizando as ilustrações da página.

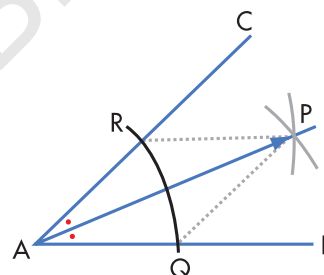
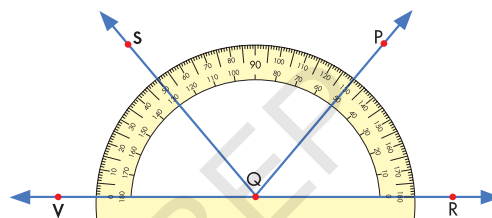
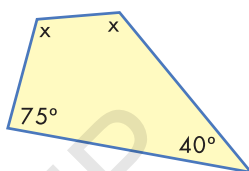
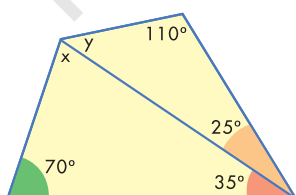
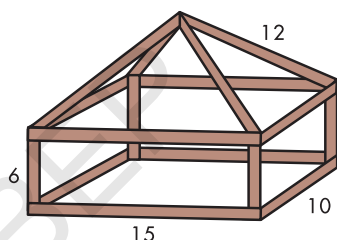
**Professor(a):** Neste e em outros capítulos, são exploradas diversas situações para que os alunos “descubram”, a partir de casos particulares, propriedades de números, de figuras, regras de cálculos etc. É extremamente importante que, após estas “descobertas”, sejam feitas observações afirmando que tais conclusões são verdadeiras (e, eventualmente, provar estes fatos) para que não fique a falsa ideia de que, a partir de poucos casos particulares, é possível generalizar. Sempre que possível, use expressões algébricas para expressar tais generalizações, bem como de algumas regularidades relacionadas com sequências numéricas.

## Você já conhece diversas figuras espaciais e planas e algumas de suas propriedades.

### Neste capítulo, você vai aprender como:

- Interpretar perspectivas, fachadas e plantas baixas de casas ou edifícios.
- Observando figuras, identificar ângulos, bem como segmentos horizontais e segmentos verticais.
- Observando figuras, identificar suas partes como figuras espaciais conhecidas.
- Associar as formas de objetos do dia a dia com as formas das figuras geométricas usuais.
- Identificar, dentre figuras planas dadas, as que podem ser planificações de figuras espaciais.
- Medir ou desenhar ângulos, usando o transferidor.
- Identificar ângulos adjacentes, opostos pelo vértice, e resolver problemas relacionados com eles.
- Resolver problemas relacionados com medidas de ângulos internos ou ângulos externos de diversos polígonos.
- Resolver problemas relacionados com ângulos de lados paralelos ou ângulos de lados perpendiculares entre si.
- Resolver problemas que envolvam medidas representadas por letras.
- Descobrir propriedades de lados e ângulos de paralelogramos usando propriedades dos triângulos, das paralelas, das perpendiculares ou usando dobraduras e simetrias.
- Resolver problemas relacionados com arcos, cordas, ângulos centrais e com polígonos inscritos.
- Desenhar segmentos de medidas iguais, ângulos de medidas iguais, bissetrizes de ângulos.

Os conceitos e proposições da Geometria usados nesta coleção são coerentes com a axiomática de A. V. Pogorélov (livro “Geometria Elemental”. Moscou: Editorial Mir, 1974).

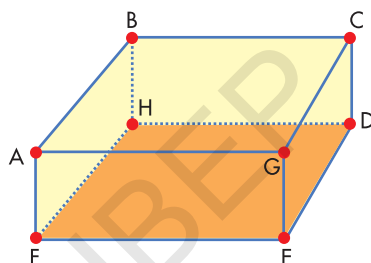




# Identificando e interpretando figuras

## Explorando o que você já sabe

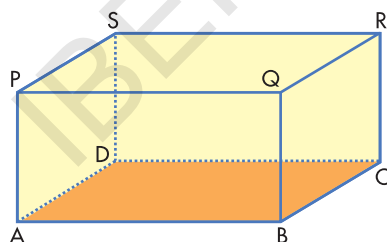
Observe o **paralelepípedo retângulo** abaixo e responda às questões que se seguem:



- **B** é um dos **vértices** da **aresta BH**. Diga o nome de duas outras arestas que têm **B** como um dos vértices.
- A **aresta AB** está contida na **face superior**. Diga o nome da outra face que contém a **aresta AB**.
- Dê o nome de duas arestas contidas na face da direita.
- A **aresta AB** é paralela à **aresta FH**. Diga o nome de mais duas arestas paralelas à **aresta AB**.
- A **face AGEF** é paralela à **face BCDH**. Diga os nomes de mais dois pares de faces paralelas.
- As arestas **AB, AG, EF e FH** são perpendiculares à **aresta AF**. Diga os nomes de quatro arestas perpendiculares à **aresta CD**.
- A **face ABHF** é perpendicular às faces **AGEF e BCDH**. Diga os nomes de quatro faces perpendiculares à face **CDEG**.
- Diga o nome de duas **figuras espaciais** que possuem **superfícies curvas**.

## Aprendendo em sala de aula

- Observe o **paralelepípedo retângulo** da figura:



Escreva os nomes de:

- Dois pares de **faces paralelas**;
- Uma face e duas outras perpendiculares a ela;
- Dois pares de **arestas paralelas**;
- Uma aresta e quatro outras perpendiculares a ela.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

Ao início de cada seção, esclareça as principais razões de se estudarem os respectivos temas. Em particular, comente: nesta seção, vocês vão aprender a identificar formas geométricas espaciais e formas geométricas planas, suas partes, associá-las com formas de objetos vistos no dia a dia, bem como associar formas espaciais com formas planas correspondentes, denominadas planificações.

Diversas vezes, em um abuso de linguagem, usaremos expressões como “observe a pirâmide” no sentido de “observe a figura da pirâmide”.

Anteceda as atividades com modelos concretos, explorando a identificação, a caracterização e a classificação das diversas formas geométricas abordadas a seguir. Use as paredes, teto e piso da sala, bem como as linhas de encontro das paredes, tetos e piso, para dar exemplos de planos paralelos, planos perpendiculares, retas paralelas, retas perpendiculares, retas reversas (não contidas em um mesmo plano), retas contidas em planos etc.

### ATIVIDADES ORAIS

- BA, BC.
- A face esquerda.
- CD e GE (ou outras).
- GC e ED.
- ABHF e GCDE, ABCG e FHDE.
- BC, HD, GC, ED.
- BCDH, AGEF, ABCG, FHDE.
- Cilindro, cone.

Diga para os alunos que, a partir da próxima aula, eles devem trazer régua graduada, compassos, transferidores, jogo de esquadros, lápis e borracha.

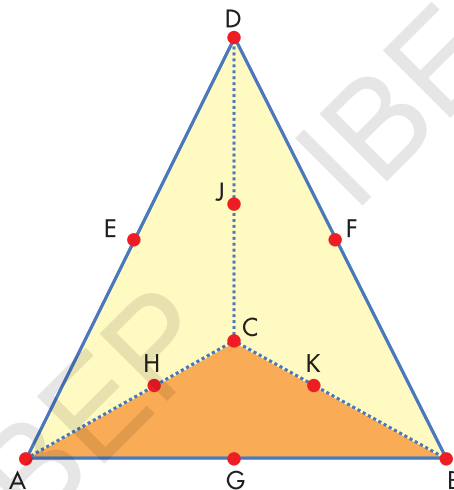
- ABCD e PQRS, ADSP e BCRQ (ou outros);
  - BCRQ – perpendiculares: ABQP e ABCD (ou outros);
  - QR e PS – QR e BC; (ou outros);
  - AB – perpendiculares: BC, AD, BQ, AP (ou outros).

É recomendável fazer um modelo de pirâmide em cartolina e explorar os conceitos de base, vértice, arestas, faces e pontos médios das arestas.

Por questão de economia de espaço, muitas das respostas inseridas nas margens são breves. Entretanto, é necessário criar nos alunos o hábito de enunciar as respostas coerentes com as perguntas o mais completas possível. Exemplo: Quanto Jorge pagou pela bola? Resposta: Jorge pagou R\$.... pela bola (e não, simplesmente, R\$....)

Em alguns itens, escrevemos uma ou algumas das possíveis respostas. É conveniente explorar todas as possíveis respostas.

## 2. Observe a pirâmide da figura:



Resolva:

2. a) Triângulo;

b) 4. Forma: triângulo;

c) G, H e K;

d) D, E, F e J;

e) C, K, B ou A, G, B;

f) E, J e F.

Sugira ao professor de artes ou desenho que faça uma abordagem sobre cores (ou proponha aos alunos que façam uma pesquisa sobre cores).

3. a) Triângulo;

b) Trapézio;

c) Retângulo.

Sugira ao professor de Geografia que explore as localizações, nos mapas, dos diversos países cujas bandeiras são exploradas neste capítulo e algumas características como: língua falada, forma de governo, extensão territorial, população, se importam ou exportam produtos para o Brasil, mencionando, se possível, quais são esses produtos.

Explore plantas arquitetônicas de diversas casas (por exemplo, dos próprios alunos ou retiradas de anúncios de jornais).

a) Qual é o nome do **polígono da base** da pirâmide?

b) Quantas faces tem a pirâmide e qual é a forma dessas faces?

c) Os pontos **A, B e C** pertencem ao plano da base. Escreva os nomes de outros três pontos que pertencem a esse plano.

d) Escreva os nomes de 4 pontos que não pertencem ao plano da base.

e) Os pontos **A, H e C** pertencem à aresta AC. Escreva os nomes de três pontos que pertencem a outra aresta do plano da base da pirâmide.

f) Escreva o nome de três pontos que não pertencem ao plano da base nem a uma mesma aresta.

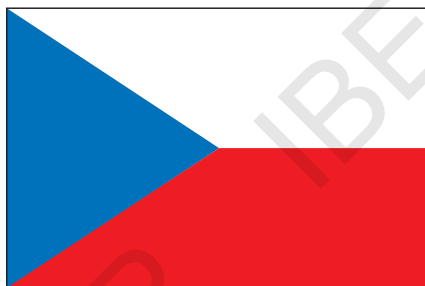
## 3. A bandeira que você vê na figura é da República Tcheca. Ela tem a forma de um retângulo com três partes em cores diferentes.

Escreva os nomes da figura que forma:

a) a parte de cor azul.

b) as partes vermelha ou branca.

c) toda a bandeira.



Nas figuras a seguir, você vê a **fachada** e a **planta baixa** de uma mesma casa.

4. Observe a **fachada** e responda:



- O que representa a fachada dessa casa: uma **vista** da frente ou de uma das **faces** laterais?
- Na fachada da figura, quantas janelas são vistas? E quantas portas?
- A parte que se vê do telhado é caída para frente ou para um dos lados?
- De que lado da casa são vistas duas pequenas árvores: do **direito** ou do **esquerdo**?

5. Observe a **planta baixa** e responda:



- A janela que se vê à esquerda, na parte da frente, pertence ao quarto ou à sala?
- Pelo número das camas que se veem na planta baixa, quantas pessoas você diria que podem morar nessa casa?
- Quantas portas tem essa casa? Quantas janelas?

Comente os significados de fachada e planta baixa:

Fachada: Cada uma das faces de qualquer construção.

Planta Baixa é o nome que se dá ao desenho de uma construção feito, em geral, a partir do corte horizontal à altura de 1,5 m a partir da base. Nela, devem estar detalhadas em escala as medidas das paredes (comprimento e espessura), portas, janelas, e o nome de cada ambiente.

- Uma vista da frente;
- Duas janelas e uma porta;
- Para frente;
- Do lado direito.

Proponha atividades como:

Pesquisa, em jornais, de preços de diversos materiais utilizados em construções para utilizar na elaboração de situações-problema relacionadas com a aquisição, comparação de preços entre 2 ou mais estabelecimentos, elaboração de listas de materiais que são comprados a metros quadrados, a metros cúbicos, em unidades de medidas de capacidade, em "milheiros" etc.

Explorar cálculos de áreas de diversos cômodos de uma residência.

Gastos com materiais para pisos ou revestimento de paredes, conhecidas as dimensões das peças, dos cômodos nos quais vão ser colocados, e preço dos materiais em embalagens contendo quantidades inteiras de metros quadrados de peças.

Orçamentos de serviços de bombeiros, eletricitas, carpinteiros etc., relacionados com serviços a serem executados em pequenas reformas.

- Pertence ao quarto;
- 4;
- 6 portas e 6 janelas.

Comente o significado de perspectiva:

Representação gráfica de objetos sobre uma superfície, geralmente plana, de forma a obter deles uma visão global o mais próximo possível da visão tridimensional real.

6. a) 8;  
b) 9;  
c) É localizado em uma esquina.

Explique aos alunos que o tangram é um jogo criado pelos chineses e consiste em formar diversas figuras usando peças que podem ser obtidas cortando um quadrado, como o que se vê na figura do exercício 7.

Relembre aos alunos como se faz para verificar se dois segmentos têm medidas iguais, usando o compasso. Relembre, também, a classificação dos triângulos e dos diversos quadriláteros (ver capítulo 2 do sexto ano). Reveja, ainda, o conceito de ponto médio de um segmento.

7. c) Sete;  
d) GHI, EDJ, DIC, BIC.

Peça o nome das figuras representadas pelas duas peças restantes.

Lembre aos alunos que figuras que têm áreas iguais chamam-se figuras equivalentes. Proponha que formem, usando todas as peças do tangram, um retângulo equivalente ao quadrado recortado.

Visite ou recomende os sites:

<http://rachacuca.com.br/tangram/> (contém 72 figuras para serem formadas com todas as peças do tangram).

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Tangram>

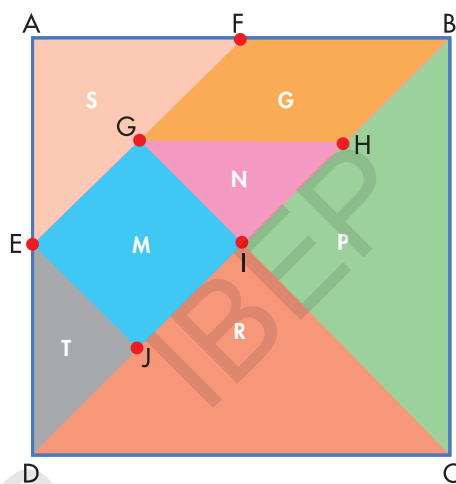
8. 2 peças: P e R.  
3 peças: N, M e T.  
4 peças: M, N, R, T.  
5 peças: G, T, M, N e S.

6. Na figura a seguir, você vê a perspectiva de um prédio:



- a) Quantas janelas você vê na fachada principal?  
b) Quantas janelas você vê na fachada lateral?  
c) O prédio é localizado em uma esquina ou não?

7. Você vai usar peças do Tangram em alguns exercícios. Responda ou faça o que se pede:



- a) Use uma régua ou o compasso para comprovar que as medidas AF e FB são iguais.  
b) Proceda do mesmo modo para comprovar que o ponto E é ponto-médio do lado AD.  
c) De quantas peças se compõe a figura?  
d) Existem 5 peças em forma de triângulo retângulo isósceles. AEF é uma delas. Identifique, pelos nomes, as outras quatro peças.

8. Copie o Tangram da figura e recorte suas sete peças. Agora, juntamente com seus colegas de grupo, você vai usar, de cada vez, um número de peças diferentes para formar triângulos retângulos isósceles. Siga as orientações da tabela:

Quantidade de peças usadas	2 peças	3 peças	4 peças	5 peças
Letras das peças usadas				

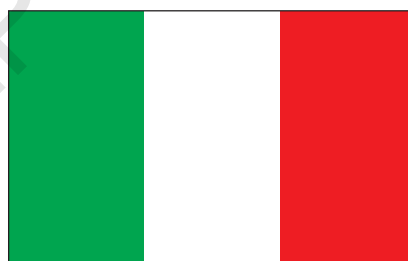


9. Observe novamente o Tangram e identifique pelas letras dos vértices:

- a) Um trapézio retângulo.
- b) Um trapézio isósceles.
- c) Três triângulos equivalentes ao triângulo ABD.
- d) Um quadrado.
- e) Um paralelogramo.

- 9. a) GFBI;
- b) EFBD;
- c) BCD, ADC, ABC;
- d) EGIJ;
- e) FBHG.

10. Observe as duas bandeiras a seguir:



- 10. Verticais: Itália.
- Horizontais: Alemanha.

A primeira delas é da Alemanha, e a segunda, da Itália. Identifique a que é formada por **faixas verticais** e a que é formada por **faixas horizontais**.

11. Para fabricar bandeiras da Alemanha e da Itália, uma indústria tem, em cada bandeira, gasto de R\$ 2,00 por faixa de tecido colorido, R\$ 1,50 pela parte de tecido branco, R\$ 0,30 com costureiras e R\$ 1,20 com outras despesas.

Calcule os **lucros** que essa indústria terá se:

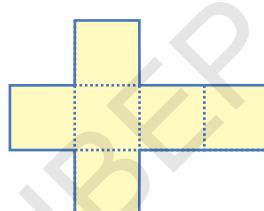
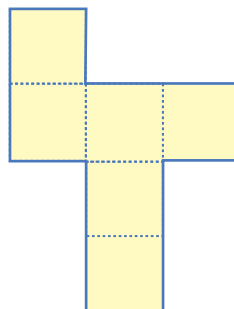
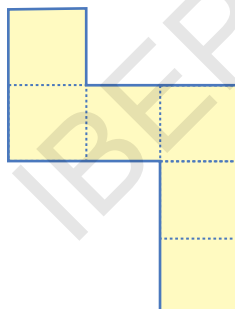
- a) Vender 4 000 bandeiras da Alemanha ao preço de R\$ 12,00 por bandeira.
- b) Vender 6 000 bandeiras da Itália ao preço de R\$ 11,50 por bandeira.

- 11. a) R\$ 18 000,00;
- b) R\$ 27 000,00.

Trabalhe ou sugira aos alunos que trabalhem com **modelos concretos** (por exemplo, “desmanchando” embalagens cúbicas ou em forma de paralelepípedos). Objetivo: auxiliar a compreensão da identificação da planificação do sólido correspondente.

Utilize material concreto ao resolver o exercício 12.

12. Discuta com seus colegas e decida, dentre as **planificações** a seguir, quais são as que permitem “montar” um **cubo**:



**Professor(a):** explore a atividade 12, propondo aos alunos que criem novas planificações contendo seis quadrados, decidindo quais permitem e quais não permitem montar um cubo.

12. A 2ª e a 3ª.

Explore situações nas quais os alunos façam avaliações das medidas, em centímetros, de alguns objetos da própria sala de aula. Explore, também, situações de medidas de objetos com régua. (Sugestão: capítulos 2, 4 e 6 do sexto ano.)

Comente que, para os cálculos do exercício 13, os alunos devem considerar a primeira estrutura correspondente a uma caixa em forma de paralelepípedo retangular, e a segunda, correspondendo a uma pirâmide reta de base retangular (logo, as peças inclinadas têm todas as mesmas medidas).

13. a) 96 cm;  
b) 98 cm.

Destaque para os alunos que, na prática, existem perdas.

Explore mais a fabricação da caixa da primeira estrutura, propondo:

Para fazer as estruturas das caixas, Pedro dispunha de peças de madeira de 15 cm. Discuta com seu colega e calcule quantas delas ele cortou, sabendo que usou a menor quantidade possível para fazer a caixa da primeira figura. Explique como ele cortou e as medidas das pequenas sobras.

Comente que, na prática, o problema nos leva a pensar em duas situações diferentes: na primeira, unicamente no cálculo do comprimento total da estrutura, e, na segunda, quanto efetivamente se gastou de madeira, considerando que pequenos pedaços sobraram, talvez sem utilização.

Explore também custos de fabricação das estruturas e possíveis lucros na venda de determinados números de caixas, dados os preços finais de venda de cada uma, o total vendido e o custo unitário de fabricação.

14. a) Pirâmide de base retangular;  
b) Cone;  
c) Cilindro.

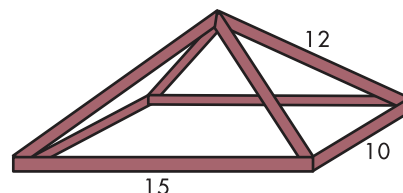
Sugestão: caso necessário, relembre os nomes das principais figuras espaciais (ver cap. 1 do sexto ano).

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

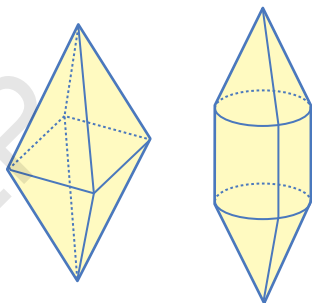
15. (cano, cilindro), (tijolo, paralelepípedo), (globo terrestre, esfera), (bola, esfera), (funil sem bico, cone), (moeda, cilindro), (dado, cubo), (cabeça de parafuso sextavado, prisma hexagonal), (caixa de sapatos, paralelepípedo).

13. Pedro é carpinteiro e fabrica caixas de madeira. Nas figuras a seguir, você vê as estruturas de duas delas com todas as **medidas dadas em centímetros**, onde a primeira é um paralelepípedo, e a segunda é uma pirâmide de base retangular na qual as arestas das faces têm o mesmo comprimento.

Calcule, para cada uma delas, o comprimento total de madeira gasta para fazer a estrutura:



14. Na figura a seguir, você vê duas peças:



- a) Dê o nome da **figura espacial** associada às duas partes da primeira peça.  
b) Dê o nome da figura espacial associada às formas da parte de cima e da parte de baixo da segunda peça.  
c) Dê o nome da figura espacial associada à forma da parte do meio da segunda peça.

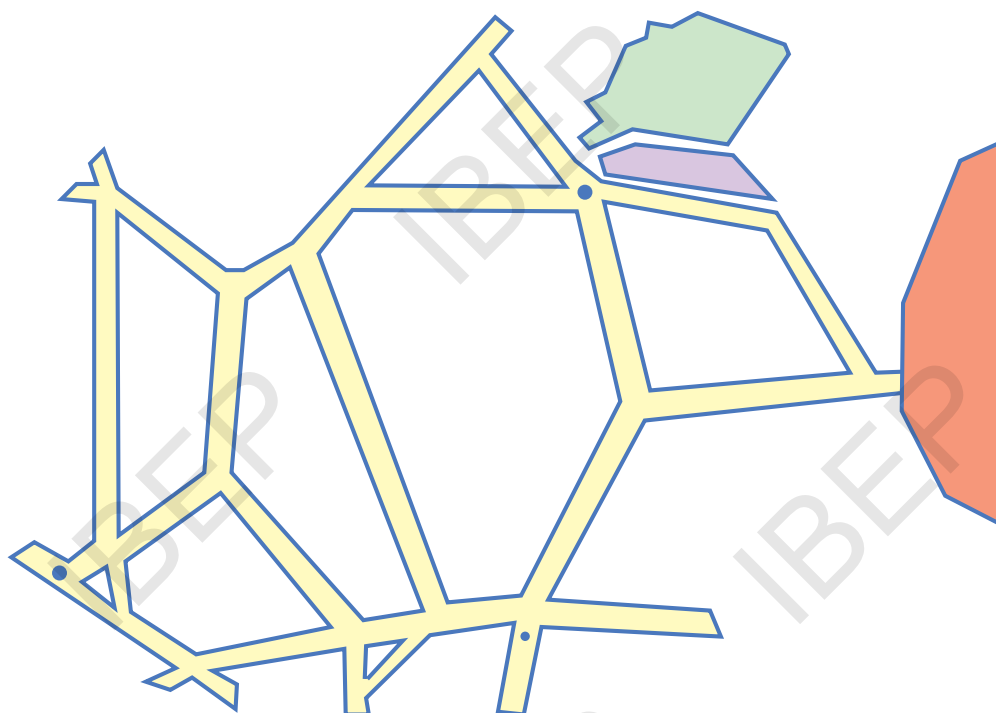
## Aprendendo em casa

15. A seguir, você vê duas listas de nomes: uma de objetos e outra de **figuras geométricas**. Em seu caderno, faça as associações entre os objetos e as figuras correspondentes. Por exemplo, (dado, cubo).

OBJETOS	FIGURAS
Cano	Cubo
Tijolo	Pirâmide triangular
Globo terrestre	Cilindro
Bola	Paralelepípedo
Funil sem bico	Prisma hexagonal
Moeda	Cone
Dado	Esfera
Cabeça de parafuso sextavado	Prisma triangular
Caixa de sapatos	Pirâmide

16. Na figura, você vê a representação de diversas ruas e avenidas de uma cidade. Elas formam o contorno de vários polígonos. Observe-a atentamente e diga:

- Quantos triângulos elas formam?
- Quantos quadriláteros?
- Verifique se elas formam polígonos com maior número de lados e identifique-os pelos nomes.



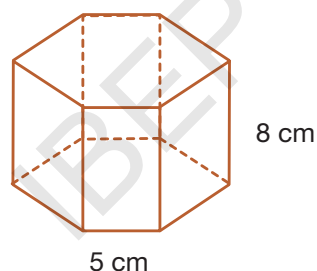
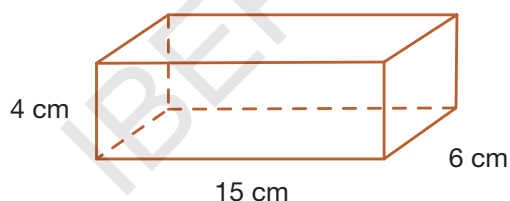
16. a) 3;  
b) 2;  
c) Pentágonos, hexágonos.

Comente que, no exercício 17, não estão sendo consideradas perdas de madeira ao cortar as peças.

Diga que considerem a primeira caixa em forma de paralelepípedo retângulo, e a segunda, em forma de prisma regular de base hexagonal.

**Professor(a):** Se sua escola oferece recursos de internet, proponha a alguns alunos que localizem suas casas usando o recurso do Google Earth.

17. Pedro fabricou duas caixas, como as vistas a seguir, sendo a primeira na forma de um paralelepípedo, e a segunda na forma de um prisma regular. Calcule qual o comprimento total da madeira que ele gastou para fazer a estrutura de cada uma dessas caixas.



17. 100 cm;  
108 cm.

Explore novamente a situação de cortes em peças de mesmo tamanho e as possíveis perdas de material, bem como cálculos de custos e lucros como sugerido para o exercício 13.

Explore, antes do exercício 18, atividades análogas com folhas de papel ou cartolina.

18. c, d, e, f, g.

Observe que as faces podem ser dobradas com as faces amarelas para dentro ou para fora.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

Caso julgue necessário, recorde algumas das atividades exploradas no capítulo 1 do sexto ano: Ângulos, representações e medidas. Como classificar os ângulos. Como identificar ou medir os ângulos dos dois tipos de esquadros. Associar ângulos com giros. Ângulos alternos internos. Ângulos e rotas. Inclinação. Relação entre lados e ângulos do esquadro 30-60-90. Ângulo de elevação.

Comente que, nesta e nas duas seções seguintes, vão estudar fatos sobre ângulos que têm aplicações nas Artes, na Engenharia, na confecção de diversos objetos, nos estudos das semelhanças de figuras, na Astronomia, em alguns ramos da Física, na Topografia, na Trigonometria. Em particular, sugira uma pesquisa sobre o que seja “ângulo de visão”. Para dar uma ideia deste tema, desenhe no quadro um retângulo representando uma trave de futebol e uma perpendicular à base passando pelo ponto médio. Depois, desenhe ângulos com vértices nesta perpendicular cujos lados passem pelas duas “balizas” da trave, para que os alunos percebam que estes “ângulos de visão” têm medidas tanto menores quanto maiores forem as distâncias dos vértices à base da trave.

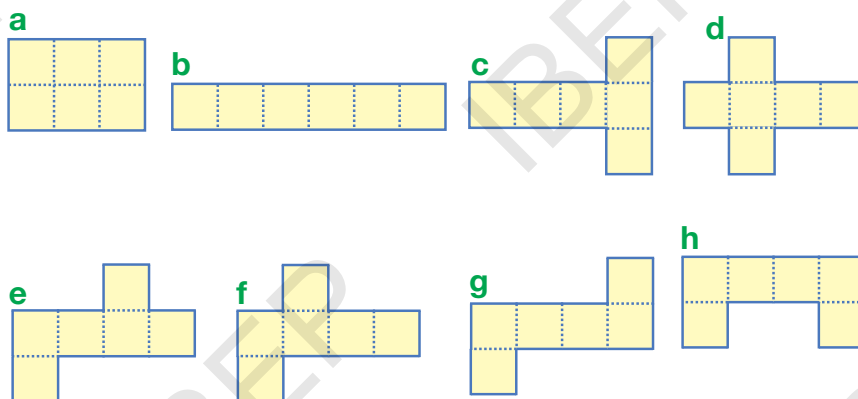
#### ATIVIDADES ORAIS

- PR, PQ.
- P.
- Ângulo QPR; ângulo P.

**Professor(a):** O exercício 19 tem por objetivo recordar o conceito de ângulo reto e de retas perpendiculares.

19. a) 90 graus;  
b) Ângulo reto;  
c) Retas perpendiculares.

18. Identifique, dentre as planificações a seguir, as que permitem montar um cubo:

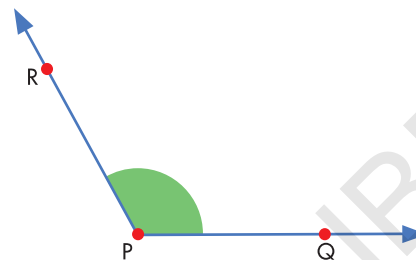


## Medindo ângulos

### Explorando o que você já sabe

Observe o ângulo da figura e responda:

- Quais são os nomes das semirretas que formam seus lados?
- Qual é o nome do ponto que é chamado de vértice?
- Um dos modos de se dar nome a essa figura é “ângulo RPQ”. Diga mais outros dois nomes desse ângulo.



### Aprendendo em sala de aula

19. Desenhe, em um papel quadriculado, duas retas que se cortam formando quatro ângulos de medidas iguais. Agora, responda:

- a) Qual a medida, em graus, de cada um desses quatro ângulos?  
b) Como se chama cada um desses quatro ângulos?  
c) Que nome se dá a duas retas que se cortam formando 4 ângulos de medidas iguais?



### Você se lembra?

No sexto ano, você resolveu diversos problemas medindo ângulos com os esquadros. Agora, você vai começar a usar um instrumento mais apropriado que permite medir ou desenhar ângulos cujas medidas variam entre zero e 180 graus.

Eu sei o nome desse instrumento: é o transferidor, mas não sei como usá-lo para medir ângulos.



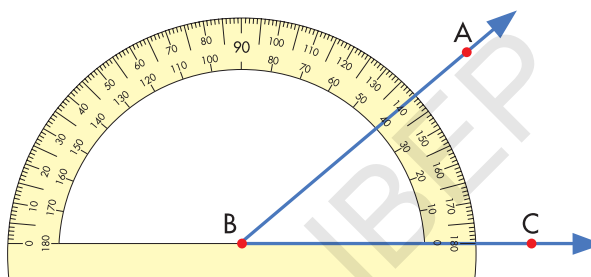
É muito fácil. Observe, na figura, como medir o ângulo ABC.



Soni Salvador

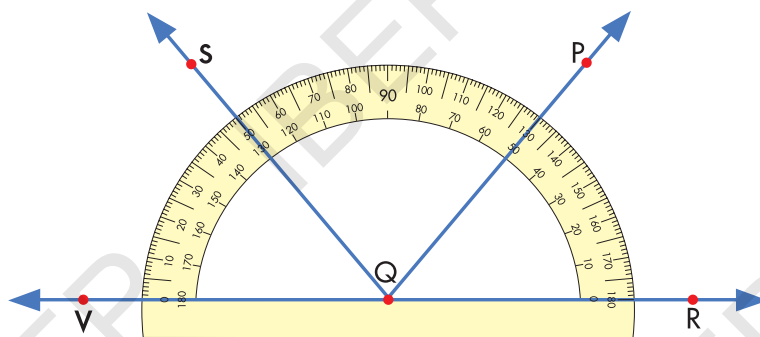
Inicialmente, coincidir o centro do transferidor com o vértice B do ângulo e o lado BC com a linha que liga o centro do transferidor com o número zero.

Depois, observar que o lado AB do ângulo passa sobre o número 40 do transferidor. Isso significa que o ângulo ABC mede  $40^\circ$  (quarenta graus).



Explore no quadro, sempre que possível, as diversas situações propostas neste capítulo; ou desenvolva você mesmo, mas explorando ao máximo com perguntas, os procedimentos necessários para a resolução, ou propondo aos alunos que o façam com a máxima participação dos demais. Explore, também, atividades com dobraduras. Veja o material sobre dobraduras: <http://www.obmep.org.br/docs/apostila9.pdf>

20. Observe a figura:



Escreva em seu caderno quantos graus mede cada ângulo:

a) PQR

b) SQR

c) VQR

21. Resolva com seus colegas:

a) Quanto mede o ângulo SQP?

b) Que conta vocês fizeram para calcular essa medida?

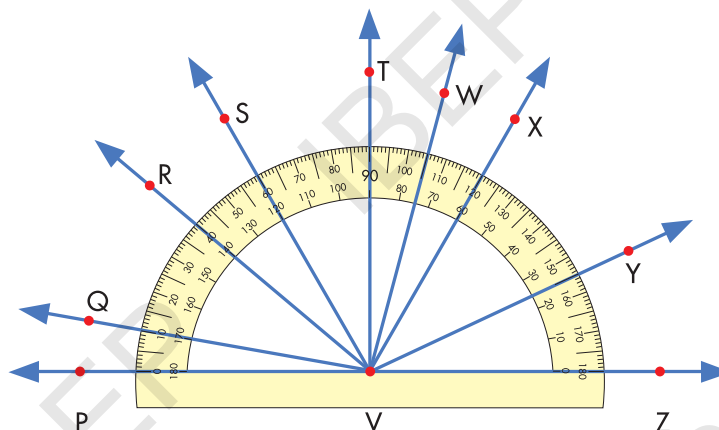
20. a)  $50^\circ$ ;  
b)  $130^\circ$ ;  
c)  $180^\circ$ .

21. a)  $80^\circ$ ;  
b)  $130^\circ - 50^\circ$ .

22. a) 25°;  
b) 60°;  
c) 75°;  
d) 90°;  
e) 120°;  
f) 140°;  
g) 170°;  
h) 180°.

22. Observe a figura e escreva as medidas dos ângulos a seguir:

- a) YVZ  
b) XVZ  
c) WVZ  
d) TVZ  
e) SVZ  
f) RVZ  
g) QVZ  
h) PVZ



23. a)  $60^\circ - 25^\circ = 35^\circ$ ;  
b)  $75^\circ - 60^\circ = 15^\circ$ .

23. Usando as medidas encontradas no exercício anterior, que conta você faria para calcular a medida:

- a) Do ângulo XZY? b) Do ângulo WVX?

24. SVT, TVW e WVX.

No exercício 25, exploramos de modo intuitivo os conceitos de soma e diferença das medidas de dois ângulos.

24. A medida do ângulo SVX é a soma das medidas de três ângulos. Quais são eles?

25. Escreva a medida do ângulo RVT como:

- a) Soma das medidas de dois ângulos.  
b) Diferença das medidas de dois ângulos.

25. a) RVS e SVT;  
b) RVZ – TVZ.

Professor, ouvi meu colega falar em “ângulos complementares” e “ângulos suplementares”. O que significam esses dois nomes?

Preste atenção nas quatro figuras a seguir. As duas primeiras representam dois “ângulos complementares”, e as duas últimas, “ângulos suplementares”.

26. a) 90°;  
b) Ângulos complementares.

27. a) 180°;  
b) Ângulos suplementares.

Depois de abordar o exercício 27, sugerimos propor atividades como as seguintes:

1ª. Se um ângulo mede 70 graus, quanto mede:

- a) seu complemento?  
b) seu suplemento?  
R) a) 20°; b) 110°.

2ª. Quanto medem dois ângulos complementares cujas medidas são iguais?

R) 45°.

3ª. Quanto medem dois ângulos suplementares cujas medidas são iguais?

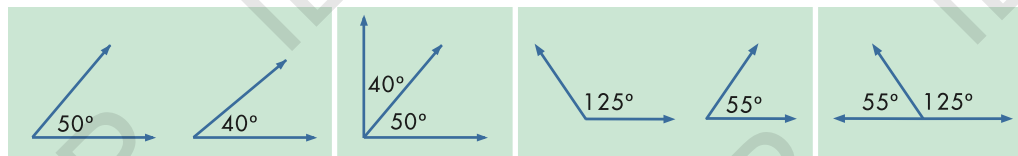
R) 90°.

26. Observe os pares de ângulos das duas primeiras figuras acima e responda:

- a) Qual a soma das medidas em graus dos dois ângulos de cada um desses pares?  
b) Qual o nome que se dá a esses pares de ângulos?

27. Observe os pares de ângulos das duas últimas figuras acima e responda:

- a) Qual a soma das medidas dos dois ângulos de cada um desses pares?  
b) Qual o nome que se dá a esses pares de ângulos?



28. Dos exemplos anteriores, o que você pode concluir sobre:

- O que são dois ângulos complementares?
- O que são dois ângulos suplementares?

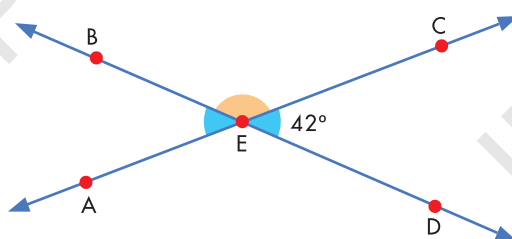
29. Calcule as medidas de dois ângulos complementares para cada caso a seguir:

- Um dos ângulos é o dobro do outro.
- Um dos ângulos é o quádruplo do outro.

30. Calcule as medidas de dois ângulos suplementares para cada caso a seguir:

- Um dos ângulos é o triplo do outro.
- Um dos ângulos é a quarta parte do outro.

Com base na figura abaixo, resolva os exercícios de 31 a 35.



31. Os ângulos CED e CEB têm um lado comum EC, e os outros dois lados são semirretas opostas: ED e EB. Eles se chamam “ângulos adjacentes”. Escreva os nomes de mais três pares de ângulos adjacentes da figura.

32. Observe que o ângulo DEC mede  $42^\circ$ . Sem usar transferidor, diga quanto mede o ângulo CEB.

33. Discuta com seus colegas e decida se verdadeiro ou falso:

- Se dois ângulos são adjacentes, então são suplementares.
- Se dois ângulos são suplementares, então são adjacentes.

34. Os ângulos CED e AEB têm como lados semirretas opostas: EC e EA são semirretas opostas, bem como ED e EB. Por isso, eles se chamam “ângulos opostos pelo vértice”. Escreva o nome de mais um par de ângulos opostos pelo vértice da figura.

35. Sem usar o transferidor, calcule a medida do ângulo AEB.

- Dois ângulos são complementares se a soma de suas medidas for igual a  $90^\circ$ ;
- Dois ângulos são suplementares se a soma de suas medidas for igual a  $180^\circ$ .

Observação importante a ser feita: os nomes complementares e suplementares se aplicam apenas a dois ângulos. Por exemplo, três ângulos que medem 30 graus (e, portanto, a soma das medidas é 90 graus) não podem ser chamados de ângulos complementares.

- $30^\circ$  e  $60^\circ$ ;
- $18^\circ$  e  $72^\circ$ .

Sugestão:

- $\square + \square = 90$   
Logo,  $\square = 30$  e  $\square = 60$ ;
- $\square + \square = 90$   
Logo,  $\square = 90 : 5 = 18$  e  $18 \times 4 = 72$ .

- $45^\circ$  e  $135^\circ$ ;
- $36^\circ$  e  $144^\circ$ .

Sugestão: (item b)

- Maior:  $\square$   
Menor:  $\square$   
 $\square + \square = 180$   
 $\square = 180 : 5 = 36$   
 $36 \times 4 = 144$ .

Quando julgar que o recurso da “álgebra dos quadradinhos” sugerida acima vai facilitar a compreensão, utilize-a. Proponha, também, que os alunos inventem problemas relacionados com equações com quadradinhos semelhantes às vistas acima.

- AEB e AED;  
BEC e AEB;  
CED e AED.

32.  $138^\circ (180^\circ - 42^\circ)$ .

- Verdadeiro;
- Falso.

Contraexemplo para (b): dois ângulos cuja soma das medidas seja 180 graus, mas não tenham um lado comum.

34. BEC e AED.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, as respostas do exercício 28 (ângulos complementares e ângulos suplementares), a figura da página e os enunciados dos exercícios 31 e 34.

35.  $42^\circ$ .

36. Desenho do aluno.

37. Desenho do aluno (mesma sugestão do 33).

38. a) Verdadeiro;  
b) Falso.

Os exercícios anteriores têm dois objetivos: dar gradativamente aos alunos (ainda sem maiores destaques) a ideia de proposições recíprocas e o fato de que nem sempre a recíproca de uma proposição verdadeira é também verdadeira. Outro objetivo pode ser contemplado: o uso de contraexemplos para mostrar que frases dadas são falsas.

Dobre um quadrado segundo as retas que passam pelos pontos médios dos lados opostos e pelas diagonais. Depois, desdobre e explore:

a) Ângulos que medem 45, 90, 135 e 180 graus;  
b) Ângulos adjacentes;  
c) Ângulos opostos pelo vértice.

41. 1  $\Rightarrow$  40°;  
2  $\Rightarrow$  32°;  
3  $\Rightarrow$  40°;  
4  $\Rightarrow$  90°;  
5  $\Rightarrow$  135°;  
6  $\Rightarrow$  80°;  
7  $\Rightarrow$  40°;  
8  $\Rightarrow$  15°.

Explore o exercício, pedindo aos alunos que descrevam, em cada caso, a razão ou as razões que justificam os cálculos.

Sugerimos ao professor usar duas folhas superpostas e fazer duas dobras retas que se cortam. Ao desdobrar, é possível explorar os conceitos de ângulos, ângulos de medidas iguais (usando as duas folhas ou não), ângulos opostos pelo vértice, ângulos adjacentes.

Recorde os conceitos de ângulos alternos internos e a igualdade de suas medidas, no caso de serem formados por uma transversal a duas retas paralelas.

42. a) 1, 5 e 7;  
b) 2, 6 e 8;  
c) 1  $\Rightarrow$  110°;  
2  $\Rightarrow$  70°;  
4  $\Rightarrow$  70°;  
5  $\Rightarrow$  110°;  
6  $\Rightarrow$  70°;  
7  $\Rightarrow$  110°;  
8  $\Rightarrow$  70°;  
d) 4 e 6, 3 e 5.

36. Desenhe dois ângulos adjacentes MON e NOP.

37. Desenhe dois ângulos suplementares que não sejam adjacentes.

38. Discuta com seus colegas e decida se verdadeiro ou falso:

- a) Se dois ângulos são opostos pelo vértice, suas medidas são iguais.  
b) Se as medidas de dois ângulos são iguais, eles são opostos pelo vértice.

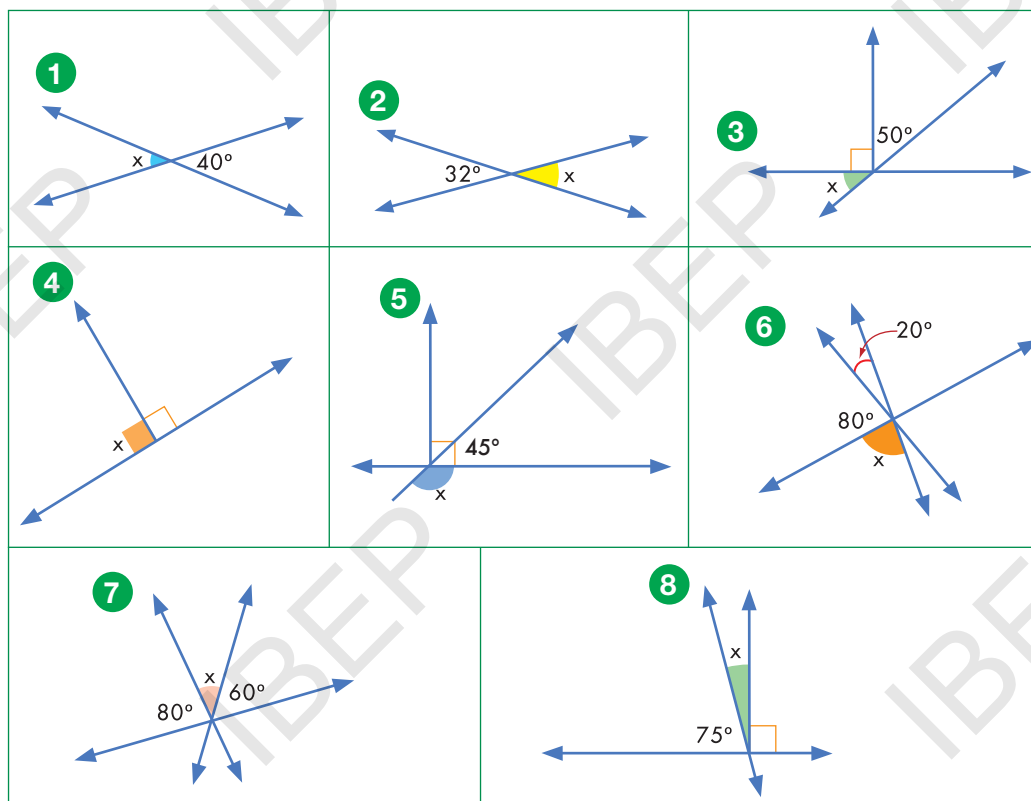
39. Desenhe dois ângulos opostos pelo vértice QPR e SPT.

39. Desenho do aluno.

40. Desenhe dois ângulos de medidas iguais que não sejam opostos pelo vértice.

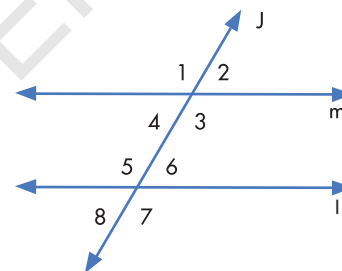
40. Desenho do aluno.

41. Nas figuras de 1 a 8 a seguir, existem ângulos com medidas representadas pela letra  $x$ . Em cada caso, calcule o valor de  $x$ :



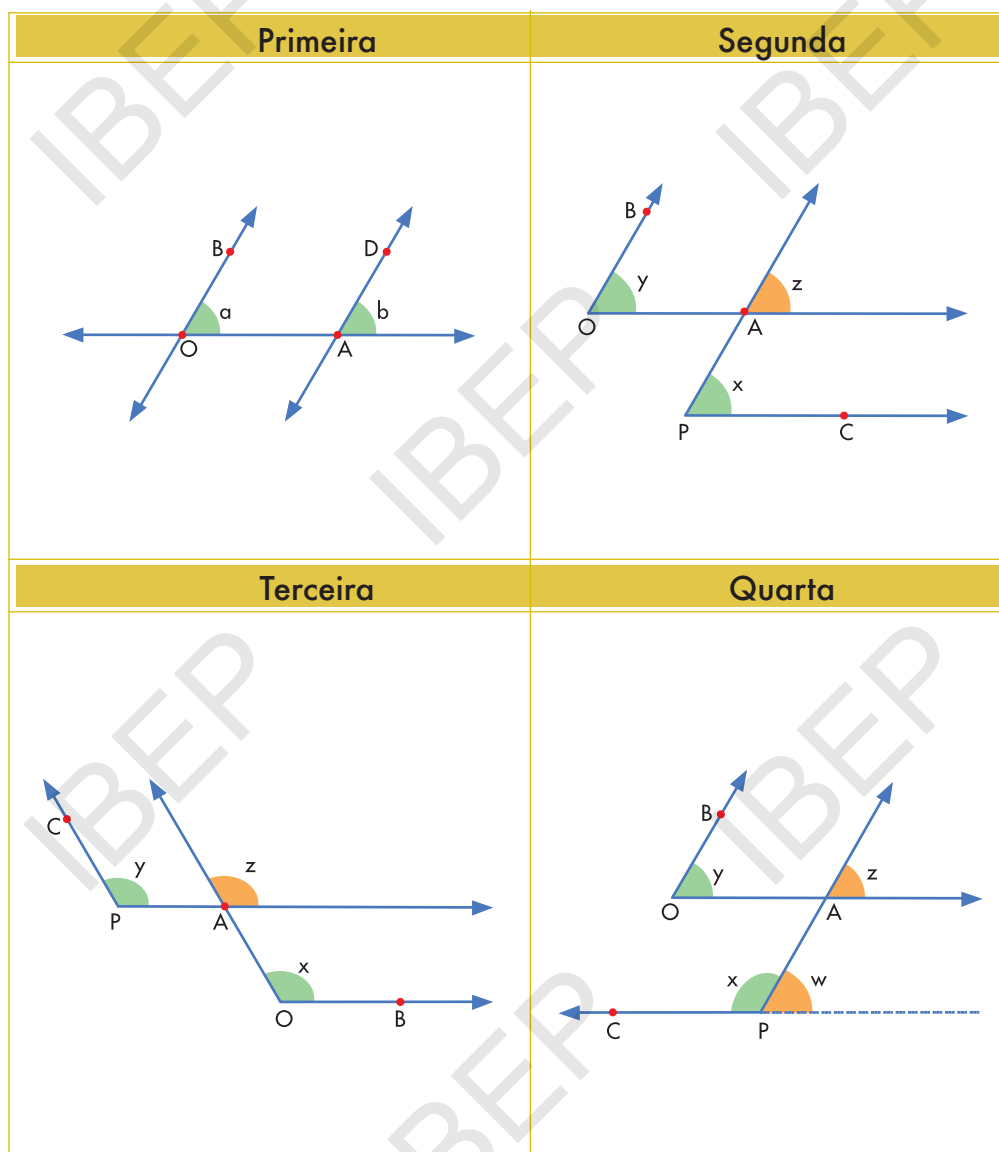
42. Na figura, as retas  $l$  e  $m$  são paralelas. Diversos ângulos são identificados por números.

- a) Escreva os números de três ângulos que têm medidas iguais ao ângulo 3.  
b) Escreva os números de três ângulos que têm medidas iguais ao ângulo 4.  
c) Se o ângulo 3 mede 110°, quanto medem os sete outros ângulos?  
d) Dê os números de dois pares de ângulos alternos internos.





43. Observe as quatro figuras a seguir. Em cada uma, você vê ângulos de lados paralelos:



Desenhe duas semirretas paralelas e de mesmo sentido e depois uma reta que passa pelas origens delas. Pergunte aos alunos se as duas semirretas ficam de um mesmo lado dessa reta ou em lados opostos. Depois, desenhe duas semirretas paralelas e de sentidos opostos e a reta que passa por suas origens. Pergunte aos alunos se elas ficam de um mesmo lado dessa reta ou em lados opostos. Essas duas atividades permitem aos alunos perceberem, de modo intuitivo, o que são semirretas paralelas e de mesmo sentido e o que são semirretas paralelas e de sentidos opostos.

43. a) Primeira e segunda;  
b) Terceira;  
c) Quarta.

Antes de explorar o exercício 44, proponha atividades de medição dos ângulos das 3 primeiras figuras da ilustração do exercício 43, usando transferidores, compassos ou quaisquer outros recursos para que os alunos tirem conclusões a respeito da igualdade das medidas de diversos deles, em cada figura. Explore a 4ª. figura, perguntando o que se conclui das medidas dos ângulos  $y$  e  $w$ .

Opcionalmente, demonstre as afirmações abaixo usando propriedades de ângulos alternos internos, ângulos opostos pelo vértice e ângulos adjacentes. Exemplificando: na primeira figura, denomine o ângulo oposto pelo vértice ao ângulo  $b$  de  $c$ . Logo, o ângulo  $a$  é congruente com  $c$  (justifique). E, como  $c$  e  $b$  são congruentes (justifique), resulta que  $a$  e  $b$  são congruentes. As demonstrações das outras propriedades são feitas com recursos semelhantes. (Note que usamos a propriedade transitiva da congruência.)

- a) Em quais das figuras todos os ângulos destacados em cores são agudos?  
b) Em qual figura todos os ângulos destacados em cores são obtusos?  
c) Qual das figuras tem, destacados em cores, ângulos agudos e um ângulo obtuso?
44. Usando a ilustração acima, meça os ângulos correspondentes a cada par de ângulos citados a seguir, discuta com seus colegas e responda:
- a) O que se pode dizer das medidas de dois ângulos de lados paralelos, sendo ambos agudos?  
b) O que se pode dizer das medidas de dois ângulos de lados paralelos, sendo ambos obtusos?  
c) O que se pode dizer das medidas de dois ângulos de lados paralelos, sendo um agudo e outro obtuso?

44. a) São iguais;  
b) São iguais;  
c) Que a soma dos dois é igual a  $180^\circ$ , isto é, são suplementares.

Peça aos alunos que escrevam em seus cadernos as frases a seguir:

Se dois ângulos têm os lados paralelos e são ambos agudos ou ambos obtusos, então suas medidas são iguais.

Se dois ângulos têm os lados paralelos sendo um agudo e outro obtuso, então são ângulos suplementares.

Comente que o descrito nas frases que acabaram de anotar é válido em geral, sistematizando as propriedades correspondentes.

Antes das atividades do “Aprendendo em casa”, desenhe no quadro duas figuras de retas que se cortam formando um ângulo agudo de 60 graus. Explore:

- a medida do ângulo oposto pelo vértice desse ângulo;
- as medidas dos dois outros ângulos opostos pelo vértice;
- a soma das medidas dos quatro ângulos. Objetivo: possibilitar aos alunos o cálculo das medidas dos ângulos **a** e **d**, do exercício 49 da página 63, e prepará-los para a compreensão de quanto mede, em graus, o ângulo central correspondente ao arco de uma circunferência.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

Muitas vezes, usamos o que se denomina “abuso de linguagem” para que os enunciados não fiquem sofisticados. É o caso de alguns enunciados do exercício 45, em que, por exemplo, escrevemos “ângulo maior que o ângulo reto” no sentido de: “ângulo cuja medida é maior que a medida do ângulo reto”.

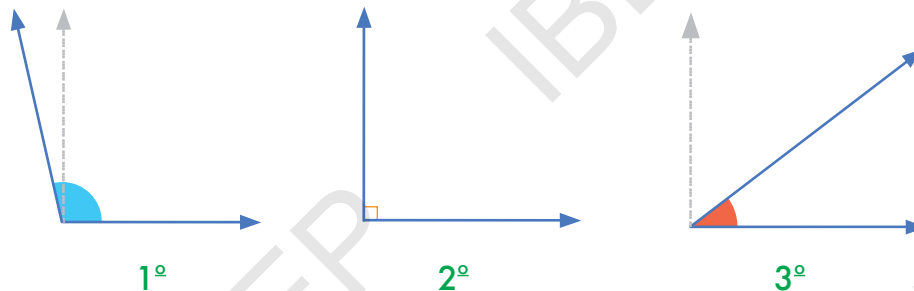
46. a) O de lados pretos;  
b) O triângulo vermelho;  
c) Verde.

Um erro muito comum é o aluno dizer que um ângulo é maior que outro porque, nos desenhos que os representam, o primeiro tem os comprimentos dos lados maiores. É importante salientar para o aluno que a comparação entre medidas de ângulos se faz pela “abertura” de seus lados, e não pelo “tamanho”. Este é o objetivo deste exercício.

Esclareça este fato desenhando no quadro ângulos de aberturas diferentes, sendo os de aberturas menores com as semirretas que representam seus lados maiores que as que representam os ângulos de aberturas maiores, e dirigindo perguntas aos alunos para detectar se ficou bem entendido o fato: quanto maior a “abertura”, maior o ângulo, ou seja, o “tamanho” dos lados não significa nada em termos de medida do ângulo.

## Aprendendo em casa

45. Observe os três ângulos a seguir:



- Qual deles é um ângulo reto?
- Qual deles é maior que um ângulo reto?
- Qual deles é menor que um ângulo reto?
- Como se chamam os ângulos maiores que o ângulo reto?
- O que se pode dizer das medidas deles em graus?
- Como se chamam os ângulos menores que o ângulo reto?
- O que se pode dizer das medidas deles em graus?

45. a) 2º;  
b) 1º;  
c) 3º;  
d) Obtusos;  
e) Suas medidas são maiores que 90º;  
f) Agudos;  
g) Suas medidas são menores que 90º.

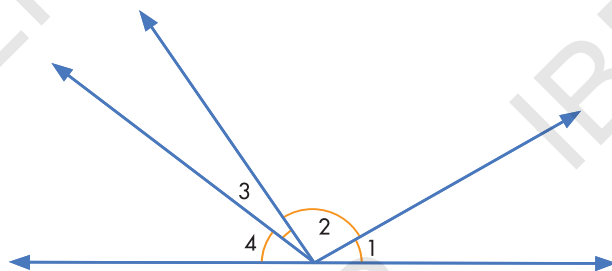
46. Observe a bandeira da Guiana, cujo desenho dá ideia de dez **ângulos agudos**: um de lados brancos, um de lados pretos, três de interior vermelho, três de interior amarelo e dois de interior verde. O contorno da bandeira é retangular.



Responda com base no desenho da bandeira:

- Qual dos dois ângulos é maior que o outro: o de lados brancos ou o de lados pretos?
- Identifique pela cor um triângulo que tem os três ângulos agudos.
- Qual a cor dos triângulos que têm um ângulo reto?

47. Use seu transferidor para medir os ângulos 1, 2, 3 e 4 da figura a seguir:



47. Medidas aproximadas:

- 1  $\Rightarrow$  30°;
- 2  $\Rightarrow$  95°;
- 3  $\Rightarrow$  18°;
- 4  $\Rightarrow$  37°.

48. Observe a figura a seguir. Nela, você vê vários ângulos agudos cujo vértice comum é o ponto A.

Use seu transferidor para medir:

- a) O ângulo de interior verde.
- b) O ângulo de interior branco.
- c) O ângulo de interior vermelho.
- d) O ângulo de interior amarelo.
- e) O ângulo de interior azul.



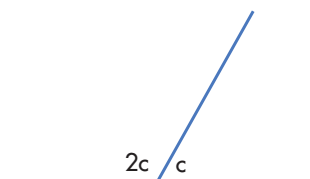
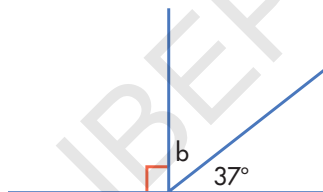
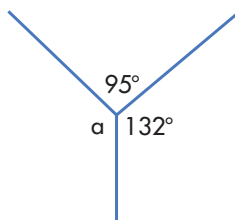
48. Medidas aproximadas:

- a) 10°;
- b) 10°;
- c) 18°;
- d) 21°;
- e) 31°.

Meça usando, para vértice dos ângulos, o vértice inferior esquerdo do retângulo.

Proponha aos alunos que façam diversas dobras em um papel retangular como na bandeira anterior, e que usem o transferidor para medir os ângulos das dobras.

49. Em cada caso da figura a seguir, calcule a medida em graus dos ângulos cujas medidas estão representadas por letras:



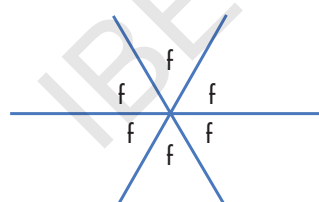
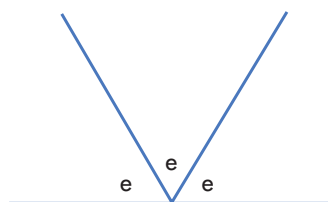
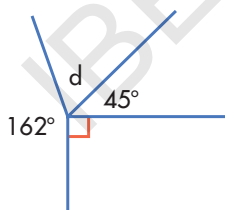
49. a = 133°;  
b = 53°;  
c = 60°;  
d = 63°;  
e = 60°;  
f = 60°.

Ao discutir este exercício e o seguinte, explore-os solicitando aos alunos que, em cada caso, descrevam a razão ou as razões que justificam os cálculos.

Recomende ou explore a leitura de:

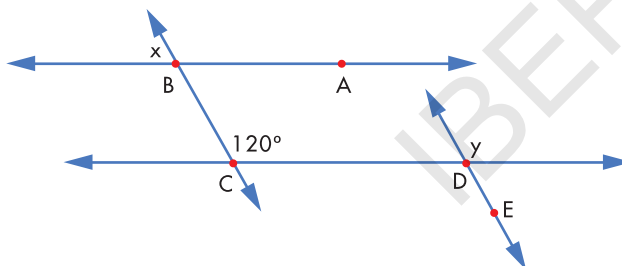
“Ângulos”  
Coleção Pra que serve Matemática?

Atual Editora  
Imenes – Jabuko – Lellis



50.  $x \Rightarrow 60^\circ$ ;  
 $y \Rightarrow 120^\circ$ .

50. Na figura, as retas AB e CD são paralelas, bem como as retas BC e DE:



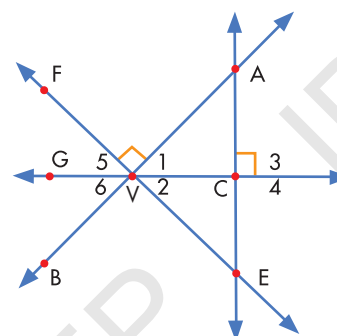
Calcule as medidas dos ângulos  $x$  e  $y$ .

51. a) 2 e 5; 1 e 6;  
 b) AVC; CVE; AVE;  
 c) 2 e 6;  
 d) AVG e AVC (ou outros).

Há outras respostas possíveis. Explore este fato.

51. Com base na figura, identifique:

- a) Dois pares de ângulos opostos pelo vértice.  
 b) Três triângulos retângulos.  
 c) Dois ângulos complementares.  
 d) Dois ângulos suplementares que não sejam retos.



52. Se o ângulo CVG mede  $180^\circ$  e AVF mede  $90^\circ$ , temos que a soma das medidas FVG e AVC é  $90^\circ$ .

53. Desenho do aluno.

No exercício 53, apresentamos, de modo intuitivo, o que é bissetriz de um ângulo.

54. Desenho do aluno.

55. A medida é igual a 90 graus.

56.  $90^\circ$ .

Para demonstrar esse fato, use o desenho do exercício 54: chame de  $x$  as medidas dos dois ângulos formados pela bissetriz OX, e, de  $y$ , as medidas dos dois ângulos formados pela bissetriz OY. Como a soma  $x + x + y + y = 180$ , temos que  $x + y = 90$ .

57. Desenhos do aluno.

52. Nilson disse que os ângulos 1 e 5 da figura anterior são ângulos complementares. Quais contas ele fez para concluir este fato?

53. A bissetriz de um ângulo é uma semirreta, contida em seu interior, cuja origem é o vértice do ângulo e que o decompõe em dois ângulos de medidas iguais. Use um transferidor e uma régua para desenhar:

- a) Um ângulo de  $80^\circ$ .  
 b) A bissetriz desse ângulo.

54. Desenhe:

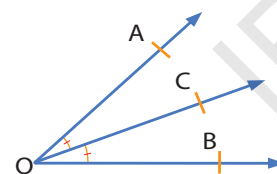
- a) Dois ângulos adjacentes DOE e EOC.  
 b) As bissetrizes OX e OY desses ângulos.

55. Meça o ângulo XOY que você desenhou no exercício anterior.

56. Qual é a medida do ângulo formado pelas bissetrizes de dois ângulos adjacentes?

57. Use um papel quadriculado e desenhe:

- a) Dois ângulos agudos de lados respectivamente paralelos.  
 b) Dois ângulos obtusos de lados respectivamente paralelos.  
 c) Dois ângulos de lados respectivamente paralelos, sendo um agudo e outro obtuso.



A semirreta OC é a bissetriz do ângulo AOB.



58. Meça os ângulos que você desenhou no exercício anterior e responda:

- Em quais dos itens do exercício anterior os ângulos têm medidas iguais?
- Em qual item do exercício anterior os ângulos são suplementares?

59. Observe o **paralelogramo** ao lado e resolva:

- Dê um par de ângulos agudos e de lados paralelos.
- Dê dois ângulos obtusos e de lados paralelos.



60. Responda, com base no paralelogramo ABCD:

- Os ângulos **A** e **C** têm os lados paralelos e são ambos obtusos. O que se pode dizer das medidas deles?
- Os ângulos **B** e **D** têm os lados paralelos e são ambos agudos. O que se pode dizer das medidas deles?
- Os ângulos **D** e **C** têm os lados paralelos, sendo um agudo e outro obtuso. O que se pode dizer das medidas deles?
- Se o ângulo **D** mede  $80^\circ$ , quanto medem os ângulos **C**, **B** e **A**?

Professor, o que são ângulos opostos de um quadrilátero e o que são ângulos consecutivos?

Veja os exemplos da frase a seguir e descubra como responder a essas perguntas.



Na figura anterior, os ângulos **A** e **C** são ângulos opostos do quadrilátero e os ângulos **D** e **C** são ângulos consecutivos do quadrilátero.

61. Resolva com base na figura do exercício 59 e nos dois exemplos que você vê na frase acima.

- Dê dois outros ângulos opostos do paralelogramo ABCD.
- Dê três outros pares de ângulos consecutivos do paralelogramo ABCD.
- No paralelogramo, se os vértices de dois ângulos pertencem a um mesmo lado, eles se chamam ângulos consecutivos ou ângulos opostos?
- V ou F: No paralelogramo, os vértices de ângulos opostos pertencem a um mesmo lado.

58. a) Situação das letras (a) e (b);  
b) Situação da letra (c).

Os exercícios anteriores visam à redescoberta, pelos alunos, dos fatos a seguir:

“Ângulos de lados paralelos, ambos agudos ou ambos obtusos, têm medidas iguais.” “Ângulos de lados paralelos, um agudo e outro obtuso, são suplementares.”

59. a) Ângulos D e B;  
b) Ângulos A e C.

60. a) São iguais;  
b) São iguais;  
c) Que a soma deles é  $180^\circ$ ;  
d)  $C \Rightarrow 100^\circ$ ;  
 $B \Rightarrow 80^\circ$ ;  
 $A \Rightarrow 100^\circ$ .

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, a figura do exercício 59, os diálogos do exercício 60 e a frase que sucede à ilustração (os dois exemplos).

61. a) Ângulos D e B;  
b) Ângulos A e B; B e C, D e A;  
c) Consecutivos;  
d) F.

**Professor(a):** Antes de explorar o exercício 62, desenhe no quadro um quadrilátero qualquer, ou seja, que não tenha lados paralelos, e identifique os pares de ângulos consecutivos e ângulos opostos do quadrilátero. Explore, ao identificá-los, o fato de seus vértices pertencerem ou não, respectivamente, a um mesmo lado do quadrilátero. Isto possibilitará aos alunos resolver o exercício 62 e evitará que tenham a falsa ideia de que esses conceitos somente são válidos para paralelogramos. Do mesmo modo, identifique pares de lados consecutivos (lados que têm um vértice comum) e lados opostos (lados que não têm vértices comuns).

63. a) “As medidas dos ângulos opostos dos paralelogramos são iguais”;  
b) “A soma das medidas dos ângulos consecutivos dos paralelogramos é igual a 180 graus”.

Pergunte aos alunos se as frases acima são verdadeiras para um quadrilátero que não seja um paralelogramo. Sugira que façam um desenho para facilitar responder.

Afirme para os alunos que as frases (a) e (b) das respostas do exercício 63 são verdadeiras, como consequência das propriedades de ângulos de lados paralelos já estudadas.

Comente que a resposta (b) do exercício 63 é equivalente a dizer: Os ângulos consecutivos dos paralelogramos são suplementares.

Ver na página 11 observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

- Equiláteros; isósceles.
- Acutângulos.
- Triângulos retângulos, hipotenusa.
- Obtusângulo.
- 180 graus.

Depois do exercício 65, desenhe o mesmo triângulo no quadro, mas agora, em vez de desenhar semirretas que contêm seus lados, desenhe as retas que contêm esses lados. Observe que assim você obterá ângulos opostos pelo vértice aos ângulos destacados na figura (120 graus, 90 graus e  $z$  graus). Também esses ângulos são chamados de ângulos externos do triângulo. Faça notar que esses ângulos são adjacentes aos ângulos internos.

## 62. Copie as frases em seu caderno e complete-as:

- a) Ângulos opostos de um quadrilátero são ângulos do quadrilátero cujos vértices...?...
- b) Ângulos consecutivos de um quadrilátero são ângulos do quadrilátero cujos vértices...?...
- c) Lados consecutivos de um quadrilátero são lados que têm um...?...
- d) Lados opostos de um quadrilátero são lados que não têm...?...

Peça aos alunos que escrevam as duas respostas do exercício 63 em seus cadernos.

## 63. Responda:

- a) O que se pode dizer das medidas dos ângulos opostos de um paralelogramo?
- b) O que se pode dizer das medidas dos ângulos consecutivos de um paralelogramo?

62. a) não pertençam a um mesmo lado do quadrilátero;  
b) pertençam a um mesmo lado do quadrilátero;  
c) vértice comum;  
d) vértice comum.

## Ângulos nos triângulos e nos polígonos

### Explorando o que você já sabe

Você já sabe o que é triângulo e conhece vários fatos sobre triângulos. Para relembrar esses fatos, responda às perguntas abaixo:

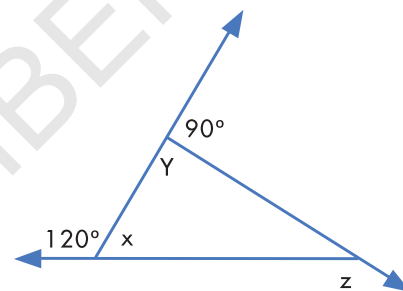
- Como se chamam os triângulos que têm três lados de mesma medida? E os que têm dois lados de mesma medida?
- Como se chamam os triângulos que têm os três ângulos agudos?
- Como se chamam os triângulos que têm um ângulo reto? Como se chama o lado maior desses triângulos?
- Se um triângulo tem um ângulo obtuso, como ele se chama?
- Quanto mede, em graus, a soma dos três ângulos de qualquer triângulo?

### Aprendendo em sala de aula

Se você prolongar cada um dos três lados de um triângulo, irá obter uma figura como a que se vê ao lado.

Os ângulos que medem  $120^\circ$  e  $90^\circ$  chamam-se “ângulos externos do triângulo”.

Agora, responda ou resolva os exercícios a seguir, com base nessa figura:



64. Você já sabe o que são ângulos adjacentes. Discuta com seus colegas e descreva o que são **ângulos externos de um triângulo**.

65. Na figura anterior, dois dos ângulos internos do triângulo têm suas medidas em graus representadas por  $x$  e por  $y$ . Calcule essas medidas.

65.  $x \Rightarrow 60^\circ$ ;  $y \Rightarrow 90^\circ$ .

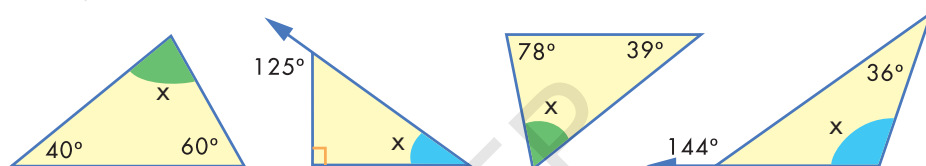
66. Use o fato de que **a soma dos ângulos internos de qualquer triângulo mede  $180^\circ$**  para calcular a medida do terceiro ângulo interno do triângulo da página ao lado e a medida do **ângulo externo  $z$** .

66.  $30^\circ$ ;  $150^\circ$ .

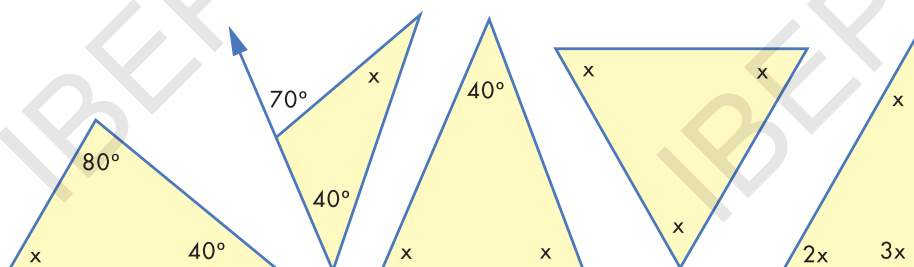
67. Calcule a soma das medidas dos três ângulos externos do triângulo da página ao lado. 67.  $360^\circ$ .

68. Muitas vezes, um **topógrafo** tem dificuldades em chegar a certos pontos de um terreno para medi-lo (por exemplo, quando este é atravessado por um rio). Altair é topógrafo e registrou, nos desenhos a seguir, as medidas de dois ângulos de cada um de quatro terrenos. Ele disse que apenas com os dados registrados é possível calcular todos os ângulos formados pelos lados desses terrenos.

Prove que Altair está certo ao fazer essa afirmação, calculando as medidas que faltam e anotando as contas e as respostas em seu caderno.



69. Nas figuras a seguir, existem ângulos com medidas representadas pela letra  $x$ . Em cada caso, calcule o valor de  $x$ :



64. “Ângulos externos de um triângulo são os ângulos adjacentes aos seus ângulos internos.”

Peça aos alunos que anotem a frase entre aspas em seus cadernos.

Se julgar necessário, explore (usando desenhos):

- ângulo interno de um polígono é todo ângulo cujo vértice é um dos vértices do polígono e cujos lados contêm os lados do polígono;
- ângulo externo de um polígono é qualquer ângulo adjacente a um de seus ângulos internos.

Comente o significado do termo **topógrafo** - Profissional que estuda os níveis e as características do terreno para ajudar o arquiteto e o engenheiro no seu trabalho.

**Professor(a):** Nos capítulos 1 e 2 do sexto ano, exploramos os conceitos de ângulos, paralelas, polígonos (convexos), lados e ângulos de polígonos, ângulos externos de triângulos, polígonos regulares, classificação dos triângulos e dos quadriláteros, soma dos ângulos de um triângulo, a convenção de marcas indicativas de lados de mesma medida, ângulos de mesma medida, segmentos paralelos. Caso julgue conveniente, recorde brevemente tais temas e convenções.

Comente que todas as atividades envolvendo ângulos pressupõem que as medidas deles são iguais que ou menores que  $180^\circ$ .

Antes de resolver o exercício 68, calcule os ângulos internos adjacentes aos ângulos de  $125^\circ$  e  $144^\circ$ .

68. Primeira figura:  
 $40^\circ + 60^\circ + X = 180^\circ$   
 $X = 80^\circ$ ;  
 Segunda figura:  
 $90^\circ + 55^\circ + X = 180^\circ$   
 $X = 35^\circ$ ;  
 Terceira figura:  
 $39^\circ + 78^\circ + X = 180^\circ$   
 $X = 63^\circ$ ;  
 Quarta figura:  
 $36^\circ + 36^\circ + X = 180^\circ$   
 $X = 108^\circ$ .

69. Primeira figura:  $60^\circ$ ;  
 segunda figura:  $30^\circ$ ;  
 terceira figura:  $70^\circ$ ;  
 quarta figura:  $60^\circ$ ;  
 quinta figura:  $30^\circ$ .

Peça aos alunos que anotem a frase da resposta (e) em seus cadernos.

Explore a atividade a seguir. Ela será útil para a compreensão do item (d) do exercício 71.

Escreva os três números naturais da igualdade  $25 = 15 + 10$  em ordem crescente.

Escreva com símbolos a desigualdade entre a soma 25 e a parcela 15.

Escreva com símbolos a desigualdade entre a soma 25 e a parcela 10.

Escreva uma frase que explique a relação de desigualdade entre a soma de dois números naturais diferentes de zero e cada um deles.

Nesse exercício, explora-se a ideia de que a soma de dois números naturais diferentes de zero é maior que qualquer um deles. O objetivo é que o aluno conclua que, sendo a medida de um ângulo externo igual à soma dos internos não adjacentes a ele, então o ângulo externo é maior que qualquer um deles.

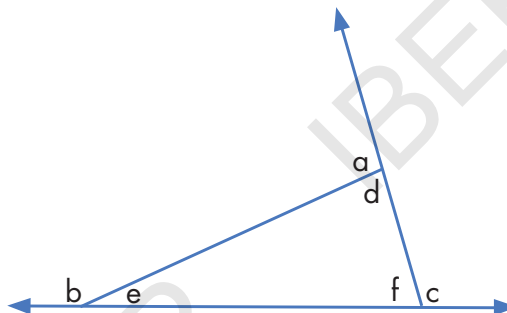
71. a) A medida do ângulo externo **c** é a soma das medidas dos ângulos internos **d** e **e**;  
b) A medida do ângulo externo **b** é a soma das medidas dos ângulos internos **d** e **f**;  
c) A medida do ângulo externo **a** é a soma das medidas dos ângulos internos **e** e **f**;  
d) No triângulo, a medida de um ângulo externo é maior que a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.

Peça aos alunos que anotem em seus cadernos a figura do exercício 70 e a frase (d) acima.

Antes do exercício 72, reveja: (a) segmentos com marcas iguais têm medidas iguais; (b) os ângulos na base dos triângulos isósceles têm medidas iguais.

Para que os alunos aceitem como válidas as conclusões das atividades dos exercícios 70 e 71, afirme para eles, após as atividades, que as frases do item (e) das respostas 70 e do item (d) do 71 são verdadeiras para todos os triângulos. (Veja a observação da página 10).

70. Observe o triângulo da figura:



70. a) f;  
b) d e e;  
c) d e e;  
d) c;  
e) A medida do ângulo externo **c** do triângulo é igual à soma das medidas dos ângulos internos **d** e **e**, não adjacentes a ele. Justificativa:  
 $c + f = 180^\circ$   
 $d + e + f = 180^\circ$ .  
Logo,  $c = d + e$ .

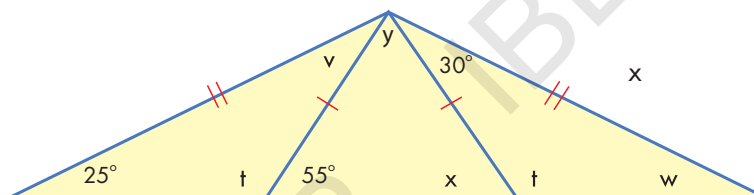
Resolva:

- a) Qual dos ângulos **d**, **e** ou **f** é adjacente ao ângulo externo **c**?  
b) Quais os ângulos internos do triângulo não são adjacentes ao ângulo externo **c**?  
c) Identifique dois ângulos cuja soma das medidas com a medida do ângulo **f** é  $180^\circ$ .  
d) Identifique um ângulo cuja soma de sua medida com a medida do ângulo **f** é  $180^\circ$ .  
e) Qual a relação entre a medida do ângulo externo **c** do triângulo e a soma das medidas dos ângulos internos **d** e **e**, não adjacentes a ele? Justifique.

71. Observando a figura do exercício 70, copie as frases dos itens (a), (b), (c) a seguir, em seu caderno, e as complete corretamente. Depois, resolva o que se propõe no item (d).

- a) A medida do ângulo externo **c** é a soma das medidas dos ângulos internos **d** e...?...  
b) A medida do ângulo externo **b** é a soma das medidas dos ângulos internos...?...  
c) A medida do ângulo externo **a** é a soma das medidas dos ângulos internos...?...  
d) Escreva uma frase que explique a relação de desigualdade entre a medida de um ângulo externo do triângulo e a medida de qualquer um dos ângulos internos não adjacentes a ele.

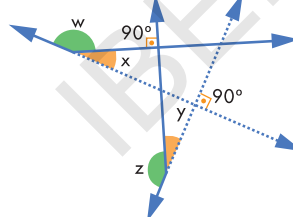
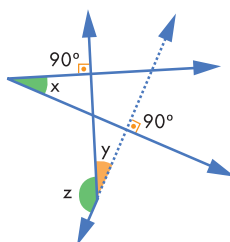
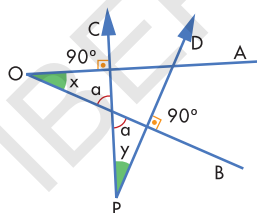
72. Calcule as medidas dos ângulos representadas por letras na figura a seguir.



72.  $t \Rightarrow 125^\circ$   
 $v \Rightarrow 30^\circ$   
 $x \Rightarrow 55^\circ$   
 $y \Rightarrow 70^\circ$   
 $w \Rightarrow 25^\circ$



73. Observe as três figuras a seguir. Em cada uma delas, você vê dois ângulos tais que os lados de um são perpendiculares aos lados do outro.



- Quais dentre os ângulos  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$  são agudos? Quais são obtusos?
- Os ângulos  $x$  e  $a$  da primeira figura são complementares. Escreva os nomes de outros dois ângulos complementares da mesma figura.
- O que se pode dizer das medidas dos ângulos  $x$  e  $y$  das três figuras?
- Os ângulos  $z$  e  $x$  da segunda e terceira figuras são complementares ou suplementares?
- O que você conclui sobre as medidas dos ângulos  $w$  e  $z$  da terceira figura?

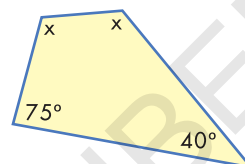
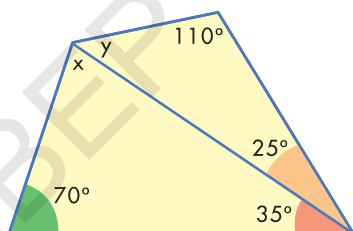
73. a) Agudos:  $x$ ,  $y$ ; obtusos:  $z$  e  $w$ ; b)  $y$ ,  $a$ ; c) São iguais; d) Suplementares; e) São iguais.

74. Explore os resultados do exercício anterior para discutir com seus colegas e responder:

- O que se pode dizer das medidas de ângulos tais que os lados de um são perpendiculares aos lados do outro, sendo ambos agudos ou ambos obtusos?
- O que se pode dizer das medidas de ângulos tais que os lados de um são perpendiculares aos lados do outro, sendo um agudo e outro obtuso?

75. Na primeira figura a seguir, você vê um quadrilátero decomposto em dois triângulos por uma de suas diagonais.

- Calcule as medidas, em graus, dos ângulos  $x$  e  $y$ .
- Calcule a soma das medidas dos ângulos  $x$  e  $y$ .
- Some as medidas dos quatro ângulos do quadrilátero.
- Discuta com seus colegas e decida se é verdadeiro ou falso: a soma das medidas dos ângulos do quadrilátero é 360 graus.



76. Observe a segunda figura da ilustração acima. Nela, existem dois ângulos de mesma medida representada pela letra  $x$ . Calcule essa medida, em graus, usando a conclusão do item (d) do exercício 75.

- Se dois ângulos são tais que os lados de um são perpendiculares aos lados do outro, sendo ambos agudos ou ambos obtusos, então são ângulos de medidas iguais;
- Se dois ângulos são tais que os lados de um são perpendiculares aos lados do outro, sendo um agudo e outro obtuso, então são ângulos suplementares.

Peça aos alunos que anotem as respostas ao exercício 74 em seus cadernos.

Caso julgue oportuno, esclareça que, em Matemática, existem frases chamadas “teoremas” do tipo “se..., então...” ou que possam ser colocadas nesta forma, nas quais a expressão entre o “se” e o “então” denomina-se hipótese (a parte que representa o que se conhece, os dados da situação), enquanto que a frase após o “então” denomina-se tese (a parte que relaciona-se com a conclusão, o que se deduz da observação da hipótese, ou mesmo “demonstrando”). Se optar por esta abordagem, explore as respostas 74 (a) e (b) e diversas outras anteriores para exemplificar e mesmo solicitar aos alunos que destaquem as diversas hipóteses e teses delas.

Os exercícios a seguir objetivam a descoberta do fato: a soma dos ângulos (internos) de um quadrilátero é 360 graus. Além disso, fazem uma conexão geometria x álgebra.

75. a)  $x = 75^\circ$ ;  $y = 45^\circ$ ;  
b)  $120^\circ$ ;  
c)  $360^\circ$ ;  
d) Verdadeiro.

76. Desenhe a 1ª figura no quadro e escreva a soma das medidas dos ângulos:  
 $70^\circ + 35^\circ + 25^\circ + 110^\circ + 45^\circ + 75^\circ = 360^\circ$ .  
Desenhe a 2ª figura e escreva:  
 $75^\circ + 40^\circ + 2x = 360^\circ \Rightarrow$   
 $2x = 245^\circ \Rightarrow$   
 $x = 122,5^\circ = 122^\circ 30'$ .  
Resposta:  $122^\circ 30'$

**Professor(a):** Caso julgue necessário, explore mais outras atividades semelhantes às dos exercícios 75 e 76.

77. Primeiro terreno:  $60^\circ$ .  
 Segundo terreno:  $30^\circ$ .  
 Terceiro terreno:  $100^\circ$ .

Os exercícios a seguir visam descobrir a fórmula da soma dos ângulos internos de polígonos com 4, 5, 6 etc., número de lados e sua posterior generalização para um número  $n$  de lados.

No exercício 78, a soma dos ângulos do pentágono é igual à soma dos ângulos de um quadrilátero e dos ângulos de um triângulo; logo,  $360^\circ + 180^\circ = 540^\circ$ . Usando este resultado, obtém-se a soma dos ângulos do hexágono (pentágono + triângulo), e assim sucessivamente, em cada cálculo, aumentando-se de  $180^\circ$  a soma anterior.

Recomende ou explore a leitura de: A guinada de 360 graus.

Livro: "Polígonos, centopeias e outros bichos"  
 Nilson José Machado, Coleção Vivendo a Matemática, Editora Scipione

Explore o desenvolvimento do exercício 78 no quadro, calculando as somas dos ângulos dos polígonos como se fez no exercício 75, itens (a), (b) e (c).

78. a: Hexágono;  
 b: 4;  
 c:  $4 \times 180$  graus;  
 d: 6; e:  $6 \times 180$  graus.

79. (I) a:  $20 - 2 = 18$ ;  
 b:  $18 \times 180$  graus.

(II) "A soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados é igual a  $(n - 2) \cdot 180$  graus".

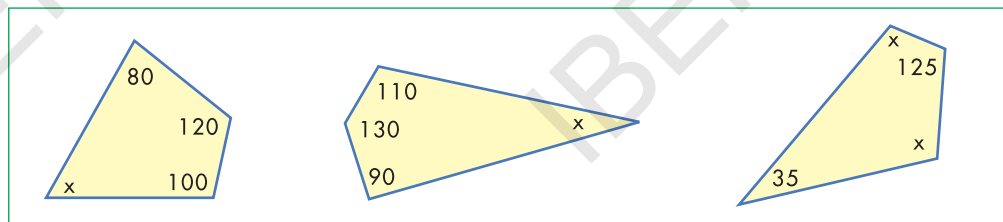
Proponha atividades para relembrar que ângulos alternos internos formados por paralelas e uma transversal têm medidas iguais (sexto ano, capítulo 1).

Lembre da observação da página 10.

**Professor(a):** Explore a noção de função, usando a fórmula da soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados,  $S_n = (n - 2) \cdot 180$  graus, propondo o cálculo da soma dos ângulos internos de vários polígonos, de preferência aqueles cujos nomes já aprenderam no ano anterior: quadrilátero, pentágono, etc.

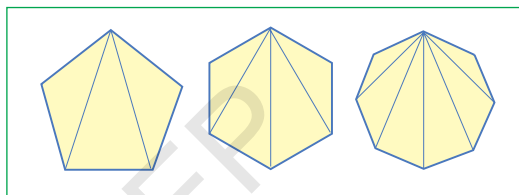
77. Altair mediu terrenos em forma de quadrilátero e deixou de medir alguns ângulos, representando as medidas correspondentes com um  $x$ .

Em cada caso, calcule a medida  $x$  em graus:



Muitas vezes, Altair tem que medir áreas nas quais vão ser construídas praças em forma de pentágonos, hexágonos etc. Conhecer a soma das medidas dos ângulos desses polígonos é uma boa ajuda para ele. Os exercícios a seguir vão possibilitar descobrir o valor dessas somas.

78. Observe que, nos polígonos ao lado, foram desenhadas, a partir de um vértice, todas as diagonais possíveis. Com isso, os polígonos foram decompostos em triângulos.



O pentágono da primeira figura foi decomposto em 3 triângulos. Logo, a soma de seus ângulos é  $3 \times 180^\circ$ .

Escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente cada letra entre parênteses a seguir:

O **a** da segunda figura foi decomposto em **b** triângulos. Logo, a soma de seus ângulos é **c**.

O octógono da terceira figura foi decomposto em **d** triângulos. Logo, a soma de seus ângulos é **e**.

79. Observe que:

- O pentágono foi decomposto em 3 triângulos ( $5 - 2 = 3$ ).
- O hexágono foi decomposto em 4 triângulos ( $6 - 2 = 4$ ).
- O octógono foi decomposto em 6 triângulos ( $8 - 2 = 6$ ).

(I) Escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente cada letra entre parênteses a seguir:

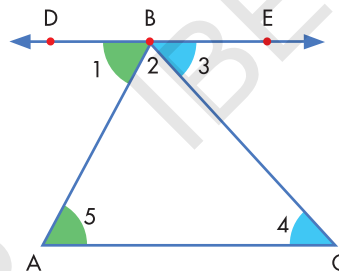
- Se um polígono tem 20 lados, ele pode ser decomposto em (a) triângulos; logo, a soma de seus ângulos é (b).

(II) Explorando os exemplos anteriores, discuta com seus colegas e faça uma proposta de como calcular a soma dos ângulos internos de um polígono de  $n$  lados. (Aqui,  $n$  representa qualquer número natural maior que ou igual a 3.)

80. Na figura a seguir, a semirreta DE é paralela à base AC do triângulo ABC.

Responda:

- Quanto mede, em graus, a soma dos ângulos 1, 2 e 3?
- Qual ângulo tem medida igual à medida do ângulo 3?
- Qual ângulo tem medida igual à do ângulo 1?
- Quanto mede a soma dos ângulos 2, 4 e 5 do triângulo?
- Justifique a resposta anterior.



O exercício 80 usa um novo recurso para a descoberta da soma dos ângulos de um triângulo.

80. a)  $180^\circ$ ;  
 b) Ângulo 4;  
 c) Ângulo 5;  
 d)  $180$  graus;  
 e) Vimos que a soma dos ângulos 1, 2 e 3 é  $180^\circ$ . Mas 1 e 5, bem como 3 e 4, têm medidas iguais; logo, a soma dos ângulos 5, 2 e 4 é  $180^\circ$ .

Peça aos alunos que justifiquem por que os ângulos 1 e 5 têm medidas iguais, bem como os ângulos 3 e 4.

Reveja, se necessário, os conceitos de: triângulo retângulo, triângulo acutângulo e triângulo obtusângulo.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do "Aprendendo em casa" para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

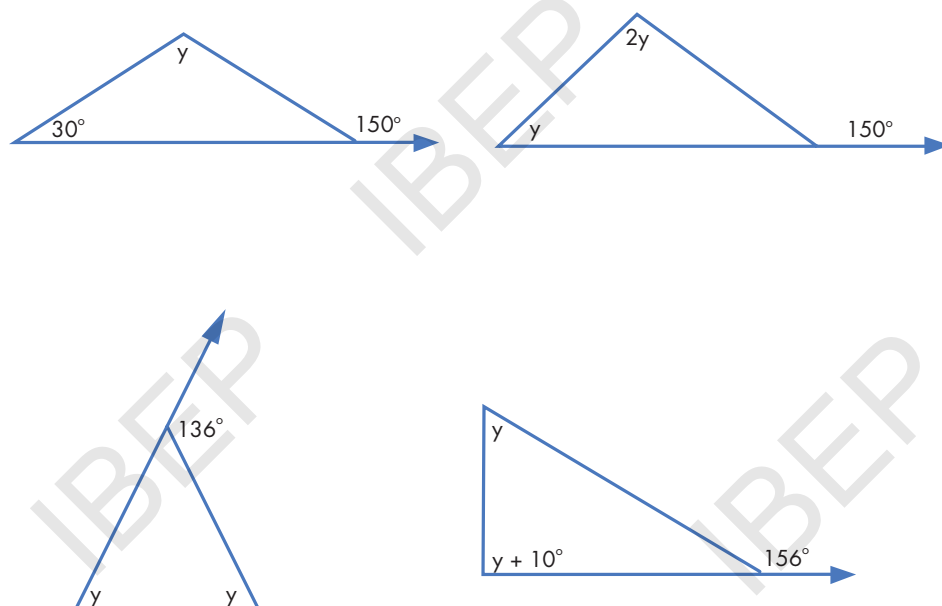
81. a)  $110^\circ$ ;  
 b) Obtusângulo.

## Aprendendo em casa

81. Dois ângulos de um triângulo medem  $30^\circ$  e  $40^\circ$ , respectivamente.

- Qual é a medida do terceiro ângulo?
- Esse triângulo é retângulo, acutângulo ou obtusângulo?

82. Nos quatro triângulos das figuras a seguir, existem ângulos com medidas representadas por letras. Comece calculando o valor de  $y$  em cada figura, em graus. Em seguida, calcule as medidas dos ângulos dos quatro triângulos.



82. 1ª figura:  $y = 120^\circ$ .  
 2ª figura:  $y = 50^\circ$ .  
 3ª figura:  $y = 68^\circ$ .  
 4ª figura:  $y = 73^\circ$ .  
 Ângulos  
 1ª figura:  $120^\circ, 30^\circ, 30^\circ$ .  
 2ª figura:  $30^\circ, 50^\circ, 100^\circ$ .  
 3ª figura:  $68^\circ, 68^\circ, 44^\circ$ .  
 4ª figura:  $73^\circ, 83^\circ, 24^\circ$ .

Peça aos alunos que justifiquem como efetuaram os cálculos do exercício 82.

Ver na página 11 observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

- B, C, D, E.
- BC, CD, DE, EA.
- Pentágono.

Peça aos alunos que anotem em seus cadernos a definição de polígono inscrito contida no enunciado do exercício 84.

Explore, no quadro, atividades relacionadas com o que se diz no quadro do exercício 84: ângulo central, arco maior, arco menor. Sugestões: a) Desenhe uma circunferência de centro  $X$  e um outro ponto  $Y$  no interior da mesma. b) Desenhe um ângulo  $PXQ$  e outro  $MYN$  e pergunte qual dos dois é ângulo central da circunferência. c) Explore o que caracteriza o fato de um ângulo ser chamado de ângulo central da circunferência: o vértice é o centro da circunferência. d) Identifique os pontos de interseção dos lados do ângulo  $PXQ$  com a circunferência e peça a um aluno que mostre, no desenho, o que ele entendeu como arco menor e arco maior. e) Peça a outro aluno que desenhe, em duas outras circunferências, um ângulo central agudo em uma delas e um ângulo central obtuso em outra delas. f) Peça que, usando letras convenientemente, escreva no quadro como se faz a leitura dos arcos maior e menor, correspondentes aos dois ângulos desenhados.

Peça aos alunos que anotem no caderno: A medida de um arco menor corresponde, em graus, à medida do ângulo central cujos lados passam por seus extremos. Assim, diz-se que o arco menor  $ARB$  da figura do exercício 84 mede 120 graus.

Pergunte: (a) Quanto mede um arco que corresponde a um ângulo central se este é um ângulo reto? (b) Quanto mede, em graus, o arco cujos extremos pertencem a um diâmetro da circunferência?

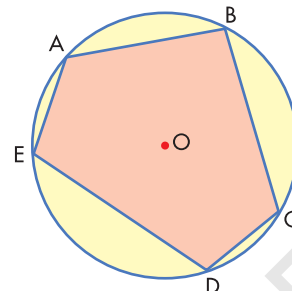
Peça aos alunos que anotem no caderno: Se o vértice de um ângulo é o centro de uma circunferência, dizemos que ele é um ângulo central desta circunferência.

Se necessário, reveja o conceito de polígonos regulares (capítulo 2 do sexto ano).

## Ângulos na circunferência e nos polígonos

### Explorando o que você já sabe

- Além do ponto  $A$ , diga o nome de quatro outros pontos que pertencem à circunferência.
- O segmento  $AB$  chama-se “corda” da circunferência. Dê os nomes de outras quatro cordas dessa circunferência.
- Qual é o nome do polígono formado por essas cordas?



### Aprendendo em sala de aula

#### 83. Verdadeiro ou falso:

- Se o segmento  $MN$  é corda de uma circunferência, então os pontos  $M$  e  $N$  pertencem à circunferência. **83. a) Verdadeiro.**
- Se os pontos  $S$  e  $T$  pertencem a uma circunferência, então o segmento  $ST$  é uma corda da circunferência. **b) Verdadeiro.**

#### 84. Se todos os lados de um polígono são cordas de uma mesma circunferência, dizemos que ele é um **polígono inscrito na circunferência**. Juliana disse que o pentágono da figura anterior é inscrito na circunferência. Você concorda com ela? Por quê?

O ângulo  $AOB$  da figura chama-se **ângulo central da circunferência**. Seus lados cortam a circunferência em dois pontos  $A$  e  $B$ , que dividem a circunferência em duas partes chamadas **arcos**.

Dizemos que  $A$  e  $B$  são extremos desses “arcos”.

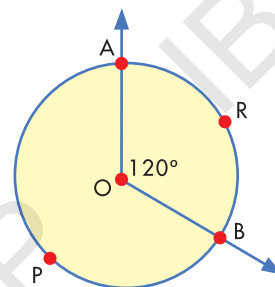
O arco ao qual o ponto  $R$  pertence chama-se “**arco menor**”. O outro, ao qual o ponto  $P$  pertence, chama-se “**arco maior**”.

As leituras desses arcos se fazem assim:

O arco menor: “arco  $ARB$ ”.

O arco maior: “arco  $APB$ ”.

**84.** A Juliana está correta ao dizer que o pentágono é inscrito na circunferência porque todos os lados desse pentágono são cordas dessa mesma circunferência.



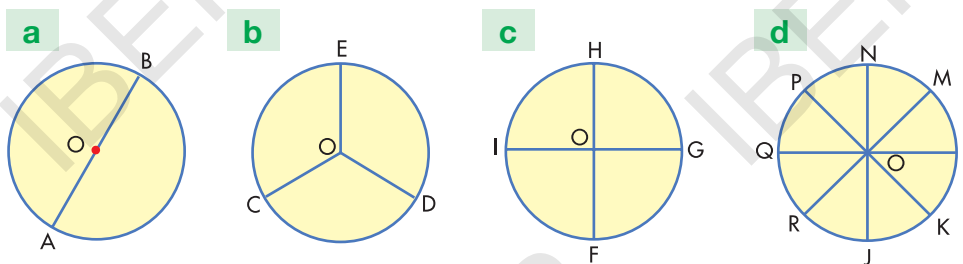
Circunferência de centro  $O$ .

#### 85. Observe a figura anterior e responda: **85. a) 120°;** **b) P.**

- Qual é a medida do ângulo central  $AOB$ ?
- Qual é a letra que representa o ponto que pertence ao arco maior da figura?



86. Observe as quatro circunferências de centro O das figuras a seguir e, em cada uma delas, considere que os ângulos centrais têm medidas iguais.



Na figura **a**, o segmento **AB** chama-se **diâmetro da circunferência**. Os pontos **A** e **B** são extremos de dois arcos que se chamam **semi-circunferências**.

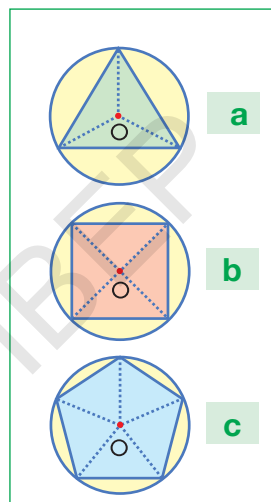
Responda:

- Quanto medem, em graus, os quatro ângulos centrais da figura **c**? Qual é a soma deles, em graus?
  - Quanto medem os oito ângulos centrais da figura **d**? Qual é a soma deles, em graus?
  - Que conta você deve fazer para calcular quanto mede cada um dos três ângulos centrais da figura **b**?
  - Quanto mede cada um desses três ângulos?
  - Se na figura **b** você desenhar as cordas CD, DE e EC, qual é o nome do polígono inscrito que você obterá?
  - Se na figura **c** você desenhar as cordas FG, GH, HI e IF, qual é o nome do polígono que você obterá? Por que ele é polígono inscrito?
87. Na figura **d** do exercício 86, os pontos P, J e L são vértices de um triângulo isósceles.
- Procure identificar outros triângulos isósceles na figura **d**.
  - Use um compasso para confirmar que eles são isósceles.

88. Observe os polígonos das figuras ao lado:

Considere que cada uma das figuras **a**, **b** e **c** está decomposta em ângulos centrais de mesma medida. Reveja, se necessário, o conceito de polígono regular. (Capítulo 2 – sexto ano).

- Por que esses polígonos chamam-se **polígonos regulares**?
- Como se chama cada um deles?
- Quanto medem, em graus, os ângulos centrais correspondentes à figura **c**?
- Se você for desenhar um hexágono regular, quantos ângulos centrais de medidas iguais você teria que desenhar? Qual seria a medida de cada um deles?



Esclareça que, em diversas situações a seguir, em um abuso de linguagem, falaremos de ângulos centrais de circunferências como aqueles sugeridos por raios ou diâmetros delas. Reproduza, no quadro, a figura **b** do exercício 86 e prolongue os raios OE e OD, obtendo as representações das semirretas de origem O, lados do ângulo EOD, para esclarecer que, ao nos referirmos ao ângulo central EOD, estamos cometendo o abuso de linguagem acima descrito.

86. a)  $90^\circ$ ; soma  $\Rightarrow 360^\circ$ ;  
b)  $45^\circ$ ; soma  $\Rightarrow 360^\circ$ ;  
c) Dividir  $360^\circ$  pelo número 3;  
d)  $120^\circ$ ;  
e) Triângulo equilátero;  
f) Quadrado. Ele é um polígono inscrito porque todos os vértices pertencem à circunferência (ou porque seus lados são cordas).

Observação: No item (f), estamos admitindo intuitivamente que o quadrilátero cujas diagonais são congruentes e perpendiculares entre si é o quadrado.

Explore situações que permitam aos alunos correlacionar os seguintes fatos:

Como os ângulos centrais de  $120^\circ$  correspondem a  $1/3$  de  $360^\circ$ , as respectivas cordas são lados de triângulos equiláteros inscritos.

Situações análogas para  $90^\circ$  e o quadrado inscrito,  $72^\circ$  (quinta parte de  $360^\circ$ ) e o pentágono regular inscrito, etc.

87. a) Triângulos NOL, NQL e NRK (possíveis respostas);  
b) NO e LO têm medidas iguais, NQ e NL têm medidas iguais; NR e NK têm medidas iguais.

88. a) Porque todos os seus lados têm medidas iguais, bem como seus ângulos;  
b) Triângulo equilátero, quadrado e pentágono, respectivamente;  
c)  $72^\circ$ ;  
d) 6; medida:  $60^\circ$ .

No exercício 88, estamos admitindo intuitivamente que, em uma mesma circunferência, a ângulos centrais congruentes correspondem cordas congruentes e, também, arcos congruentes.

89. a) São vistos três triângulos isósceles. Os seus ângulos centrais medem  $120^\circ$  cada um;

b) São vistos cinco triângulos isósceles. Os seus ângulos centrais medem  $72^\circ$  cada um;

c)  $108^\circ$  (se cada ângulo central mede  $72^\circ$  graus, a soma das medidas dos dois outros ângulos é igual a  $108^\circ$  graus). Como os ângulos na base de triângulos isósceles têm medidas iguais, cada um deles deve medir  $108 : 2 = 54^\circ$  graus. Observando que o pentágono é regular, conclui-se que o ângulo formado por dois lados consecutivos dele é a soma de dois ângulos cuja medida é  $54^\circ$  graus. Logo, cada ângulo do pentágono mede  $108^\circ$  graus.

Peça aos alunos que expliquem como resolveram os exercícios 89 (a) e 89 (b).

90. Desenho do aluno.

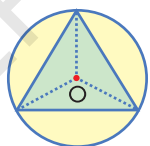
91. Desenho do aluno.

No nono ano, a construção do exercício 91 será justificada pelo caso LLL de congruência de triângulos.

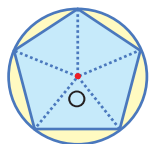
Sugira que os alunos exerçam duas vezes a atividade de desenhar ângulos de mesma medida: a primeira, desenhando ângulos agudos, e a segunda, ângulos obtusos. Depois, medindo com um transferidor, eles devem se convencer da validade do processo descrito.

Explore as aplicações dos polígonos regulares, principalmente nas artes, usando figuras retiradas de jornais, revistas ou quaisquer outras fontes que contenham partes formadas de polígonos regulares. Ótimas fontes para isso são as reproduções de diversos vitrais.

89. Observe as figuras a e b. Considere que, em cada uma delas, os ângulos centrais têm medidas iguais. Responda:



a



b

a) Quantos triângulos isósceles com um vértice em O são vistos na figura a? Qual é a medida dos ângulos centrais associados a cada um deles?

b) Quantos triângulos isósceles com um vértice em O são vistos na figura b? Qual é a medida dos ângulos centrais associados a cada um deles?

c) Calcule as medidas dos cinco ângulos internos do pentágono regular da figura b.

90. Observe como desenhar um segmento de mesma medida que um segmento AB:

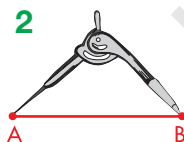
- Desenhe um segmento AB e uma reta PS.
- Com o centro no ponto A, abra o compasso com uma abertura igual à medida do segmento AB.
- Com o centro no ponto P, e sem modificar a abertura do compasso, descreva um arco de circunferência que corte a reta PS em um ponto Q.
- O segmento PQ tem a mesma medida do segmento AB.



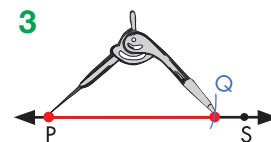
1



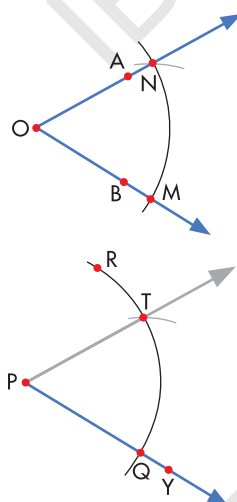
2



3



91. Observe como desenhar um ângulo TPQ de mesma medida que outro AOB, usando régua e compasso:



Desenhe uma semirreta PY.

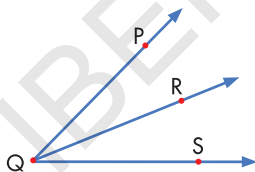
Com centro em O, descreva um arco de circunferência que corte os lados do ângulo AOB em M e N.

Sem alterar a abertura do compasso, descreva um arco com centro em P, que corte PY no ponto Q.

Com o compasso, meça a distância MN e, com o centro em Q, sem mudar a abertura do compasso, descreva um arco que corte o arco anterior em um ponto T.

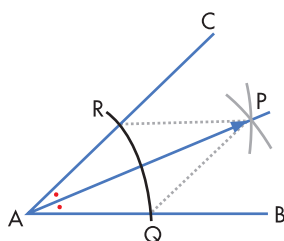
Desenhe a semirreta PT.

92. Observe as duas figuras a seguir. Responda, com base na primeira figura:



- Verifique, usando seu transferidor, que os ângulos **SQR** e **RQP** têm medidas iguais.
- Qual das três semirretas está contida no interior do ângulo **SQP**: **QS**, **QR** ou **QP**?
- Como se chama essa semirreta em relação ao ângulo?

Observe como construir a bissetriz do ângulo **BAC**, usando régua e compasso:



- Com o centro no vértice **A** do ângulo, descreve-se um arco de circunferência de raio qualquer até cortar os lados do ângulo nos pontos **R** e **Q**.
- Com o centro em **R** e depois em **Q**, descrevem-se dois arcos de raios iguais, que se cortam em um ponto **P**.
- Com a régua, desenha-se a semirreta **AP**, que é a bissetriz do ângulo **BAC**.

92. a) Atividade dos alunos;  
b) QR;  
c) Bissetriz do ângulo.

No nono ano, a construção do exercício 92 será justificada pelo caso LLL de congruência de triângulos.

93. Use o transferidor para verificar que os ângulos **BAP** e **PAC** na figura acima têm medidas iguais.

94. Use régua e transferidor e desenhe:

- Ângulos que medem  $60^\circ$ ,  $90^\circ$  e  $120^\circ$ .
- As bissetrizes desses ângulos.

93. Atividade dos alunos.

94. Desenhos dos alunos.

95. a) SOR, TON, POQ;  
b) PON, TOS;  
c)  $100^\circ$ .

#### ATIVIDADE EXTRA

Explicar como foi calculada a resposta (c). Como a soma, em graus, de todos os ângulos centrais é igual a 360, bastou subtrair de 360 a soma:

$(40 + 70 + 40 + 70 + 40)$ , ou seja,  $360 - 260 = 100$ .

Expressar, em porcentagem, a razão entre o menor e o maior dos ângulos centrais da figura.

R)  $40/100 = 40\%$ .

Associe a figura da roda com "giros". Exemplo:

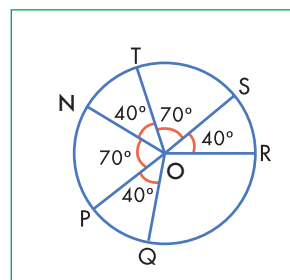
a) Girando  $90^\circ$  no sentido horário, onde irá parar o ponto C? R) Na posição do F. b) Girando no sentido horário, o ponto B parou na posição G. A quantos graus isto corresponde? R)  $150^\circ$ .

96. a) AOB, BOC;  
b) AOC, BOD;  
c) BOF, COG  
(ou outras respostas).

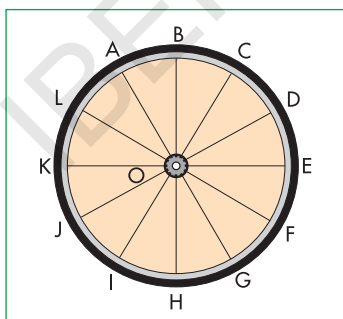
## Aprendendo em casa

95. Observe a circunferência de centro O.

- Dê os nomes de três ângulos centrais que medem  $40^\circ$ .
- Dê os nomes de dois ângulos centrais que medem  $70^\circ$ .
- Calcule a medida do ângulo central QOR.



96. Na figura a seguir, você vê um dos usos da circunferência: na fabricação das rodas. (Considere os doze ângulos centrais com medidas iguais.)

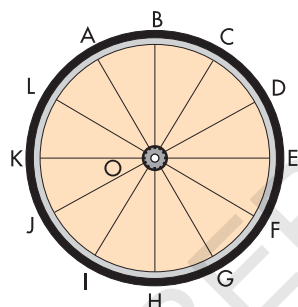


Dê o nome de dois ângulos centrais que medem:

- 30 graus.
- 60 graus.
- 120 graus.

97. Desenhando cordas de medidas iguais na figura, é possível obter figuras de polígonos regulares. Por exemplo, LB, BD, DF, FH, HJ e JL são lados de um desses polígonos. Como ele se chama? 97. Hexágono regular.

98. Dê os nomes dos polígonos regulares inscritos em uma circunferência cujos ângulos centrais correspondentes medem:



- a) 30 graus. 98. a) Dodecágono;  
b) 60 graus. b) Hexágono;  
c) 90 graus. c) Quadrado;  
d) 120 graus. d) Triângulo.

101. Desenho: Sejam cinco pontos A, B, C, D, E, vértices consecutivos de um pentágono. Uma solução possível é desenhar os segmentos AD e BE. Chamando o ponto de interseção desses segmentos de P, basta agora traçar o segmento PC.

No exercício 83, vimos que um segmento AB é corda de uma circunferência se e somente se os pontos A e B pertencem à circunferência. Desenhe no quadro uma circunferência de centro O e um diâmetro PQ da mesma, sem citar este nome. Pergunte como se chama esse segmento. Peça aos alunos que releiam o exercício 83 e depois decidam se são verdadeiras ou falsas as frases a seguir, justificando a resposta e, se necessário, fazendo desenhos complementares no desenho do quadro.

- a) Toda corda de uma circunferência é também diâmetro dela.  
b) Todo diâmetro de uma circunferência é também uma corda dela.

- a) Falsa. Nem toda corda passa pelo centro da circunferência.  
b) Verdadeira. Os extremos de qualquer diâmetro de uma circunferência pertencem a ela. Logo, qualquer diâmetro é também corda.

102. a) A, B, G, D, E;  
b) HD, HE, HG;  
c) AB, GD;  
d) GD;  
e) F, H;  
f) GHE, EHD.

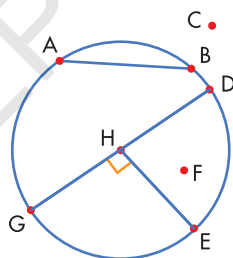
99. Usando a figura anterior, dê os nomes de cordas com um extremo comum, duas a duas, que representem a figura de:

- a) Um triângulo equilátero inscrito. 99. a) BJ, BF, FJ;  
b) Um quadrado inscrito. b) KB, BE, EH, HK;  
c) Um retângulo inscrito. c) DL, DF, JL, FJ;  
d) Um triângulo retângulo isósceles inscrito. d) BK, BE, KE;  
e) Dois triângulos retângulos inscritos que não sejam isósceles. e) CK, CE, KE, AK, AE, EK;  
f) Um trapézio isósceles inscrito. f) AC, CE, AK, KE.

(Ou outras respostas possíveis.)

100. Na figura anterior, quantos pontos pertencem à circunferência? Quantos diâmetros têm esses pontos como extremos? 100. Há 12 pontos que pertencem à circunferência e 6 diâmetros.

101. Um eletricista precisa conectar 5 pontos de luz não colineares com três pedaços de fios elétricos, de forma que a corrente passe por todos eles. Faça um desenho que represente essa situação, usando segmentos de reta para representar os pedaços de fio.



102. Observe a circunferência de centro H da figura ao lado, onde os pontos G, H e D estão alinhados, e resolva:

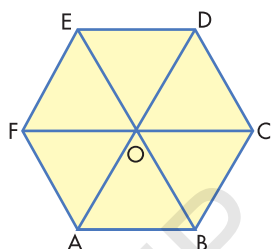
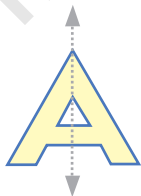
- a) Identifique cinco pontos que pertencem à circunferência.  
b) Identifique três raios.  
c) Identifique duas cordas.  
d) Identifique um diâmetro.  
e) Identifique dois pontos do interior da circunferência.  
f) Identifique dois ângulos centrais de 90 graus.



# Simetrias, dobraduras e suas aplicações

## Explorando o que você já sabe

Na primeira figura, a linha tracejada é um **eixo de simetria** da letra A.



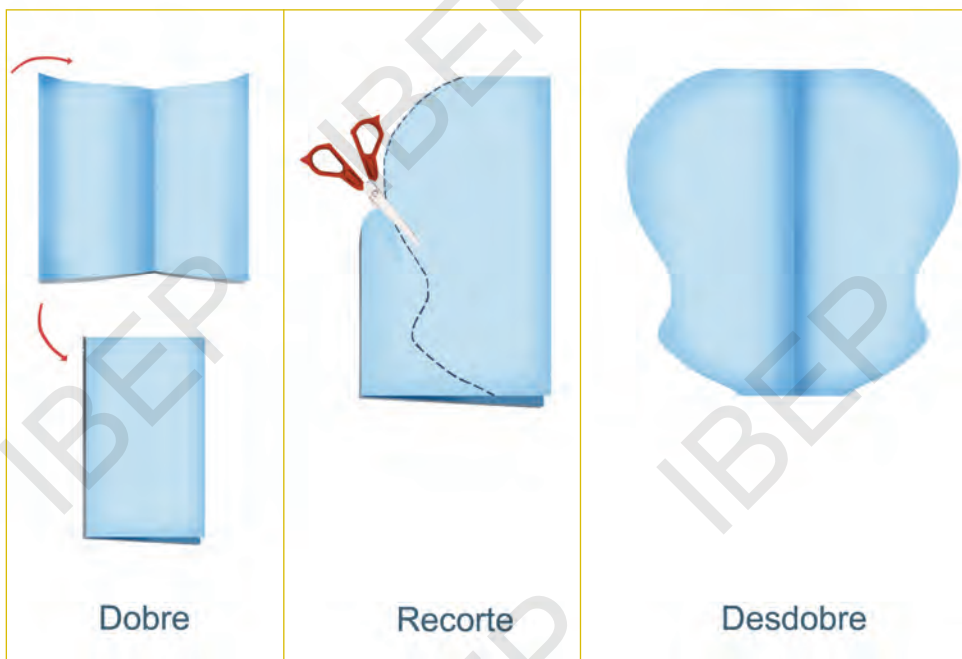
Responda, observando o **hexágono regular** da segunda figura:

- Os pontos D e F são simétricos em relação à reta EB?
- E e C, F e B são simétricos em relação a qual reta?
- Quantos eixos de simetria você vê na figura?
- Se desenharmos uma reta que passa por O e é perpendicular aos segmentos ED e AB, o que se pode dizer dessa reta?
- Na figura, estão desenhados três eixos de simetria. Quantos outros poderiam ser desenhados?

## Aprendendo em sala de aula

**103.** Observe como obter uma figura que tem um eixo de simetria, dobrando um papel e recortando-o:

103. Tarefa do aluno.



- Dobrem um pedaço de papel qualquer;
- Com uma tesoura, façam recortes em curvas, começando em um extremo da dobra e terminando no outro (sem recortar a dobra);
- Desdobrem. A dobra torna-se eixo de simetria da figura assim obtida.

Ver na página 11 observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

Esclareça que as simetrias são vistas constantemente no nosso dia a dia: nos pisos, nos revestimentos de fachadas, nas esculturas, nas pinturas, nos bordados, no artesanato, nos desenhos e nas formas de diversos objetos e até de animais (por exemplo, nas borboletas). Proponha que façam uma pesquisa sobre o desenho, do corpo humano, de Leonardo da Vinci. (Sugira os sites <http://www.drawingsofleonardo.org/> e [http://en.wikipedia.org/wiki/Leonardo\\_da\\_Vinci](http://en.wikipedia.org/wiki/Leonardo_da_Vinci)). Diga que ainda serão abordadas atividades sobre simetria neste ano e nos seguintes.

Explore ou sugira que explorem o site: <http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21s3.html>

Nele, são caracterizados e exibidos diversos modelos de simetrias em relação a um ponto, em relação a uma reta ou simetrias rotacionais.

Outro endereço interessante a recomendar: <http://www.atractor.pt/ujr/materiais-2005/simetria.pdf>.

### ATIVIDADES ORAIS

- Sim.
- DA.
- Três.
- É um dos eixos de simetria do hexágono.
- Três.

Explore mais as atividades anteriores pedindo, quando possível, justificativas das respostas. Opcionalmente, proponha verificações das simetrias utilizando medidas convenientes.

Observe que, para responder à penúltima pergunta das atividades orais, estamos usando intuitivamente que “se uma reta passa pelo centro de uma circunferência e é perpendicular a uma corda dessa circunferência, então essa reta é mediatriz dessa corda”.

Explore esse fato desenhando no quadro uma reta que satisfaz a hipótese da propriedade acima e verificando com um compasso a equidistância de qualquer ponto da reta aos extremos da corda.

Proponha aos alunos atividades análogas às que são vistas nas ilustrações do exercício 103, orientando-os na sequência:

Júlia Bianchi, 2006

104. a) A reta é perpendicular às bases;  
b) Os ângulos agudos vão se superpor, bem como os obtusos;  
c) Os ângulos agudos têm medidas iguais, bem como os ângulos obtusos.

Antes de explorar o exercício 105, use um papel retangular e escreva nos ângulos dos vértices as letras A, B, C e D, na frente e no verso. Depois, reproduza o que descreve o exercício 105, para melhor compreensão pelos alunos.

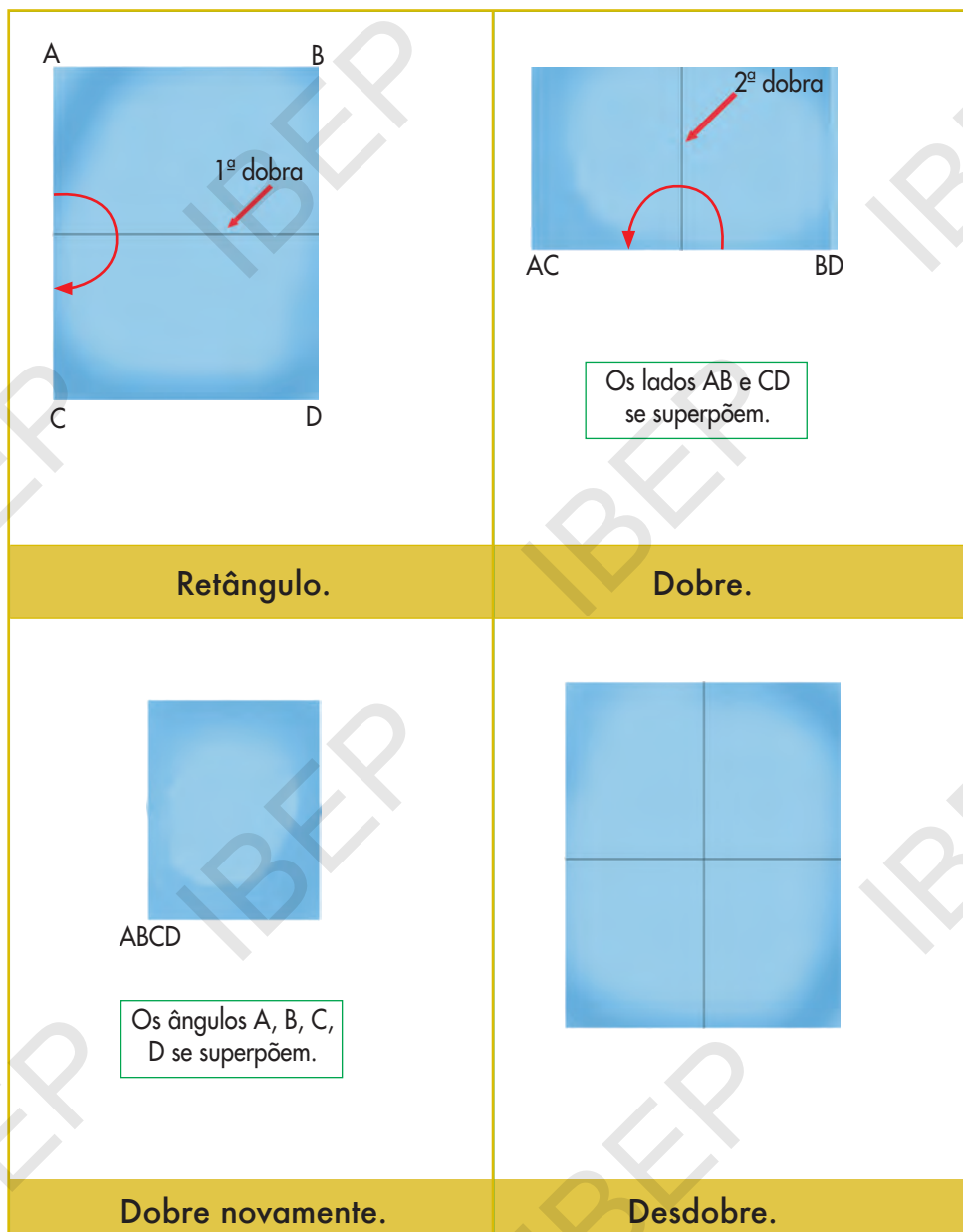
105. a) As medidas dos lados opostos do retângulo são iguais;  
b) As medidas dos quatro ângulos do retângulo são iguais.

Peça aos alunos que anotem, em seus cadernos, as frases (a) e (b) do exercício 105.

104. Desenhe um trapézio isósceles **ABCD** de bases **AB** e **CD**. Desenhe a reta que passa pelos pontos médios **M** e **N** dessas bases. Faça medidas de segmentos ou ângulos para responder:

- a) A reta que você desenhou é perpendicular às bases?  
b) Se dobrarmos na reta que você desenhou, alguns ângulos do trapézio vão se superpor. Quais são eles?  
c) Usando a superposição das partes, o que se pode concluir sobre as medidas dos ângulos internos desse trapézio?

105. Observe as **dobraduras do retângulo** a seguir:

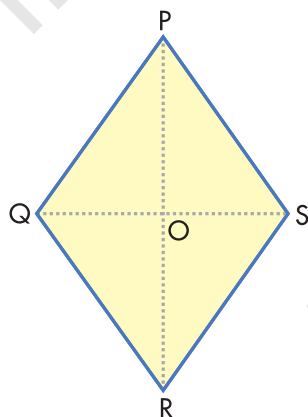


Júlia Bianchi, 2006

- a) Observando a primeira dobra, o que se pode dizer das medidas dos lados opostos do retângulo?  
b) Observando a segunda dobra, o que se pode dizer das medidas dos quatro ângulos do retângulo?

106. Desenhe um triângulo equilátero **ABC**. Procure, usando dobras, eixos de simetria. O que você concluiu?

107. Observe as **duas dobras** que Petrina fez no **losango** PQRS da figura e faça o que se pede:



- Use uma régua ou um compasso e compare as medidas OQ e OS.
- Proceda de modo análogo e compare as medidas OP e OR.
- Copie em seu caderno e complete: As diagonais do losango se cortam em seus...?...
- Use o transferidor e meça os ângulos formados pelas diagonais. Escreva a frase em seu caderno e complete: As diagonais do losango são...?...

106. Resposta esperada: existem 3 eixos de simetria, cada um deles passando por um dos vértices do triângulo e perpendicular ao lado oposto.

107. a) As medidas OQ e OS são aproximadamente iguais;  
b) As medidas OP e OR são aproximadamente iguais;  
c) As diagonais do losango se cortam em seus pontos médios;  
d) As diagonais do losango são perpendiculares entre si.

Peça aos alunos que anotem as respostas (c) e (d) do exercício 107 em seus cadernos.

Peça aos alunos que verifiquem que os ângulos QRO e SRO têm medidas aproximadamente iguais.

108. O que se pode dizer das diagonais do losango em relação aos ângulos do losango?

109. Observe as letras do primeiro quadro a seguir e as figuras do segundo quadro.

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J	K	L	M	N
1	2	3	4	5	6	7	8						
☆	🚗	◆	▼	✳	@	▪	◻						

108. As diagonais do losango são bissetrizes dos ângulos do losango.

Peça aos alunos que anotem essa frase em seus cadernos.

109. a) As letras B, C, D, E, H, I e M.  
b) O número 6.

- Quais letras do primeiro quadro têm, pelo menos, um eixo de simetria?
- Qual o número que corresponde à única figura do segundo quadro que não tem eixo de simetria?

110. Em cada caso, desenhe um triângulo que satisfaça a condição dada:

- Ter um único eixo de simetria.
- Ter três eixos de simetria.
- Não ter eixos de simetria.

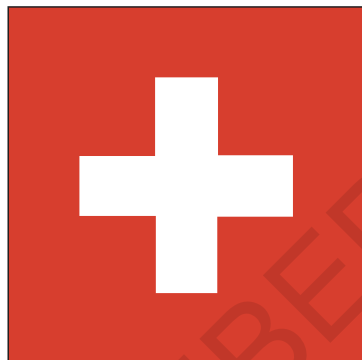
110. a) Triângulo isósceles;  
b) Triângulo equilátero;  
c) Triângulo escaleno.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

## Aprendendo em casa

111. Suíça  $\Rightarrow$  4 (retas: duas pelos pontos médios dos lados e duas retas contendo as diagonais; Áustria  $\Rightarrow$  2 (retas pelos pontos médios dos lados); Venezuela  $\Rightarrow$  1 (reta pelos pontos médios dos lados horizontais)).

III. Observe as bandeiras da Suíça, Áustria e Venezuela:



SUÍÇA



ÁUSTRIA



VENEZUELA

Quantos eixos de simetria tem cada uma delas?

112. Sim, os trapézios isósceles, que possuem um eixo de simetria. (Veja o exercício 104).

II2. Existem trapézios que têm um eixo de simetria? Se existem, como se chamam e quantos eixos de simetria tem cada um?

113. a) Paralelogramo que não seja retângulo, quadrado ou losango;  
b) Retângulo ou losango;  
c) Quadrado.

## Explorando o que você aprendeu e aprendendo mais

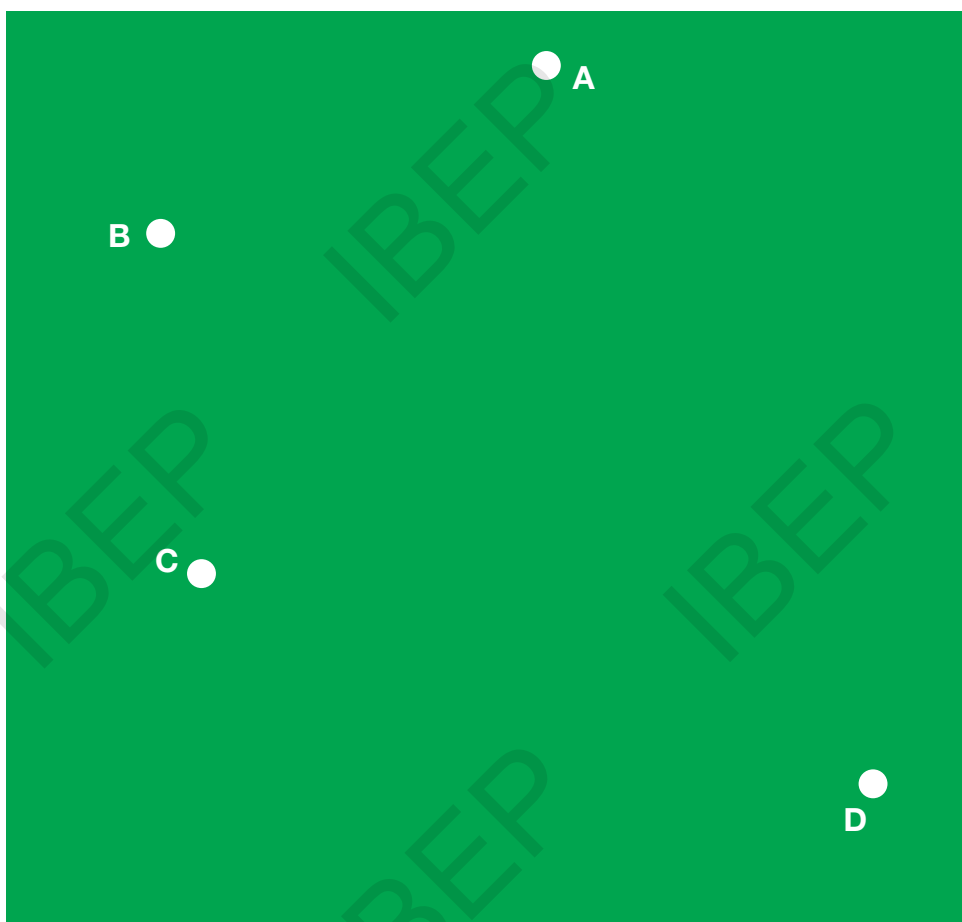
II3. Desenhe:

- a) Um paralelogramo que não tenha eixos de simetria.
- b) Um paralelogramo que tenha dois eixos de simetria.
- c) Um paralelogramo que tenha quatro eixos de simetria.



114. Um empresário quer construir um pequeno aeroporto para viajar a quatro cidades vizinhas que você vê representadas, no desenho a seguir, pelos pontos **A**, **B**, **C** e **D**:

- Ele quer que o aeroporto fique em um ponto tal, que a soma das distâncias dele às quatro cidades seja a menor possível.
- Copie o desenho em um papel, pense e descubra o ponto no qual ele deve construir o aeroporto. 114. A solução é o ponto de encontro das diagonais AC e BD.



### Desafio!

115. Desenhe um quadrilátero que não seja paralelogramo ou trapézio e que tenha um único eixo de simetria.
116. Marília disse que existe uma figura geométrica que tem infinitos eixos de simetria. Qual é essa figura?

116. A circunferência, porque qualquer diâmetro é eixo de simetria.

Recorde: em todo triângulo, cada lado é menor que a soma dos outros dois.

Esta propriedade justifica a resposta do exercício 114, pois permite demonstrar que qualquer outro ponto que não seja o ponto de encontro das diagonais não satisfaz a condição do exercício.

De fato, desenhe, usando os pontos A, B, C, D da figura, as diagonais AC e BD do quadrilátero ABCD. Chame de I o ponto de interseção de AC e BD. Considere, agora, um ponto X da diagonal AC (entre A e I, por exemplo). Como  $BX + XD > BI + ID = BD$ , e  $AX + XC = AC$ , temos que  $BX + XD + AX + XC > BD + AC$ . Raciocínio análogo para um ponto Y sobre a diagonal BD. Finalmente, se Z é um ponto que não pertence às diagonais, suas distâncias a B e D, bem como a C e A, são maiores que BD e AC.

Solução experimental: desenhe, em uma tábua, quatro pontos A, B, C, D, como na figura, e fixe, sobre cada um deles, um prego. Ligue com linhas coloridas A e C, B e D, formando as diagonais do quadrilátero ABCD. Fixe um quinto prego em um ponto E no interior de qualquer um dos quatro triângulos formados pelos segmentos de diagonais e um dos lados do quadrilátero ABCD. Ligue novamente, com linhas de outra cor, os pontos A e C, B e D, mas agora contornando o prego E. Compare os novos “caminhos” assim obtidos (ligando A e C, B e D) com os anteriores (diagonais) e verifique que são maiores (mesmo se usarmos apenas um desses novos caminhos; por exemplo, AEC).

Note que  $AC < AE + EC$  e  $BD < BE + ED$ .

Observação: raciocínio válido mesmo que E pertença a AC ou BD.

115. Basta desenhar um quadrilátero ABCD tal que  $AB = BC$ ,  $DA = DC$ , mas  $AB \neq AD$ .

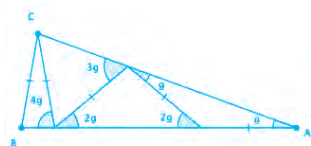
O eixo de simetria é BD.

Outra solução: um trapézio isósceles (o eixo de simetria é a mediatriz comum às bases paralelas).

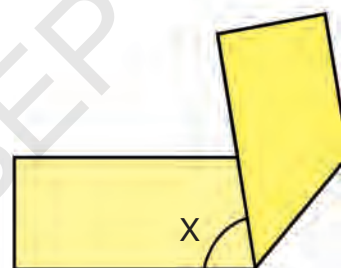
## Seção olímpica

1. 20°. **Professor(a):** Antecedendo a atividade revendo as propriedades: (a) Os ângulos da base de um triângulo isósceles têm medidas iguais; (b) A medida de cada ângulo externo de um triângulo é igual à soma dos ângulos internos do triângulo não adjacente ao ângulo.

Chame de  $g$  a medida de  $\angle BAC$ . Usando os fatos revisados (a) e (b), mostra-se que  $\angle CBA = \angle BCA = 4g$  (veja na figura abaixo), donde  $g + 4g + 4g = 180^\circ$ , ou seja,  $g = 20^\circ$ .

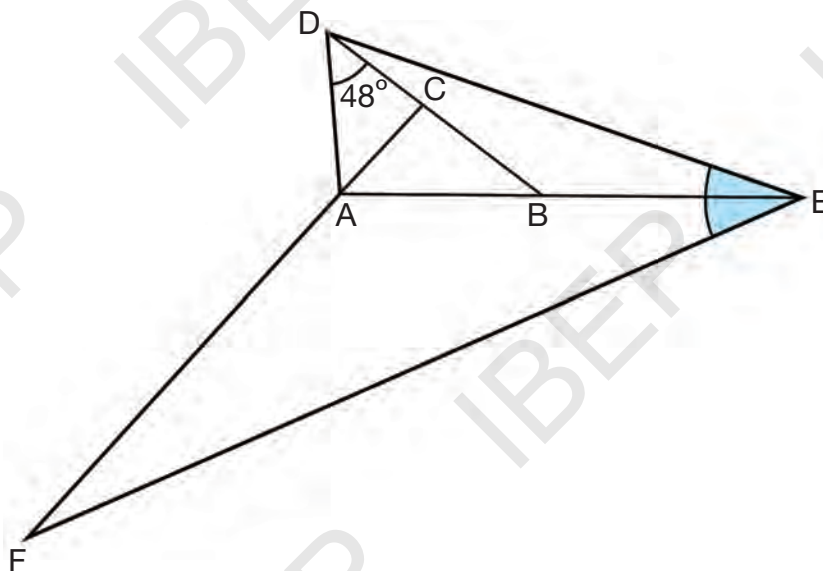


2. Observando a figura da fita dobrada vemos que  $x + 50^\circ + 50^\circ = 180^\circ$ , de onde  $x = 80^\circ$ .

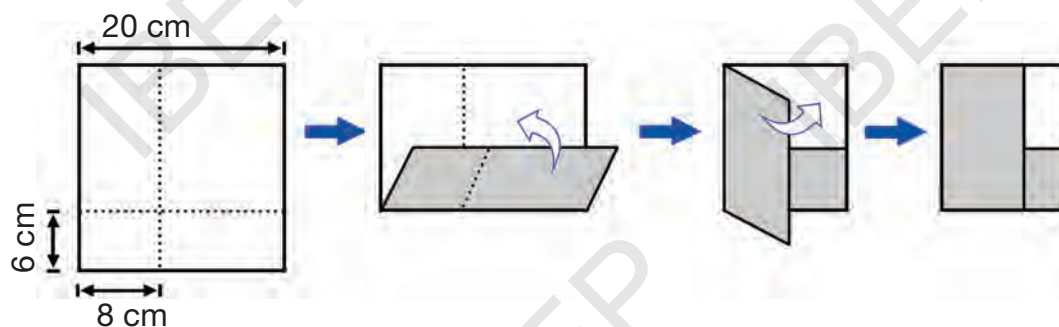


3.  $\angle DEF = 42^\circ$

3. (OBMEP 2008) Na figura o ângulo  $\angle ADC$  mede  $48^\circ$  e os triângulos  $\triangle ACD$ ,  $\triangle DBE$  e  $\triangle EAF$  são isósceles de bases  $AD$ ,  $DE$  e  $EF$ , respectivamente. Quanto mede o ângulo  $\angle DEF$ ?

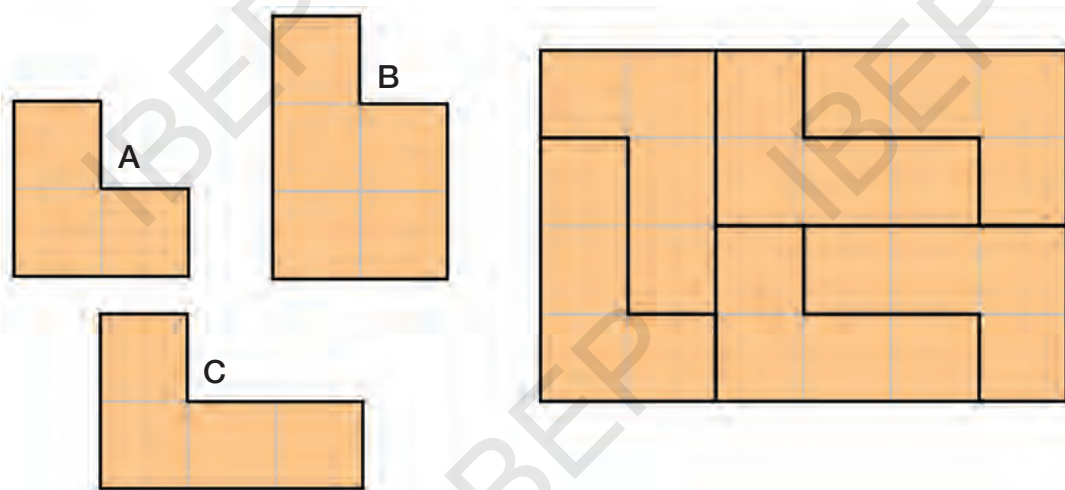


4. (OBMEP 2010) Um quadrado de papel de 20 cm de lado, com a frente branca e o verso cinza, foi dobrado ao longo das linhas pontilhadas, como na figura. Qual é a área da parte branca que ficou visível?

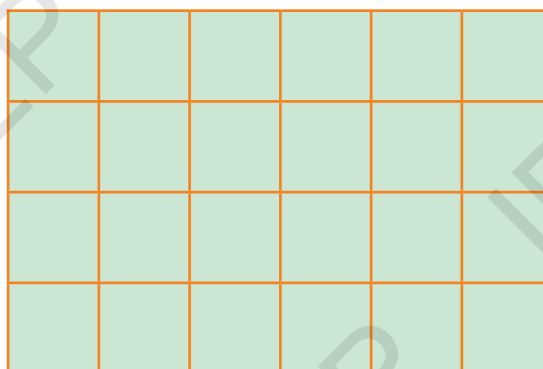


5. (OBMEP 2012) Pedro brinca com um tabuleiro quadriculado 4 x 6 e com peças dos tipos A, B e C. Ele tenta cobrir inteiramente o tabuleiro com as peças, encaixando-as sem que nenhuma fique sobre outra. Por exemplo, usando somente peças do tipo C, ele consegue cobrir o tabuleiro, como indicado na figura.

5. a) e b) Há várias formas de cobrir.  
c) Cada peça B cobre de uma vez 5 casas, mas o tabuleiro possui 24 casas, que não é múltiplo de 5.



- a) Copie em seu caderno o tabuleiro abaixo e mostre como Pedro pode cobri-lo usando somente peças do tipo A.

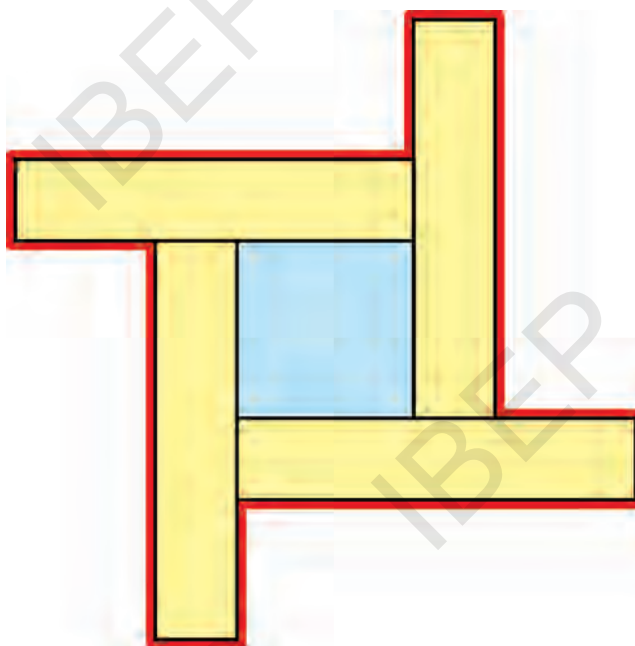


b) Agora, copie outro tabuleiro como o da página anterior, em seu caderno, e mostre como Pedro pode cobri-lo com peças do tipo A e B, usando uma ou mais peças do tipo B.

c) Explique por que não é possível cobrir o tabuleiro usando somente peças do tipo B.

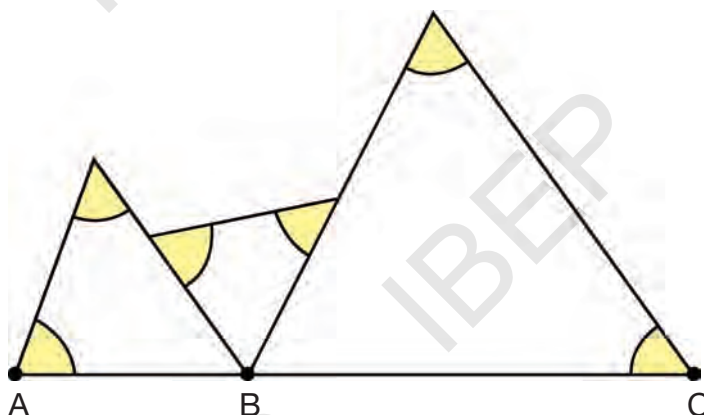
6. 280 cm

6. (OBMEP 2014) Juntando, sem sobreposição, quatro ladrilhos retangulares de 10 cm por 45 cm e um ladrilho quadrado de lado 20 cm, Rodrigo montou a figura abaixo. Com uma caneta vermelha, ele traçou o contorno da figura. Qual é o comprimento desse contorno?



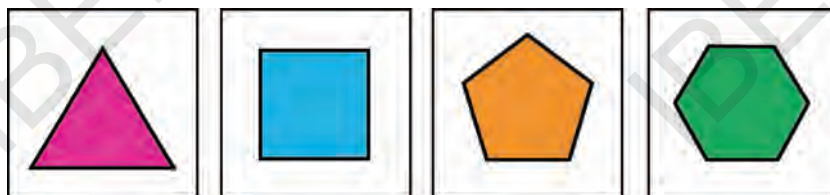
7. 360°

7. (OBMEP 2014) Na figura, os pontos A, B e C estão alinhados. Qual é a soma dos ângulos marcados em amarelo?

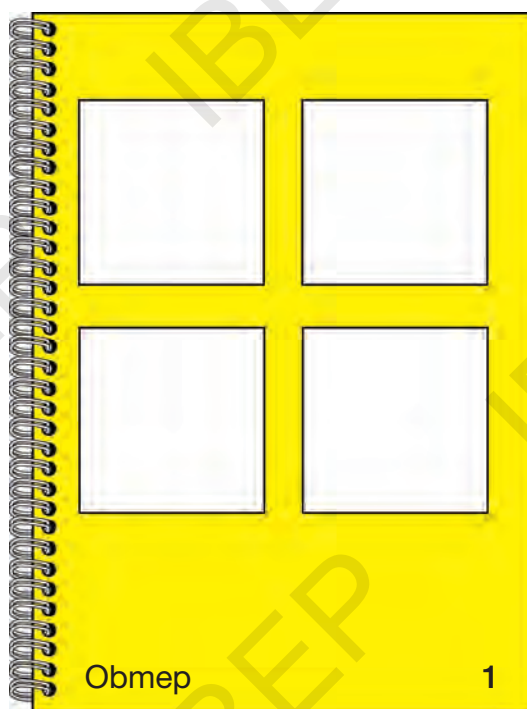








8. (OBMEP 2014) Rosa tem quatro cartões quadrados e cada um deles apresenta um polígono regular diferente, de 3 a 6 lados, como mostrado na ilustração.



Ela quer colar esses cartões nos quatro espaços disponíveis da primeira página de um álbum como o ilustrado abaixo.



Dependendo de como ela cola o cartão, as figuras podem ser vistas de maneiras diferentes. Por exemplo, girando o cartão com o triângulo, ele

pode ser visto de quatro maneiras diferentes ( , , ,  ); já

o quadrado só pode ser visto de uma única maneira (  ).

- De quantas maneiras diferentes o pentágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?
- De quantas maneiras diferentes o hexágono pode ser visto quando colado em um dos espaços do álbum?
- De quantas maneiras diferentes Rosa pode colar os quatro cartões nos quatro espaços da primeira página do álbum?

8. a) 4  
b) 2

c) O triângulo pode ser colocado de 4 maneiras distintas em 4 posições; fixado o triângulo, o quadrado pode ser colocado em 3 posições. O pentágono terá então 2 posições e 4 maneiras em cada posição, e o hexágono, uma posição de duas maneiras. Assim, as maneiras distintas de dispor as figuras são  $(4 \times 4) \times (3 \times 1) \times (2 \times 4) \times (1 \times 2) = 768$ .

REVISÃO – Professor(a), A seu critério, proponha e verifique se os alunos utilizam ou executam com compreensão algumas ou todas as atividades a seguir:

Interpretar perspectivas, fachadas e plantas baixas de casas ou edifícios, explorando medidas, escalas, desenhos de partes de plantas baixas dadas as dimensões e escalas.

Usar as peças do tangram para identificar figuras representadas pelas peças, ou para formar figuras geométricas com diversas peças usando criatividade ou propostas de formação de figuras pré-estabelecidas.

Observando figuras, identificar suas partes como figuras espaciais conhecidas.

Associar as formas de objetos do dia a dia com as formas das figuras geométricas usuais.

Medir ou desenhar ângulos usando o transferidor.

Identificar ou desenhar ângulos adjacentes, opostos pelo vértice e resolver problemas relacionados com os mesmos.

Resolver problemas relacionados com medidas de ângulos internos ou ângulos externos de diversos polígonos.

Resolver problemas relacionados com ângulos de lados paralelos ou ângulos de lados perpendiculares entre si.

Resolver problemas que envolvem medidas representadas por letras.

Descobrir propriedades de lados e ângulos de paralelogramos usando propriedades dos triângulos, das paralelas, das perpendiculares ou usando dobraduras e simetrias.

Resolver problemas relacionados com arcos, cordas, ângulos centrais, polígonos inscritos.

Desenhar segmentos de medidas iguais, ângulos de medidas iguais, bissetrizes de ângulos.

#### A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS:

Em diversas atividades, são propostas aos alunos resoluções de problemas.

Ao explorar tais propostas, sempre que possível, enfatize:

O desenvolvimento de estratégias de resolução com base em etapas que os levem a analisar o que se conhece, o que se quer conhecer, quais conhecimentos podem ser usados na solução.

A elaboração das estratégias, realizando simulações, formulando hipóteses, fazendo tentativas, analogias, estimativas, interpolações.



## Verifique se você aprendeu

Se ainda tem dúvidas sobre	Reveja os exercícios
Faces, arestas e vértices.	1, 10.
Nomes de polígonos e das figuras espaciais.	3, 14, 15.
O significado de fachada, planta baixa e perspectiva.	4, 5, 6.
Como resolver problemas usando o Tangram.	7, 8, 9.
Horizontais e verticais, paralelas e perpendiculares.	1, 2, 10.
Como resolver problemas com valores monetários.	11.
Planificações ou identificação de figuras.	12, 14, 15, 16, 18.
Como resolver problemas sobre comprimentos.	13, 17, 114.
Como identificar, comparar ou classificar ângulos.	19, 45, 46, 51.
Como medir ângulos com transferidor.	20 a 25, 47, 48, 93.
Ângulos complementares e ângulos suplementares.	26 a 30.
Ângulos adjacentes e ângulos opostos pelo vértice.	31 a 40, 32.
Ângulos de lados paralelos.	43, 44, 57, 59.
Ângulos e lados de polígonos.	58 a 64.
Como resolver problemas com medidas de ângulos.	41, 42, 43 a 52.
Como desenhar ângulos de medidas iguais, segmentos de medidas iguais e bissetrizes, usando régua, transferidor ou papel quadriculado.	53 a 58.
Ângulos internos e ângulos externos nos polígonos e suas propriedades.	64 a 72, 75 a 82.
Propriedades de ângulos de lados perpendiculares.	73, 74.
Cordas, ângulos centrais, raios, pontos interiores.	83, 85, 86, 89, 95, 96, 100, 102.
Polígonos inscritos em uma circunferência.	84, 99.
Polígonos regulares inscritos e seus ângulos centrais.	87, 88, 97, 98, 99.
Como construir segmentos de mesma medida.	90, 97.
Como construir ângulos de mesma medida.	91, 94.
Como construir a bissetriz de um ângulo.	92, 93, 94.
Eixos de simetria.	103.
Figuras simétricas em relação a uma reta (eixo de simetria).	104, 105, 106, 107, 109.
Simetria e propriedades de paralelogramos.	103 a 108.
Simetrias em bandeiras.	111.
Figuras com e figuras sem simetrias.	112, 113, 115, 116.

Explorar: o uso de desenhos, tabelas, organogramas, regularidades, os diferentes caminhos para obter a solução, contraexemplos, validação dos procedimentos.

Descrever a(s) estratégia(s) usada(s). Expressar as respostas coerentemente com as perguntas. Transformar o problema em novos problemas.

Professor(a): Leia a observação da página 22 (Sugestão sobre verificação da aprendizagem).

# CAPÍTULO 3

Frações, decimais e o dia a dia

Anton Starkov / Dreamstime.com



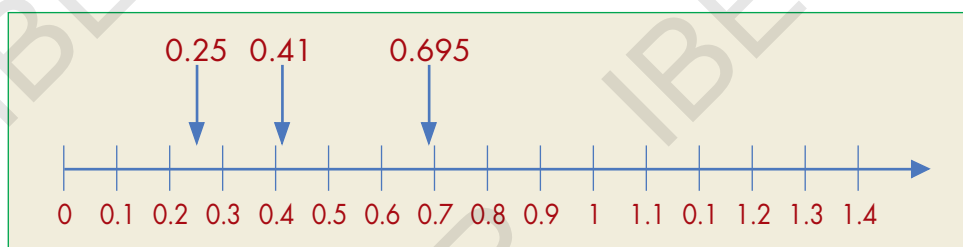
Ao lado, explicitamos os objetivos gerais do capítulo. Sugerimos um breve comentário sobre os mesmos, utilizando as ilustrações da página.

**Professor(a):** Neste e em outros capítulos, são exploradas diversas situações para que os alunos “descubram”, a partir de casos particulares, propriedades de números, de figuras, regras de cálculos etc. É extremamente importante que, após estas “descobertas”, sejam feitas observações afirmando que tais conclusões são verdadeiras (e, eventualmente, provar estes fatos) para que não fique a falsa ideia de que, a partir de poucos casos particulares, é possível generalizar. Sempre que possível, use expressões algébricas para expressar tais generalizações, bem como de algumas regularidades relacionadas com sequências numéricas.

## Você já resolveu alguns problemas com frações e decimais. Neste capítulo, você vai aprender como:

- Resolver outros problemas com frações e decimais, usando figuras para facilitar a compreensão e o raciocínio.
- Comparar valores de frações ou de decimais, decidindo se são iguais ou identificando qual é o maior (ou o menor).
- Identificar ou dar exemplos de frações equivalentes, usando a propriedade do “produto cruzado”.
- Simplificar frações, usando o m.d.c. dos termos ou divisões sucessivas.
- Reduzir frações ao mesmo denominador, usando o m.m.c.
- Somar ou subtrair frações de denominadores diferentes.
- Multiplicar ou dividir frações.
- Calcular expressões com potências de frações.
- Escrever números como produto de um número por uma potência de dez.
- Representar, de duas maneiras diferentes, a soma de um número natural com uma fração.

A	B	A + B	A - B	A × B	A : B	A <sup>2</sup>	A <sup>3</sup>
$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{5}$	a	b	c	d	e	f

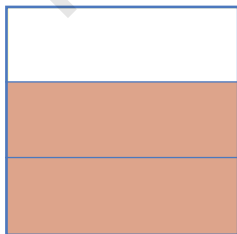




## Aprendendo mais sobre frações

### Explorando o que você já sabe

Observe a figura e responda:



- Em quantas partes iguais está dividida a figura?
- Quantas dessas partes estão coloridas?
- Que fração da figura representa essa parte colorida?
- Qual é o numerador dessa fração?
- Qual é o denominador dessa fração?
- Que fração representa toda a figura?

### Aprendendo em sala de aula

1. Leia o problema a seguir:

Paula gastou  $\frac{3}{10}$  do que tinha na compra de uma camisa e  $\frac{5}{10}$  na compra de um relógio, ficando ainda com R\$ 60,00.

Quanto Paula possuía inicialmente?

Quanto custou cada objeto?

Antes de resolvê-lo, responda:

- Que conta se faz para saber qual é a fração que representa o preço pago pelos dois objetos?
- Que fração representa quanto Paula possuía inicialmente?
- Que conta se faz para saber qual é a fração que representa a quantia que restou para Paula, após as compras?
- Se  $\frac{2}{10}$  de certa quantia equivalem a 60 reais, a quanto equivale  $\frac{1}{10}$  dessa mesma quantia?
- Se conheço a quanto equivale  $\frac{1}{10}$  de certa quantia, como calculo o valor dela?
- E como calculo  $\frac{3}{10}$  e  $\frac{5}{10}$  dessa quantia?

Agora, resolva o problema. (Não se esqueça de escrever as respostas.)

Ver na página 11 observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

É conveniente anteceder o estudo desta seção recordando:

- como somar ou subtrair frações de denominadores iguais;
- como multiplicar ou dividir frações;
- como somar, subtrair, multiplicar ou dividir decimais.

- 3.
- 2.
- $\frac{2}{3}$ .
- 2.
- 3.
- $\frac{3}{3}$ .

Lembre-se de usar, ao máximo, a representação das grandezas e suas partes fracionárias por desenhos, como na figura anterior.

Para resolver os exercícios a seguir, utilize o “método de redução à unidade”. “Se conheço  $a/b$  de certa quantia, calculo  $1/b$  dividindo o valor por  $a$  e depois multiplico por  $b$ , encontrando  $b/b$  (que representa toda a quantia).” Depois, torna-se fácil calcular qualquer outra fração  $c/d$  da quantia.

- $\frac{3}{10} + \frac{5}{10}$ ;
- $\frac{10}{10}$ ;
- $\frac{10}{10} - (\frac{3}{10} + \frac{5}{10})$ ;
- 30 reais;
- Multiplico o valor de  $\frac{1}{10}$  da quantia por 10;
- $\frac{3}{10} \Rightarrow$  Divido o valor da quantia por 10 e, posteriormente, multiplico por 3.
- $\frac{5}{10} \Rightarrow$  Divido o valor da quantia por 10 e, posteriormente, multiplico por 5.

#### Respostas:

Paula possuía, inicialmente, R\$ 300,00. A camisa custou R\$ 90,00 e o relógio, R\$ 150,00.

Recomende ou explore a leitura de:

“Frações sem mistérios” (p.5-13)

Luzia Faraco Ramos  
Coleção A descoberta da Matemática  
Editora Ática

2. a) 8;

b) 24 estudantes.

Use o método de redução à unidade. Se  $\frac{2}{3}$  equivalem a 16,  $\frac{1}{3}$  equivale a 8 e  $\frac{3}{3}$  (total da turma) equivalem a 24.

Peça aos alunos que justifiquem os raciocínios desenvolvidos para resolver os exercícios de 3 a 5.

3. R\$ 540,00.

Primeiro, calculei  $\frac{1}{4}$  dividindo:  $720 : 4 = 180$ .

Depois, calculei  $\frac{3}{4}$  multiplicando:  $180 \times 3 = 540$ .

4. R\$ 428,00.

Primeiro, calculei  $\frac{1}{4}$  dividindo:  $321 : 3 = 107$ .

Depois, calculei  $\frac{4}{4}$ , multiplicando:  $4 \times 107 = 428$ .

5. a) 250 metros quadrados;

b) 160/400.

Primeiro, calculei  $\frac{1}{8}$  dividindo:  $400 : 8 = 50$ . Depois, calculei  $\frac{5}{8}$  multiplicando:

$50 \times 5 = 250$ . Esclareça para os alunos que, no exercício 15, vão aprender a simplificar frações como 160/400 usando o m.d.c. dos termos.

6. Não. Para representar a fração  $\frac{1}{3}$ , as três partes nas quais está dividido o segundo triângulo deveriam ser equivalentes, isto é, ter a mesma área. A parte colorida do segundo triângulo é muito maior que as outras duas.

Promova uma discussão entre os alunos, perguntando se alguém sugere um triângulo particular que permita representar a fração  $\frac{1}{3}$ . Sugira tentativas. Uma solução possível é o triângulo equilátero dividido em três partes iguais pelos segmentos de medianas; cujos extremos são os vértices do triângulo e o ponto de interseção das medianas.

7. R\$ 280,00.

2. Dois terços dos estudantes da turma Z são alunas. Responda:

a) Se o total de alunas é 16, quantos são os alunos?

b) Quantos estudantes tem a turma Z?

3. Teodoro deseja comprar um televisor. Para isso, tem que gastar  $\frac{3}{4}$  do que possui: R\$ 720,00. Qual é o preço do televisor que Teodoro quer comprar?

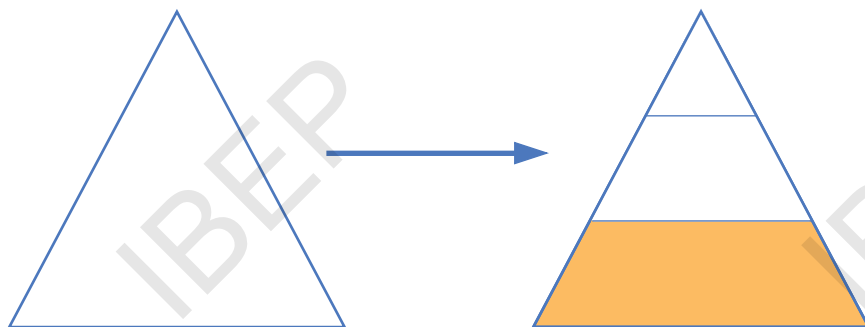
4. Luciana quer comprar um videocassete, mas possui apenas  $\frac{3}{4}$  do preço: R\$ 321,00. Qual é o preço do videocassete?

5. Em uma horta que ocupa 400 metros quadrados,  $\frac{5}{8}$  das plantações são de tomates.

a) Qual é a área ocupada pela plantação de tomates?

b) Se no próximo ano for utilizada uma área de 160 metros quadrados para a plantação dos tomates, qual fração da área total da horta será utilizada para isso?

6. O professor pediu para Neobaldo representar a fração  $\frac{1}{3}$ , e Neobaldo fez o desenho a seguir:



Se o triângulo da esquerda representa um inteiro, o desenho da direita feito por Neobaldo representa corretamente a fração  $\frac{1}{3}$ ? Justifique sua resposta.

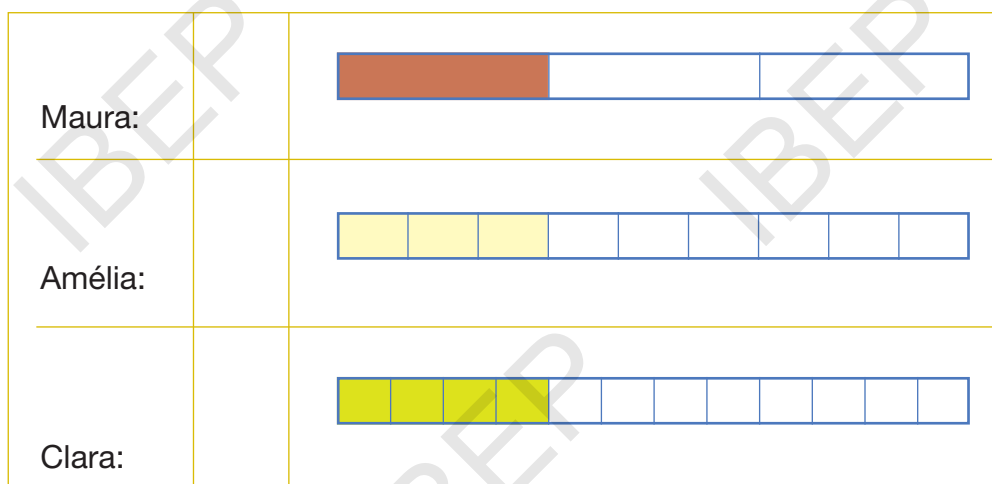
7. A quarta parte do que possuo equivale a R\$ 350,00. Calcule a quinta parte do que possuo.

## 8. Fazendo estimativas:

Escreva, para cada fração a seguir, de qual número ela é mais próxima: zero,  $\frac{1}{2}$ , 1 ou 2. Justifique suas respostas. (Sugestão: use a reta numerada.)

a) $\frac{4}{7}$	d) $\frac{13}{12}$	g) $\frac{4}{10}$
b) $\frac{8}{9}$	e) $\frac{5}{11}$	h) $\frac{1}{10}$
c) $\frac{2}{15}$	f) $\frac{17}{9}$	i) $\frac{19}{10}$

## 9. Maura, Amélia e Clara compraram, cada uma, um pacote de pão de forma. Os pacotes eram de mesmo tamanho. As três partes coloridas das figuras a seguir representam a parte de cada pacote que elas comeram:



- Escreva as frações que representam a parte do pacote que cada uma delas comeu.
- Elas comeram quantidades iguais ou diferentes?
- As frações do item (a) representam quantidades iguais ou diferentes?
- Como se chamam frações que representam quantidades iguais?

## 10. Observe as frações equivalentes do exercício anterior: $\frac{1}{3}$ , $\frac{3}{9}$ , $\frac{4}{12}$ . Agora, responda:

- Para se obter a fração  $\frac{3}{9}$  a partir da fração  $\frac{1}{3}$ , devemos multiplicar o numerador e o denominador por um mesmo número. Qual?
- Como se pode obter a fração  $\frac{1}{3}$  a partir da fração  $\frac{4}{12}$ ?

Faça desenhos para que os alunos descubram alguns fatos:

- Frações são tanto mais próximas de  $\frac{1}{2}$  quanto mais próximo da metade do denominador seja o numerador;
- Frações são tanto mais próximas de 1 quanto mais próximo do denominador for o numerador;
- Frações são tanto mais próximas de 2 quanto mais próximo do dobro do denominador for o numerador;
- Frações são tanto mais próximas de zero quanto maior for a diferença entre seu denominador e seu numerador (se o denominador for maior que o numerador).

8. a)  $\frac{1}{2}$ ;  
b) 1;  
c) Zero;  
d) 1;  
e)  $\frac{1}{2}$ ;  
f) 2;  
g)  $\frac{1}{2}$ ;  
h) Zero;  
i) 2.

Sugestões: a)  $\frac{4}{7} = \frac{8}{14}$ , que é próximo de  $\frac{7}{14} = \frac{1}{2}$ ; b)  $\frac{8}{9}$  é próximo de  $\frac{9}{9} = 1$ ; c)  $\frac{2}{15} = \frac{4}{30}$  (na reta numerada,  $\frac{2}{15}$  fica muito mais próximo do zero do que da fração  $\frac{1}{2}$ , que equivale a  $\frac{15}{30}$ ). Demais itens, justificativas análogas.

Reveja, se necessário, os conceitos de frações equivalentes (representam a mesma parte de uma mesma grandeza) e de números primos entre si (números que têm um único divisor comum: o um).

9. a) Maura:  $\frac{1}{3}$ ; Amélia:  $\frac{3}{9}$ ; Clara:  $\frac{4}{12}$ ;  
b) Quantidades iguais;  
c) Quantidades iguais;  
d) Frações equivalentes.

10. a) 3;  
b) Dividindo o numerador e o denominador pelo número 4.

**Professor(a):** Explore, no quadro, mais situações como as sugeridas pelos exercícios 9 e 10.

Se julgar necessário, explore exercícios análogos aos, de números 79 a 82 do capítulo 2 do sexto ano, relacionados com frações equivalentes.

11. a) Sim. Porque representam a mesma parte de uma mesma grandeza. (Ou: Porque, dadas duas delas, seus “produtos cruzados” são iguais);  
 b)  $\frac{2}{3}$ ;  
 c) 2;  
 d)  $\frac{10}{15}$ ;  $\frac{12}{18}$ ;  
 e) Verdadeiro;  
 f)  $\frac{6}{9}$  e  $\frac{8}{12}$ .

Escreva, no quadro, algumas igualdades de produtos cruzados e peça a um aluno que escreva as frações equivalentes correspondentes e o desenho correspondente a um dos produtos cruzados. Peça a outro aluno que identifique qual par de frações equivalentes o colega dele representou em desenho.

Caso julgue conveniente, demonstre ou particularize a demonstração: Sendo  $bd \neq 0$ ,  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d} \Leftrightarrow ad = bc$ .

1º) Direto: multiplicando os dois membros de  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$  por  $bd$  e simplificando, obtemos  $ad = bc$ .

2º) Recíproco: dividindo os dois membros de  $ad = bc$  por  $bd$  e simplificando, obtemos  $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$ .

O problema 12 visa exibir para os alunos uma situação de problema sem solução. É importante que eles, pouco a pouco, descubram que existem problemas impossíveis.

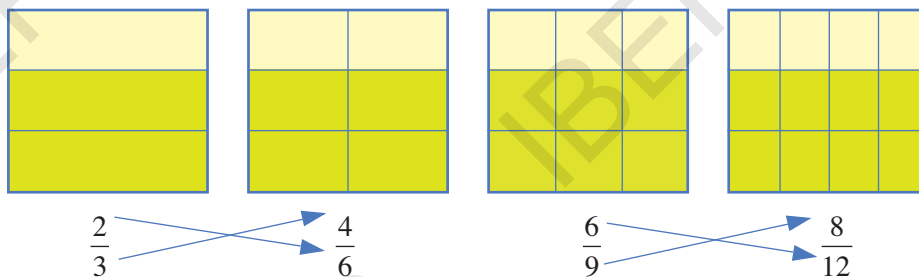
Antes de abordar o problema, pergunte aos alunos: “Sem fazer dívidas, é possível alguém gastar em compras mais do que possui?”.

12. Célia está correta ao dizer que o problema é impossível porque, somando  $\frac{7}{10}$  e  $\frac{5}{10}$ , obteremos  $\frac{12}{10}$ , o que representa um valor mais alto do que Paula poderia possuir (observe que, para representar o que Paula possuía, teríamos que usar a fração  $\frac{10}{10}$ ).

13. A primeira.

14. a)  $\frac{5}{9}$ ;  
 b)  $\frac{3}{7}$ ;  
 c) São equivalentes porque  $\frac{165}{297}$  é equivalente a  $\frac{5}{9}$  e  $\frac{66}{154}$  é equivalente a  $\frac{3}{7}$ .

11. Observe as quatro figuras a seguir. Nelas, as partes coloridas representam os numeradores de frações equivalentes de uma mesma grandeza.



Os produtos  $2 \times 6$  e  $3 \times 4$  chamam-se “produtos cruzados” das duas primeiras frações.

É possível provar que:

Se as duas frações são equivalentes, os produtos cruzados são iguais, e se os produtos cruzados são iguais, as frações são equivalentes.

Use a propriedade do produto cruzado para responder em relação às quatro frações:

- As frações correspondentes às quatro figuras são equivalentes? Por quê?
- Qual é a única das quatro frações que tem os termos primos entre si?
- Por quanto devemos dividir os termos da segunda fração para obtermos a primeira?
- Escreva duas outras frações equivalentes às quatro frações dadas.
- Verdadeiro ou falso: a segunda e terceira frações são equivalentes porque:  
 $4 \times 9 = 6 \times 6$ .
- A igualdade  $6 \times 12 = 9 \times 8$  corresponde a qual par de frações equivalentes?

12. Célia disse que o problema a seguir é impossível:

Paula gastou  $\frac{7}{10}$  do que tinha e depois mais  $\frac{5}{10}$ , ficando ainda com R\$ 40,00.

Quanto ela possuía inicialmente?

Você concorda com Célia? Por que esse problema é impossível?

13. Qual das contas a seguir se faz mais rapidamente:

$$\frac{5}{9} \times \frac{3}{7} \text{ ou } \frac{165}{297} \times \frac{66}{154} ?$$

14. Faça as contas a seguir:

- Divida os termos da fração  $\frac{165}{297}$  por 33. Qual é a fração que você obteve?
- Divida os termos da fração  $\frac{66}{154}$  por 22. Qual é a fração que você obteve?
- Os resultados das duas multiplicações:  $\frac{5}{9} \times \frac{3}{7}$  e  $\frac{165}{297} \times \frac{66}{154}$  são equivalentes ou não? Por quê?



15. Os termos da fração  $\frac{5}{9}$  são **primos entre si**? E os termos da fração  $\frac{3}{7}$ ?

Justifique sua resposta.

Você viu que é muito mais rápido e mais fácil fazer contas com frações cujos termos são primos entre si do que com frações equivalentes que tenham termos maiores. Veja, a seguir, exemplos de como obter uma fração de termos primos entre si equivalente à fração  $\frac{36}{60}$ . Como fazer contas com frações de termos primos entre si é bem simples, é comum dizer que os exemplos a seguir são de “**simplificação de frações**”.

$\frac{36}{60} = \frac{18}{30} = \frac{9}{15} = \frac{3}{5}$ <p style="text-align: center;"> <math>\begin{array}{c} \text{↖} \quad \text{↖} \quad \text{↖} \\ :2 \quad :2 \quad :3 \end{array}</math> </p>	$\frac{36}{60} = \frac{3}{5}$ <p style="text-align: center;"> <math>\begin{array}{c} :12 \\ \text{↖} \quad \text{↖} \\ :12 \end{array}</math> </p>
Simplificação pelo método das divisões sucessivas.	Simplificação pelo método do m.d.c. dos termos (numerador e denominador)

16. Observe, no quadro acima, a simplificação da fração  $\frac{36}{60}$  pelo método das divisões sucessivas e responda:

- a) Como se obteve a fração  $\frac{18}{30}$  a partir da fração  $\frac{36}{60}$ ?
- b) Como foi obtida a fração  $\frac{3}{5}$ ?

17. Calcule o m.d.c. de 36 e 60.

18. Discuta com seus colegas e decidam se é verdadeiro ou falso: **para simplificar a fração**  $\frac{36}{60}$  pelo método do **máximo divisor comum**, dividimos os dois termos (36 e 60) pelo máximo divisor comum deles: 12.

19. **Simplifique cada fração** a seguir pelo método das divisões sucessivas:

- a)  $\frac{54}{72}$       b)  $\frac{16}{48}$

Sugestão: divida os dois termos por 2 quantas vezes for possível. Depois, por 3, e assim sucessivamente, usando a sequência de números primos 2, 3, 5, 7, 11, ... etc., até obter uma fração de termos primos entre si.

**Professor(a):** Se julgar conveniente, retome atividades semelhantes às dos exercícios 127 a 129 do capítulo 1 relacionadas com números primos entre si.

15. Sim. Justificativa: Em ambos os casos, o único divisor comum dos termos é 1.

Comente que as frações do exercício 15 chamam-se “frações irredutíveis”.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, o segundo quadro em destaque do exercício 15.

16. a) Dividindo o numerador e o denominador por 2;

b) Primeiro, dividimos os termos da fração  $\frac{36}{60}$  por 2, obtendo  $\frac{18}{30}$ . Depois, dividimos os termos de  $\frac{18}{30}$  por 2, obtendo  $\frac{9}{15}$ . Finalmente, dividimos os termos de  $\frac{9}{15}$  por 3, obtendo  $\frac{3}{5}$ .

Reveja, se necessário, como se calcula o m.d.c., usando a fatoração.

17.  $36 = 2^2 \times 3^2$   
 $60 = 2^2 \times 3 \times 5$   
 m.d.c. (36, 60) =  $2^2 \times 3 = 12$ .

18. Verdadeiro.

19. a)  $\frac{3}{4}$ ;  
 b)  $\frac{1}{3}$ .

Peça a cinco alunos que escrevam, cada um em seu caderno, uma fração de termos primos entre si. Depois, peça-lhes que multipliquem os termos por 60 e escrevam as frações resultantes no quadro. Proponha que os demais alunos simplifiquem as cinco frações usando os dois métodos do quadro do exercício 15. Escolha dez alunos para resolver o exercício proposto (cinco por um método e cinco pelo outro). Os cinco alunos que iniciaram a atividade dirão se os dez alunos acertaram ou não.

Observação importante:

Quando comparamos ou, na maioria das vezes, efetuamos cálculos com frações, elas devem ser entendidas como partes de uma mesma grandeza. Assim, quando, em exercícios como o 23, dizemos que  $24/36$  é menor que  $30/36$ , estamos usando implicitamente o que se disse acima: são partes de uma mesma grandeza. Entretanto, se cada uma dessas frações estiver relacionada com grandezas ou quantidades diferentes, a resposta pode ser outra. Exemplificando:

a) Comparando  $24/36$  de 72 metros com  $30/36$  de 36 metros, obtemos, como respostas, 48 metros e 30 metros, ou seja,  $24/36$  de uma grandeza pode ser maior que  $30/36$  de outra.  
b) Calcule  $24/36$  de 180 e  $30/36$  de 144 e verifique que os resultados são iguais a 120, ou seja,  $24/36$  de uma grandeza pode ser igual a  $30/36$  de outra.

23. a)  $24/36$  é menor que  $30/36$  porque, sendo os denominadores iguais, a menor é que tem menor numerador;  
b) É mais difícil, porque essas frações não têm o mesmo denominador.

Comente que, para comparar as frações do item (b), usa-se comparar frações equivalentes a elas (como  $36/45$  e  $25/45$ , respectivamente).

**Professor(a):** Explique para os alunos que, nas próximas atividades, eles aprenderão como comparar frações como as do item (b) do exercício 23. Como informação complementar, diga que vão descobrir que  $5/9$  é menor que  $4/5$ , chamando a atenção para o perigo de achar que, como 4 é menor que 5, a fração  $4/5$  seja menor que  $5/9$ .

24. É mais fácil calcular mentalmente a primeira soma porque, os denominadores sendo iguais (36), basta escrever como soma uma fração de denominador 36, cujo numerador é 54 (soma dos dois numeradores). Já a segunda soma, se observarmos que uma das frações equivalentes a  $2/3$  é  $4/6$ , é possível calcular mentalmente a soma:  $9/6$  (denominador 6 e numerador  $4 + 5 = 9$ ).

20. Simplifique as frações  $\frac{54}{72}$  e  $\frac{16}{48}$ , dividindo os termos pelo seu m.d.c.

20. a)  $3/4$ ;  
b)  $1/3$ .

21. Responda, sem fazer contas:

Laércio e Pedro possuíam quantias iguais. Laércio gastou  $\frac{24}{36}$  do que

possuía, e Pedro gastou  $\frac{30}{36}$ . Qual dos dois gastou menos? Justifique sua resposta.

21. Laércio, porque a fração  $24/36$  é menor que a fração  $30/36$ , pois, se uma grandeza for dividida em 36 partes iguais, 24 delas representam uma parte menor que 30 partes.

22. Diga se o problema a seguir pode ser resolvido fazendo contas mentalmente:

22. É possível porque, sendo a fração  $2/3$  equivalente a  $4/6$ , vê-se que ela é menor que  $5/6$ . Logo, a resposta é: Laércio gastou menos.

Facilite a compreensão, fazendo desenhos que convençam os alunos de que  $2/3$  e  $4/6$  são equivalentes.

Laércio e Pedro possuíam quantias iguais. Laércio gastou  $\frac{2}{3}$  do que

possuía, e Pedro gastou  $\frac{5}{6}$ . Qual dos dois gastou menos? (Tente ima-

ginar uma fração equivalente a  $\frac{2}{3}$  que o ajude a responder.)

Considere as frações de todas as atividades a seguir como partes de uma mesma grandeza.

23. Responda e justifique:

a) Qual das duas frações a seguir é a menor:  $\frac{24}{36}$  ou  $\frac{30}{36}$ ?

b) Dizer qual das duas frações,  $\frac{4}{5}$  ou  $\frac{5}{9}$ , é a menor é mais fácil ou mais difícil que no caso das frações do item (a)? Justifique?

24. Qual das duas somas a seguir é mais fácil calcular mentalmente:

$\frac{24}{36} + \frac{30}{36}$  ou  $\frac{2}{3} + \frac{5}{6}$ ? Justifique sua resposta.

É claro que é mais fácil dizer qual é a menor de duas frações se elas têm denominadores iguais.

Do mesmo modo, é mais fácil somar frações com denominadores iguais que frações de denominadores diferentes.

Para aprender como resolver problemas com somas de frações de denominadores diferentes, você vai começar nos ajudando a calcular a soma a seguir:

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{12} + \frac{2}{15}$$

Para isso, resolva os exercícios seguintes:

25. m.m.c. (10, 12, 15) =  $2^2 \times 3 \times 5 = 60$ .

25. Fatore 10, 12 e 15 e verifique que seu m.m.c. é 60.

## 26. Verifique os cálculos a seguir:

Inicialmente, vamos substituir as frações dadas por frações equivalentes de denominadores iguais a 60. Para isso, escrevemos (usando letras no lugar dos numeradores):

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{12} + \frac{2}{15} = \frac{x}{60} + \frac{y}{60} + \frac{z}{60}$$

Responda:

- Qual é o denominador das três últimas frações?
- O que esse denominador é dos denominadores 10, 12 e 15 das frações dadas?
- Por quanto se deve multiplicar 10 para se obter 60?
- Que conta você fez para responder à pergunta anterior?
- Se substituirmos o  $x$  da primeira fração por  $3 \times 6 = 18$ , a fração  $\frac{18}{60}$  obtida é ou não equivalente à fração  $\frac{3}{10}$ ?
- Verdadeiro ou falso: para calcular  $y$ , divido 60 por 12 e multiplico o resultado por 7.
- Que contas devemos fazer para calcular  $z$ ?

Seguindo os passos anteriores, chegamos ao seguinte resultado:

$$\frac{3}{10} + \frac{7}{12} + \frac{2}{15} = \frac{18}{60} + \frac{35}{60} + \frac{8}{60} = \frac{61}{60}$$

Substituir frações por outras que são equivalentes e que têm o mesmo denominador chama-se “redução ao mesmo denominador”.

Foi o que fizemos ao substituir, na soma anterior, as frações

$$\frac{3}{10}, \frac{7}{12} \text{ e } \frac{2}{15} \text{ pelas frações } \frac{18}{60}, \frac{35}{60} \text{ e } \frac{8}{60}.$$

Observe que essas frações têm o mesmo denominador e cada uma delas é equivalente àquela que substituiu.

Observe ainda que 60 é o mínimo múltiplo comum de 10, 12 e 15.

## 27. Reduza as frações ao mesmo denominador e faça as contas, em cada caso:

a)  $\frac{1}{18} + \frac{1}{9} + \frac{1}{3}$

c)  $\frac{5}{12} + \frac{1}{4} + \frac{3}{8}$

b)  $\frac{1}{20} + \frac{1}{30} - \frac{1}{40}$

d)  $\frac{5}{36} + \frac{7}{24} - \frac{1}{8}$

26. a) 60;  
b) O m.m.c. desses denominadores;  
c) 6;  
d)  $10 \times 6$ ;  
e) É equivalente porque, para obtermos a fração  $\frac{18}{60}$ , multiplicamos os termos da fração  $\frac{3}{10}$  pelo mesmo número: 6;  
f) V;  
g) Para calcular  $z$ , divido 60 por 15 e multiplico o resultado por 2.

**Professor(a):** Refaça, no quadro, como obter a soma das frações do exercício 26 usando, para denominador comum, 120 ou qualquer outro múltiplo de 60, e, ao final, simplifique a fração resultante para que os alunos percebam a possibilidade de calcular, de diversas outras maneiras, a mesma soma. Entretanto, peça que discutam por que usar o m.m.c. dos denominadores é mais vantajoso (permite efetuar cálculos com números “menores”). Em particular, opcionalmente, apresente exemplos nos quais o denominador comum pode ser o produto dos denominadores dados.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os três quadros em destaque do exercício 26.

Obs.: Alguns usam distinguir os termos “redução ao menor denominador comum”, quando este é o m.m.c. dos denominadores dados, e “redução ao mesmo denominador”, quando se trata de um múltiplo desse m.m.c. Adotaremos, nos dois casos, a mesma denominação: redução ao mesmo denominador.

27. a)  $\frac{1}{18} + \frac{2}{18} + \frac{6}{18} = \frac{9}{18} = \frac{1}{2}$ ;  
b)  $\frac{6}{120} + \frac{4}{120} - \frac{3}{120} = \frac{7}{120}$ ;  
c)  $\frac{10}{24} + \frac{6}{24} + \frac{9}{24} = \frac{25}{24}$ ;  
d)  $\frac{10}{72} + \frac{21}{72} - \frac{9}{72} = \frac{22}{72} = \frac{11}{36}$ .

Recomende ou explore a leitura de:  
“Frações sem mistérios” (p.16 - 25).  
Luzia Faraco Ramos.  
Coleção A descoberta da Matemática.  
Editora Ática.

Explore o problema desta página: com os livros fechados, um aluno, ajudado pelos demais colegas, representa, no quadro, os sucessivos desenhos que correspondam a perguntas, feitas pelo professor, relacionadas com as frases abaixo das ilustrações.

Recursos gráficos como o usado nesta página, ou quaisquer outros como organogramas, gráficos, tabelas, devem ser explorados ao máximo, pois facilitam a compreensão e elaboração de estratégias para resolver situações-problemas.

Recomenda-se abordar os exercícios 28 e 29 explorando desenhos feitos pelos alunos no quadro, conduzindo cada passagem através de perguntas dirigidas aos alunos, para que justifiquem seus raciocínios.

28. a) O sofá custou 1 500 reais e o tapete, 300 reais. Adriana possuía inicialmente 2 400 reais;
- b) O velocípede custou 200 reais, a filmadora 1 600 reais e o televisor, 1 200 reais;
- c) Lucas comprou a bicicleta por 675 reais (o preço de venda ficará representado por 10/9; logo,  $\frac{1}{9}$  equivale a 75,00 e  $\frac{9}{9}$  a  $9 \times 75 = 675$  reais).

Justificando: Em 28 (a), usamos um retângulo dividido em 8 partes iguais e colorimos 5 delas (preço do sofá). Colorimos uma das 3 partes restantes com outra cor (preço do tapete). Restaram 2 partes, equivalentes a 200 reais. Se  $\frac{2}{8}$  equivalem a 200 reais,  $\frac{1}{8}$  equivale a 300 reais. Logo, o sofá custou 1 500 reais ( $\frac{5}{8}$ ). O tapete custou 300 reais ( $\frac{1}{8}$ ) e Adriana possuía 2 400 reais ( $\frac{8}{8}$ ). Em 28 (b), representando o quanto Ênio tinha por  $\frac{15}{15}$  (3 000,00).

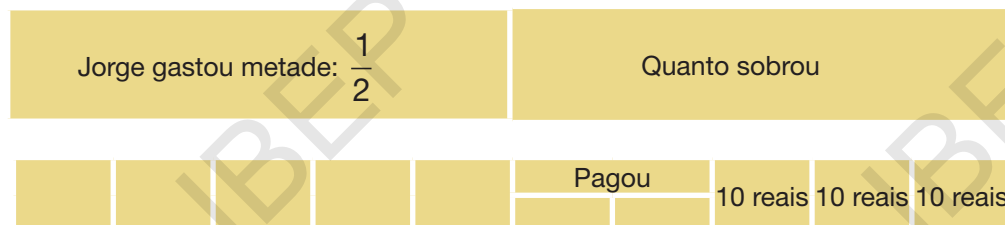
Veja a seguir como, usando desenhos, fica fácil compreender e resolver problemas:

Jorge gastou  $\frac{1}{2}$  do total que possuía e pagou uma dívida com  $\frac{2}{5}$  do

que sobrou. Depois disso, ele ainda ficou com 30 reais.

- a) Quanto Jorge possuía inicialmente?
- b) De quanto era a dívida de Jorge?

Observe como representar graficamente o problema:



A primeira barra representa o quanto Jorge possuía. Ela ficou dividida em duas partes iguais: a primeira representa o quanto ele gastou, e a segunda, o quanto sobrou.

A segunda barra tem suas duas metades divididas em 5 partes iguais cada uma.

Portanto, cada uma dessas partes representa  $\frac{1}{10}$  do quanto Jorge possuía. Como Jorge pagou  $\frac{2}{5}$  do que sobrou após gastar metade do que possuía, o que restou (30 reais) equivale a  $\frac{3}{10}$  do quanto ele possuía inicialmente. Logo,  $\frac{1}{10}$  do que ele possuía equivale a 10 reais, e o total,  $\frac{10}{10}$ , equivale a 100 reais. Como  $\frac{2}{5}$  de 100 reais equivalem a 20 reais, podemos responder:

- a) Jorge possuía inicialmente R\$ 100,00
- b) A dívida de Jorge era de R\$ 20,00.

28. Resolva os problemas a seguir, usando representações gráficas para os respectivos raciocínios:

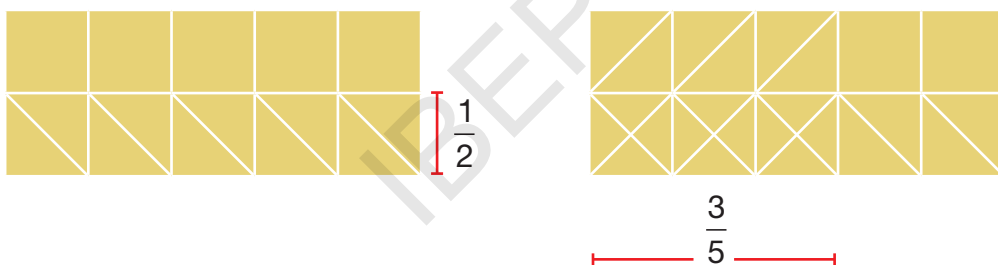
- a) Adriana gastou  $\frac{5}{8}$  do que tinha na compra de um sofá e  $\frac{1}{3}$  do restante na compra de um tapete, ficando ainda com R\$ 600,00. Quanto custou cada objeto que Adriana comprou, e quanto ela possuía inicialmente? Sugestão: desenhe uma barra dividida em 8 partes iguais.
- b) Ênio tinha R\$ 3 000,00. Gastou  $\frac{8}{15}$  na compra de uma filmadora e  $\frac{6}{15}$  na compra de um televisor. Com o restante, comprou um velocípede. Quanto custou cada artigo?



- c) Lucas vendeu uma bicicleta por R\$ 750,00, lucrando  $\frac{1}{9}$  do preço da compra. Por quanto ele comprou a bicicleta? Sugestão: represente o preço da compra por  $\frac{9}{9}$ .

29. No problema do Jorge, você viu que  $\frac{3}{5}$  da metade de certa quantia equivalem a  $\frac{3}{10}$  dessa quantia.

Veja como representar, com desenhos, o cálculo de  $\frac{3}{5}$  da metade usando áreas de retângulos.



- a) Se o retângulo da esquerda representa uma grandeza, qual fração dessa grandeza é representada pela parte hachurada?
- b) No retângulo da direita, você vê hachuras em outra direção. Se este retângulo representa a mesma grandeza que o da esquerda, qual fração da grandeza é representada por essas hachuras?
- c) A área do retângulo com duplo hachurado representa qual fração da grandeza?
- d) Quais frações representam a base e a altura do retângulo com duplo hachurado?
- e) Represente a área do retângulo com duplo hachurado como produto de suas dimensões.

Resolvendo o exercício 29, você viu que existem duas interpretações

para a área do retângulo com duplo hachurado:  $\frac{3}{10}$  e  $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2}$ ; logo, podemos concluir que:  $\frac{3}{5} \times \frac{1}{2} = \frac{3 \times 1}{5 \times 2} = \frac{3}{10}$ .

30. Observe o texto e a ilustração anterior e responda:

- a) Você observou alguma relação entre os denominadores 2 e 5 das frações do primeiro membro da igualdade e o número de linhas e colunas dos retângulos da ilustração?
- b) Represente, como acima, a igualdade  $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ . Justifique.
- c) Copie e complete em seu caderno: Para multiplicar frações, multiplicamos os numeradores entre si e ...?...

Logo,  $\frac{1}{15}$  do que Ênio possuía equivale a  $3000 : 15$ , ou seja, 200 reais. Portanto,  $\frac{8}{15}$  equivalem a 1 600 reais, e  $\frac{6}{15}$ , a 1 200 reais.

c) Como o lucro foi de  $\frac{1}{9}$  do preço de compra, representando o preço de compra por  $\frac{9}{9}$ , concluímos que o preço de venda é representado pela soma destas duas frações, ou seja, pela fração  $\frac{10}{9}$ . Logo,  $\frac{10}{9}$  correspondem a 750 reais,  $\frac{1}{9}$  correspondem a 75 reais e  $\frac{9}{9}$  correspondem ao produto 9 vezes 75, isto é, 675 reais.

29. a)  $\frac{1}{2}$ ;  
b)  $\frac{3}{5}$ ;  
c)  $\frac{3}{10}$ ;  
d) base:  $\frac{3}{5}$ ; altura:  $\frac{1}{2}$ ;  
e)  $(\frac{3}{5})(\frac{1}{2})$ .

30. a) Sim: tal como as frações têm denominadores 2 e 5, os retângulos têm 2 linhas e 5 colunas;

b) Representação do aluno;

c) ...e os denominadores entre si.

Justificativa dos itens (b) e (c): a área da região retangular contendo o duplo hachurado tem dupla interpretação:

a) representa a fração  $\frac{6}{20}$  da área do retângulo maior;

b) sua área é dada pelo produto das duas dimensões:  $\frac{2}{5}$  e  $\frac{3}{4}$ . Logo, como expressões da mesma área, podemos escrever:  $\frac{2}{5} \times \frac{3}{4} = \frac{6}{20}$ .

Comente: no item 31 (a), a área da região retangular contendo o duplo hachurado tem dupla interpretação: a) representa a fração  $6/15$  da área do retângulo maior. b) sua área é dada pelo produto das duas dimensões:  $2/3$  e  $3/5$ . Logo, como expressões da mesma área, podemos escrever:  $2/3 \times 3/5 = 6/15$ .

31. a)  $2/3 \times 3/5 = 6/15$ ;  
b) Como produto das duas dimensões, a área pode ser interpretada como o produto das frações  $3/4$  e  $5/7$ . Como fração da área do retângulo maior, a área com duplo hachurado equivale à fração  $15/28$ . Logo, como expressões de uma mesma área, podemos concluir que  $(3/4)(5/7) = 15/28$ .

Leia a observação da página 10.

32. a) Desenho que representa  $2/3$ ;  
b) Novo desenho representando  $3/4$  dos  $2/3$ ;  
c) Representa  $6/12$  (ou, equivalentemente,  $1/2$ );  
d) 16 adultos ( $2/3$  de 24);  
e) 12 homens.

33. a)  $6/35$ ;  
b)  $1/40$ ;  
c)  $1/6$ ;  
d)  $1/3$ .

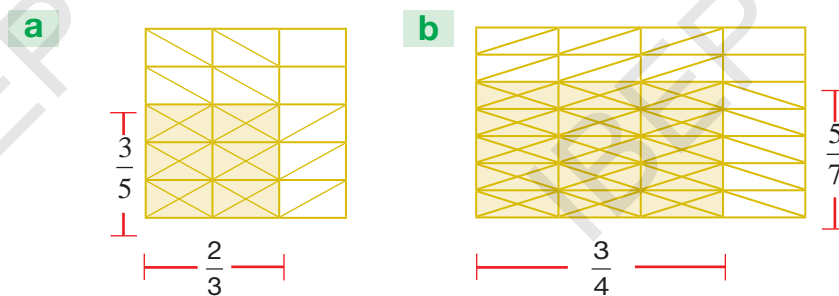
Comente: no capítulo 4 do sexto ano, você aprendeu que: (a) duas frações são inversas se o produto das mesmas é igual a 1. (b) uma das inversas de uma fração  $a/b$  é a fração  $b/a$ . (c) para calcular a divisão  $a/b : c/d$ , basta multiplicar  $a/b$  pela inversa  $d/c$  da segunda fração. Veja os exemplos do exercício 34.

34. a)  $5/4$ ;  
b)  $24/36 = 2/3$ ;  
c)  $26/35$ ;  
d)  $4/56$ ;  
e)  $16/20$ .

35. a)  $2/7 \times 2/7 \times 2/7 = 8/343$ ;  
b)  $3/4 \times 3/4 \times 3/4 \times 3/4 = 81/256$ ;  
c)  $2/3 \times 2/3 \times 2/3 \times 2/3 = 16/81$ .

Solicite que os alunos simplifiquem, quando possível, os resultados obtidos.

31. Observe as figuras a e b:



- a) Escreva o produto de duas frações representado pela figura a.  
b) Observe a figura b e interprete a área do retângulo com duplo hachurado de duas maneiras diferentes.

32. Em uma excursão,  $\frac{2}{3}$  das pessoas são adultos e  $\frac{3}{4}$  dos adultos são homens. O total de excursionistas foi de 24 pessoas.

- a) Represente, em um desenho, usando hachuras inclinadas, a fração  $\frac{2}{3}$  em faixas verticais.  
b) Divida o desenho anterior em 4 faixas horizontais e faça hachuras em outra direção em 3 dessas faixas.  
c) O desenho com duas hachuras obtido no item anterior representa qual fração?  
d) Quantos adultos foram à excursão?  
e) Quantos homens foram à excursão?

33. Calcule os produtos a seguir e simplifique o resultado, se possível:

- a)  $\frac{3}{5} \times \frac{2}{7}$       b)  $\frac{1}{5} \times \frac{1}{8}$       c)  $\frac{2}{9} \times \frac{3}{4}$       d)  $\frac{7}{9} \times \frac{3}{7}$

34. Você se lembra? Você aprendeu que, para dividir uma fração por outra, basta multiplicar a primeira fração por uma inversa da segunda fração.

Como uma inversa de  $\frac{3}{4}$  é  $\frac{4}{3}$  e uma inversa de 7 é  $\frac{1}{7}$ , temos os exemplos a seguir:

$$\frac{2}{3} : \frac{3}{4} = \frac{2}{3} \times \frac{4}{3} = \frac{2 \times 4}{3 \times 3} = \frac{8}{9} \quad \text{como} \quad 7 = \frac{7}{1}, \quad \frac{3}{5} : 7 = \frac{3}{5} \times \frac{1}{7} = \frac{3}{35}$$

Agora, calcule as divisões a seguir:

- a)  $\frac{1}{2} : \frac{2}{5}$       b)  $\frac{3}{4} : \frac{9}{8}$       c)  $\frac{2}{7} : \frac{5}{13}$       d)  $\frac{4}{7} : 8$       e)  $\frac{16}{5} : 4$

35. Você se lembra? No sexto ano, você viu que  $4^3 = 4 \times 4 \times 4 = 64$  e

$$3^4 = 3 \times 3 \times 3 \times 3 = 81. \text{ Também, para frações temos } \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{2}{5} \times \frac{2}{5} = \frac{4}{25}$$

Agora, calcule: a)  $\left(\frac{2}{7}\right)^3$  b)  $\left(\frac{3}{4}\right)^4$  c)  $\left(\frac{2}{3}\right)^2 \times \left(\frac{2}{3}\right)^3$

36. a) 41/40;  
b) 9/40;  
c) 1/4;  
d) 25/16;  
e) 25/64;  
f) 125/512.

Diga para os alunos que, a partir do exercício 37, a parte colorida em tom mais escuro de cada figura representa o numerador da fração correspondente.

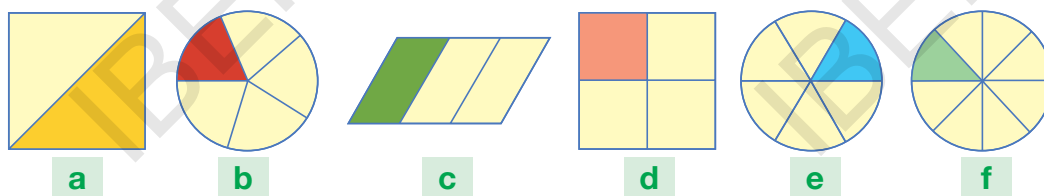
36. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

A	B	A + B	A - B	A × B	A : B	A <sup>2</sup>	A <sup>3</sup>
$\frac{5}{8}$	$\frac{2}{5}$	a	b	c	d	e	f

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

## Aprendendo em casa

37. Observe as figuras a seguir:



Resolva em seu caderno:

- a) Para cada uma das figuras, escreva uma fração correspondente.  
b) Escreva uma fração que represente a figura b e que tenha denominador 55.  
c) Escreva uma fração que represente a figura c e que tenha numerador 7.  
d) Escreva uma fração que represente a figura d e que tenha denominador 24.

37. a) (A) 1/2,  
(B) 1/5,  
(C) 1/3,  
(D) 1/4,  
(E) 1/6, (F) 1/8;  
b) 11/55;  
c) 7/21;  
d) 6/24.

38. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Frações que representam um inteiro		
$\frac{4}{4} = 1$	$\frac{a}{b} = 1$	$\frac{c}{d} = 1$

38. a) ⇒ 8;  
b) ⇒ 8;  
c) ⇒ 6;  
d) ⇒ 6.

39.  $1/3 = 2/6$  (1ª e 2ª figuras);  
 $1/3 = 4/12$  (1ª e 3ª figuras);  
 $2/6 = 4/12$  (2ª e 3ª figuras).

40. R)  $2/6 = 4/12 \Leftrightarrow$   
 $2 \times 12 = 4 \times 6 \Leftrightarrow$   
 $24 = 24.$

Antes de resolver o exercício 41, explore as situações a seguir:

- a) Desenhe a reta numerada contendo números naturais de 0 a 6 e comente como marcar os pontos correspondentes a cada par de números sucessivos: usando distâncias iguais.  
b) Obtenha o ponto médio do segmento de extremos correspondentes ao zero e ao 1 e pergunte qual fração representa cada uma das duas partes iguais desse segmento.  
c) Divida o segmento entre o 1 e o 2 em quatro partes iguais e explore a ideia de equidistância. Depois, pergunte quais as frações que correspondem a uma, duas ou três dessas partes.

41. a) 3 partes;  
b)  $2/3$ ;  
c)  $4/6$  e  $6/9$ .

42. Porque  $5/9$  é equivalente a  $50/90$  e  $3/7$  é equivalente a  $12/28$ .

O mais fácil de calcular é o produto  $5/9 \times 3/7$ .

43. a)  $7/9$ ;  
b)  $4/5$ .

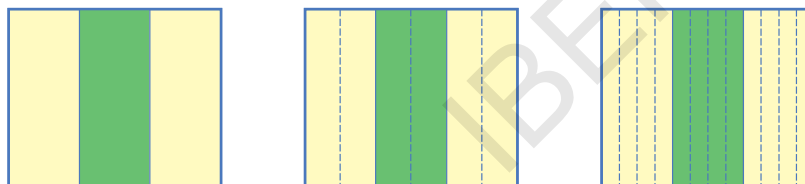
44. a)  $5/8 - 4/8 = 1/8$ ;  
b)  $10/12 - 3/12 = 7/12$ ;  
c)  $4/72 - 8/72 + 24/72 - 10/72 + 21/72 = 49/72 - 18/72 = 31/72$ .

No capítulo 2 do sexto ano, foram exploradas atividades para mostrar a equivalência entre números naturais e frações (como  $4 = 28/7$ ). Se julgar necessário, explore algumas delas.

45. a)  $28/7 - 2/7 = 26/7$ ;  
b)  $15/5 - 3/5 = 12/5$ .

46. Cobertor: R\$ 62,40; Torneira: R\$ 52,00; Fogão: R\$ 117,00.

39. Observe as figuras e escreva **três pares de frações equivalentes** sugeridas por elas, identificando as figuras correspondentes.



40. Use o **produto cruzado** para justificar que as frações relacionadas com a segunda e a terceira figuras anteriores são equivalentes.

41. Observe a figura e responda ou faça o que se pede:



- a) Em quantas partes iguais foi dividido o segmento de extremos 0 e 1?  
b) A distância entre o zero e o ponto destacado representa qual fração do segmento?  
c) Escreva mais duas frações equivalentes à fração dada.

42. Por que os **produtos**  $\frac{5}{9} \times \frac{3}{7}$  e  $\frac{50}{90} \times \frac{12}{28}$  são **equivalentes**? Qual deles é mais fácil de calcular?

43. Simplifique:

a)  $\frac{56}{72}$       b)  $\frac{44}{55}$

44. Copie, em seu caderno, e faça as contas a seguir:

a)  $\frac{5}{8} - \frac{1}{2} = \frac{5}{8} - \frac{?}{?} = \dots$       c)  $\frac{1}{18} - \frac{1}{9} + \frac{1}{3} - \frac{5}{36} + \frac{7}{24} = \frac{4}{72} - \frac{8}{72} + \frac{?}{?} - \frac{?}{?} + \frac{?}{?} = \dots$   
b)  $\frac{5}{6} - \frac{1}{4} = \frac{10}{12} - \frac{?}{?} = \dots$

45. Lembre-se de que  $4 = \frac{28}{7}$ . Copie e calcule em seu caderno:

a)  $4 - \frac{2}{7} = \frac{28}{7} - \frac{2}{7} = \frac{?}{?} = \dots$       b)  $3 - \frac{3}{5} = \frac{15}{5} - \frac{3}{5} = \frac{?}{?} = \dots$

46. Mário tinha R\$ 312,00. Gastou a quinta parte na compra de um cobertor, a sexta parte na compra de uma torneira e  $3/8$  na compra de um fogão. Quanto custou cada objeto?



47. Calcule e simplifique os resultados, se possível:

a)  $\frac{1}{6} \times \frac{5}{8}$

b)  $\frac{3}{5} \times \frac{7}{9}$

c)  $\frac{5}{9} : \frac{10}{27}$

d)  $\frac{4}{12} : \frac{14}{21}$

48. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

A	B	A + B	A - B	A × B	A : B	A <sup>2</sup>	A <sup>3</sup>
$\frac{5}{6}$	$\frac{2}{3}$	a	b	c	d	e	f

47. a) 5/48;  
b)  $21/45 = 7/15$ ;  
c)  $135/90 = 3/2$ ;  
d)  $84/168 = 1/2$ .

48. a.  $9/6 = 3/2$ ;  
b.  $1/6$ ;  
c.  $5/9$ ;  
d.  $5/4$ ;  
e.  $25/36$ ;  
f.  $125/216$ .

## Aprendendo mais sobre decimais

### Explorando o que você já sabe

<b>A</b> $\begin{array}{r} 3,4 \text{ cm} \\ + 2,3 \text{ cm} \\ \hline 5,7 \text{ cm} \end{array}$	<b>C</b> $3,4 = 3,40 = 3,400 = \dots$	<b>E</b> $17 = 17,0 = 17,00$
	<b>D</b> $3,4 + 5,25$	<b>F</b> $3,78 + 17 = 20,78$
<b>B</b> $\begin{array}{r} 3,02 \\ 5,42 \\ + 1,18 \\ \hline 9,62 \end{array}$	<b>G</b> $\frac{13}{100} \times \frac{4}{10} = \frac{13 \times 4}{100 \times 10} = \frac{52}{1000}$ Logo, $0,13 \times 0,4 = 0,052$ .	
	<b>H</b> $\begin{array}{l} 3,25 \times 10 = 32,5 \\ 3,25 \times 100 = 325 \end{array}$	$\begin{array}{l} 723,7 : 10 = 72,37 \\ 723,7 : 100 = 7,237 \end{array}$

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os quadros A, B, C, E, G, H, da seção “Explorando o que você já sabe”.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

- Colocando vírgula debaixo de vírgula.
- Não altera.
- Um zero.
- 17,00.
- a) 2; b) 1; c) 3.
- a) 1; b) 2; 3.
- Desloca para a esquerda uma ordem decimal. Idem, 3 ordens decimais.

Explore o significado de número racional em diferentes contextos. Exemplos:

- Observe **A** e **B** e responda: para somar medidas dadas na mesma unidade ou números decimais, como são escritas as parcelas?
- Observe **C** e responda: acrescentar ou retirar algarismos zero à direita, na escrita de um decimal, altera o seu valor?
- Quanto zeros você deve acrescentar à direita da parcela 3,4 de **D** ao escrever as parcelas para somar?
- Observe **E** e responda: ao calcular a soma de **F**, você escreveria a segunda parcela como 17,0 ou 17,00?
- Observe **G** e responda:
  - a) Quantas ordens decimais tem 0,13?
  - b) Quantas ordens decimais tem 0,4?
  - c) Quantas ordens decimais tem 0,052?
- Observe **H** e responda:
  - a) Quantas ordens decimais a vírgula desloca para a direita quando multiplicamos um decimal por 10?
  - b) E por 100? E por 1 000?
- O que acontece com a vírgula de um decimal se o dividimos por 10? E por 1 000?

- (a) Cálculo das três diferenças entre tempos de três nadadores em uma competição: 1,32 min, 1,39 min e 1,43 min, bem como o modo de ler os décimos obtidos em centésimos de minutos.
- (b) Decompor um retângulo quadriculado em diversos outros retângulos de áreas diferentes, identificados por letras, e propor o cálculo das razões entre suas áreas bem como a representação decimal de cada uma dessas razões.
- (c) Explorar valores decimais de componentes de uma mistura de diferentes líquidos usando as razões entre os valores de cada um deles com o da mistura, bem como, atribuindo o preço de cada um, pedir o preço total da mistura.

Antes do exercício 49, procure estabelecer uma estratégia de resolução para o mesmo. Explore o fato de que  $23,45 < 32,45 < 32,54$ , perguntando:

- (a) Quais algarismos você observa para concluir que  $23,45 < 32,45$ ?  
R) Os algarismos das dezenas ( $2 < 3$ ).
- (b) Quais algarismos você observa para concluir que  $32,45 < 32,54$ ?  
R) Como os algarismos das dezenas são iguais ( $3 = 3$ ), e também os das unidades ( $2 = 2$ ), observo os algarismos dos décimos ( $4 < 5$ ).

49. R\$ 21,78; R\$ 21,87;  
R\$ 23,33; R\$ 32,33;  
R\$ 32,67; R\$ 32,76;  
R\$ 45,07; R\$ 45,70;  
R\$ 71,06; R\$ 71,60;  
R\$ 80,02; R\$ 80,20;  
R\$ 83,89; R\$ 83,98.

50. R)  $890/1000$ .

Um erro muito comum é achar que, quanto maior o número de algarismos de um decimal, maior ele é. O exercício 51 visa esclarecer este fato. Explore outros análogos.

51. Não.  
 $4,876 = 4 + 876/1000$   
e  $4,89 = 4 + 890/1000$ .  
Como  
 $890/1000 > 876/1000$ , o número 4,89 é maior que o número 4,876.

Comente que:  
 $4,89 = 4,890$ .  
Logo,  $4,890 > 4,876$ .

(Usando a estratégia do exercício 49.)

52. a) Porque  $41/100$  é mais próximo de  $40/100$  do que de  $50/100$ ;  
b) Porque  $695/1000$  é mais próximo de  $700/1000$  do que de  $600/1000$ ;  
c) Porque  
 $25/100 - 20/100 =$   
 $30/100 - 25/100$ .

## Aprendendo em sala de aula

49. Os computadores têm um recurso para escrever quantias dadas em reais ou decimais **em ordem crescente ou decrescente**.

Marina digitou diversas quantias desordenadamente, como se vê na tabela a seguir, e depois usou o recurso do computador para ordená-las crescentemente.

Observe na tabela a ordem na qual Marina digitou as quantias:

Tabela de valores em reais						
R\$ 83,89	R\$ 32,76	R\$ 21,78	R\$ 80,02	R\$ 32,67	R\$ 45,07	R\$ 71,60
R\$ 45,70	R\$ 23,33	R\$ 71,06	R\$ 21,87	R\$ 32,33	R\$ 83,98	R\$ 80,20

Agora, escreva, em uma tabela, essas quantias da forma como foram colocadas em ordem pelo computador.

50. Quem é maior:  $\frac{876}{1000}$  ou  $\frac{890}{1000}$ ?

51. Juca disse que 4,876 é maior que 4,89 porque tem mais algarismos. Ele está certo? Justifique sua resposta.

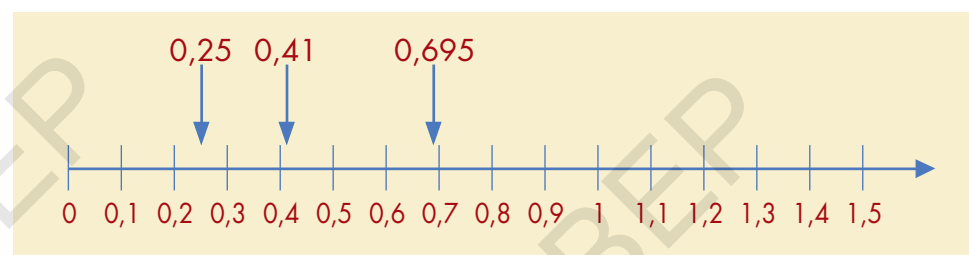
52. Você sabe que:

21 é **mais próximo** de 20 do que de 30.

Do mesmo modo, como  $\frac{21}{10}$  é mais próximo de  $\frac{20}{10}$  do que de  $\frac{30}{10}$ ,

concluimos que 2,1 é mais próximo de 2,0 do que de 3,0.

Agora, observe a figura:



- a) Por que o ponto correspondente a 0,41 é **mais próximo** de 0,4 do que de 0,5?  
b) Por que o ponto correspondente a 0,695 é mais próximo de 0,7 do que de 0,6?  
c) Por que o ponto correspondente a 0,25 é ponto médio do segmento cujos extremos correspondem a 0,2 e 0,3?

53. Calcule os produtos a seguir:

- a)  $3,5 \times 10^7$       b)  $2,16 \times 10^5$       c)  $3,19 \times 10^8$

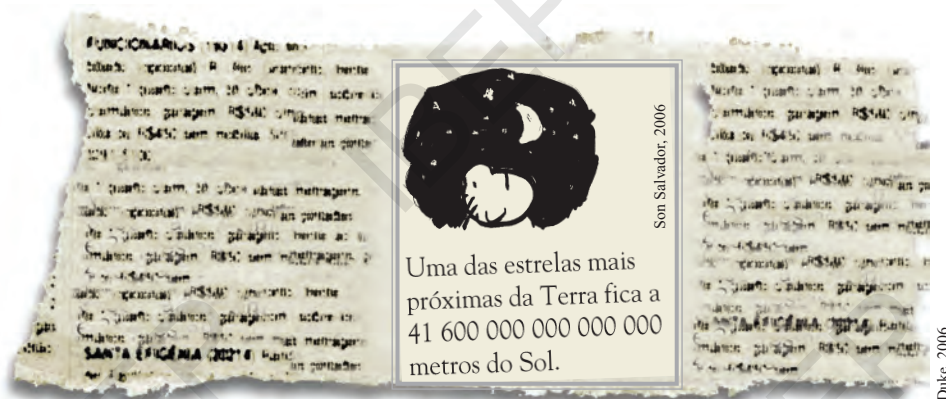
54. Observe:

- a)  $42\,000\,000 = 42 \times 10^6 = 4,2 \times 10^7$       b)  $156\,000\,000\,000 = 156 \times 10^9 = 1,56 \times 10^{11}$

Escreva os números a seguir como produto de um número decimal, que tenha apenas um algarismo à esquerda da vírgula, por uma potência de dez:

- a) 45 000 000 000      b) 12 300 000

55. Observe a informação:



Reescreva essa informação, usando o produto de 4,16 por uma potência de dez.

56. Algumas tartarugas vivem cerca de 150 anos, ou seja, aproximadamente 4 730 000 000 segundos. Escreva esse tempo, em segundos, como produto de 4,73 por uma potência de dez.

57. Ao limpar o piso de um prédio, foram gastos 13,5 litros de detergente concentrado, que custa R\$ 3,20 o litro. Qual foi o custo total do detergente gasto?

58. Regina disse que é muito fácil fazer, mentalmente, as contas a seguir:

- a)  $1,3 \times 5,9 + 4,1 \times 1,3$       e)  $(0,25 \times 31) \times 4$   
 b)  $4,6 + 5,8 + 2,4$       f)  $0,07 \times 10^6$   
 c)  $17,5 - 4,9$       g)  $321 : 10^6$   
 d)  $(0,5 \times 13) \times 2$

Explique como Regina pensou para fazer cada uma dessas contas.

59. O dono de um restaurante comprou 40 garrafas de vinagre que custam R\$ 4,90 cada uma. Faça uma estimativa e responda: ele gastou mais ou menos que R\$ 200,00 nessa compra?

60. Um comerciante comprou 60 kg de feijão por R\$ 403,20 e revendeu a R\$ 8,70 o quilo. Qual foi o lucro do comerciante?

Recorde: (a)  $10^2 = 100$ ,  $10^3 = 1\,000$  etc. (b) Multiplicação ou divisão de decimais por potências de dez.

53. a) 35 000 000;  
 b) 216 000;  
 c) 319 000 000.

54. a)  $4,5 \times 10^{10}$ ;  
 b)  $1,23 \times 10^7$ .

55. Uma das estrelas mais próximas da Terra fica a  $4,16 \times 10^{16}$  metros do sol.

56.  $4,73 \times 10^9$ s.

57. R\$ 43,20.

Antecipe o problema 58 com atividades do tipo:

- a)  $3 \times 17 + 7 \times 17$  é igual ou diferente de  $(3 + 7) \times 17$ ?  
 b)  $16 + 28 + 34$  é igual a  $16 + 34 + 28$ ?  
 c) Calcule a soma anterior, mentalmente;  
 d)  $186 - 79$  é igual a  $187 - 80$ ?  
 e) Calcule a diferença anterior, mentalmente;  
 f)  $5 \times 31 \times 2$  é igual ou diferente de  $5 \times 2 \times 31$ ?  
 g) Calcule o produto anterior, mentalmente.

58. a) Somou  $5,9 + 4,1 = 10$  e multiplicou por 1,3;  $10 \times 1,3 = 13$ .

b) Somou, primeiramente,  $4,6 + 2,4 = 7$  e depois somou 7 com 5,8;  $7 + 5,8 = 12,8$ ;

c) Subtraiu 5 de 17,6, encontrando 12,5;

d) Multiplicou 0,5 por 2 e encontrou 1 e depois multiplicou 1 por 13;

e) Multiplicou 0,25 por 4 e encontrou 1 e depois multiplicou 1 por 31;

f) 70 000. Deslocou a vírgula 6 ordens decimais para a direita, acrescentando tantos algarismos zero quantos fossem necessários;

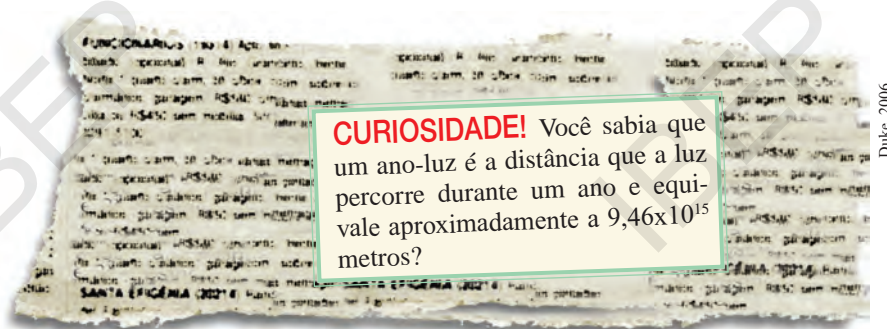
g) 0,000321. Observando que  $321 = 321,0$ , deslocou a vírgula 6 ordens decimais para a esquerda, acrescentando tantos algarismos zero quantos fossem necessários.

59. Como  $4,90 \times 40$  é menor que  $5 \times 40 = 200$ , conclui-se que ele gastou menos de 200 reais.

60. O lucro do comerciante foi de R\$ 118,80.

Sugira pesquisas sobre algum ou alguns desses fatos (para apresentação nas próximas aulas): dados numéricos e sobre movimentos da Terra – os eclipses e o movimento das estrelas e dos planetas. Dados numéricos sobre estrelas e planetas; relógios de sol; mapas astronômicos; cometas e suas órbitas; telescópios; radiotelescópios; galáxias; buracos negros, etc. Sugira também que acessem o site <http://www.stellarium.org/pt/>, onde se encontra um programa que simula um planetário.

## 61. Veja a informação:



61. Aproximadamente, 1 586 anos-luz (dividir 1 500 000 por 946).

Sugira pesquisas sobre algum ou alguns desses fatos (para apresentação em próximas aulas): dados relacionados com turismo nacional e internacional: agências, passagens, hospedagens, câmbio, planejamento de roteiros e despesas. Sugira também que acessem o site <http://www4.bcb.gov.br/pec/conversao/conversao.asp>, onde se encontra um conversor de moedas.

62. a) 565,8 francos suíços;  
b) 218 dólares.

63. Oriente os alunos a completar a tabela:  
a é a soma de 7/10 com 33/100, b é a diferença de 7/10 e 33/100 etc., g é a soma de 0,7 com 0,33 etc., m é a soma de 17/10 com 123/100 etc.

Explore os resultados da tabela para que os alunos comprovem, mais uma vez, a correlação entre operações com frações decimais e os números decimais correspondentes. (Compare os resultados a e g, b e h, c e i, d e j, e e k, f e l, m e s, n e t, o e u, p e v, q e x, r e z.)

- a) 103/100; m) 293/100;  
b) 37/100; n) 47/100;  
c) 231/1 000; o) 2 091/1 000;  
d) 70/33; p) 170/123;  
e) 49/100; q) 289/100;  
f) 343/1 000; r) 4 913/1 000;  
g) 1,03; s) 2,93;  
h) 0,37; t) 0,47;  
i) 0,231; u) 2,091;  
j) 2,12; v) 1,38;  
k) 0,49; x) 2,89;  
l) 0,343; z) 4,913.

Use essa informação para resolver o problema a seguir:

A distância entre certa estrela e a Terra é de  $1,5 \times 10^{19}$  metros. Qual é a distância aproximada entre essa estrela e a Terra em anos-luz?

**Sugestão:**

$$1,5 \times 10^{19} = 1,5 \times 10^6 \times 10^{13} = 1\,500\,000 \times 10^{13} \text{ e}$$

$$9,46 \times 10^{15} = 946 \times 10^{13}$$

62. Um turista viajou pela Suíça quando 1 dólar americano equivalia a 1,64 francos suíços.

- a) Ao chegar, trocou 345 dólares por francos suíços. Quantos francos recebeu?  
b) Fazendo compras, gastou 357,52 francos suíços. Quanto gastou em dólar?

63. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

A	B	A + B	A - B	A × B	A : B	A <sup>2</sup>	A <sup>3</sup>
$\frac{7}{10}$	$\frac{33}{100}$	a	b	c	d	e	f
0,7	0,33	g	h	i	j	k	l
$\frac{17}{10}$	$\frac{123}{100}$	m	n	o	p	q	r
1,7	1,23	s	t	u	v	x	z



## Aprendendo em casa

64. Ao abastecer sua moto, um rapaz pagou R\$ 18,50 por 10 litros de gasolina. Quanto se pagará para abastecer um veículo com 45 litros dessa mesma gasolina? (Sugestão: calcule, inicialmente, o preço de 1 litro.)
65. Geraldo comprou 4 dúzias de latas de um mesmo refrigerante por R\$ 57,60. Qual é o preço de cada lata desse refrigerante?
66. Leia e faça o que se pede:

Copie em seu caderno e complete o **quadrado mágico**, isto é, faça com que as somas das linhas, colunas e diagonais sejam todas iguais:

8,2	??	??
3,7	5,5	??
??	9,1	2,8

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

64. R\$ 83,25.

65. R\$ 1,20.

66. 8,2; 1,9; 6,4;  
3,7; 5,5; 7,3;  
4,6; 9,1; 2,8.

67. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

A	B	A + B	A - B	A × B	A : B	A <sup>2</sup>	A <sup>3</sup>
$\frac{3}{10}$	$\frac{13}{100}$	a	b	c	d	e	f
0,8	0,25	g	h	i	j	k	l
$\frac{31}{10}$	$\frac{203}{100}$	m	n	o	p	q	r
1,53	1,02	s	t	u	v	x	z

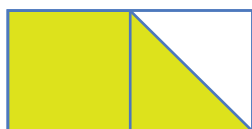
Sugestão: observe que todas as somas devem ser iguais à da diagonal:  
 $8,2 + 5,5 + 2,8 = 16,5$ .

67.

A	B	A + B	A - B	A × B	A : B	A <sup>2</sup>	A <sup>3</sup>
3	13	43	17	39	30	9	27
10	100	110	90	1000	13	100	1000
0,8	0,25	1,05	0,55	0,2	3,2	0,64	0,512
31	203	513	107	6293	310	961	29791
10	100	110	90	1000	203	100	1000
1,53	1,02	2,55	0,51	1,5606	1,5	2,3409	3,581577

## Explorando o que você aprendeu e aprendendo mais

68. Observe a figura a seguir:



Qual é a fração representada pela parte colorida:

- a) Se a unidade é representada pelo quadrado?  
b) Se a unidade é representada pelo retângulo grande?

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os enunciados e os quadros em destaque dos exercícios 68 e 71.

68. a)  $\frac{3}{2}$  ou  $1 \frac{1}{2}$ ;  
b)  $\frac{3}{4}$ .

**Professor(a):** Explore mais atividades semelhantes às do exercício 69 para que os alunos assimilem a comparação de frações usando produtos cruzados.

Se optar, demonstre a equivalência entre as desigualdades das frações e dos produtos cruzados correspondentes. (Como os termos das frações são números naturais, ao multiplicar ou dividir convenientemente os dois membros das desigualdades, resultarão desigualdades de mesmo sentido).

Comente, usando o 2º quadro, como transformar número misto em fração imprópria e vice-versa.

Chame a atenção dos alunos para o fato de que a régua representada no primeiro quadro da figura do exercício 71 não está graduada em centímetros, e que, cada divisão menor, representa 1/8 da unidade escolhida. Comente que esta divisão é utilizada em régua ou “metros cuja unidade é a polegada”.

71. a)  $9/7 = 1 \frac{2}{7}$ ;

b)  $11/5 = 2 \frac{1}{5}$ .

Use um metro articulado, contendo medidas em polegadas, para explorar situações análogas à do exercício 71.

**Obs.:** Explore os dois significados das frações: parte-todo e fração como quociente:

**Parte-todo:** uma grandeza dividida em partes equivalentes (em área, em volume, em capacidade, em massa, ou mesmo em número de elementos iguais), na qual se consideram algumas dessas partes. A fração representa a relação existente entre o número dessas partes e o total de partes. Exemplos: a divisão de uma pizza em partes iguais, um litro de refrigerante em quatro copos de 250 mililitros etc.

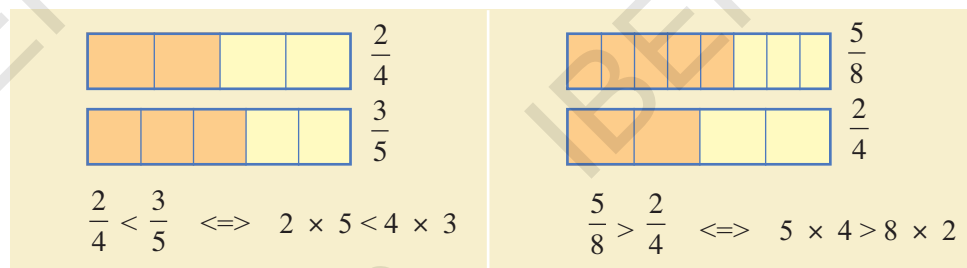
**Exemplo:** Imagine uma barra de chocolate dividida em três partes iguais e que você comeu duas.

A figura abaixo representa a fração 2/3 correspondente à parte que você comeu.



106

69. Você viu que duas frações são equivalentes se os produtos cruzados forem iguais. Agora, verifique o que acontece quando os produtos cruzados são diferentes:



Observe atentamente os dois resultados anteriores. Agora responda, em seu caderno, por quê:

a)  $\frac{3}{7} > \frac{5}{12}$

b)  $\frac{7}{9} < \frac{15}{18}$

69. a) Porque  $3 \times 12 > 5 \times 7$ ;  
b) Porque  $7 \times 18 < 15 \times 9$ .

70. Copie em seu caderno e escreva os sinais <, = ou >, entre as frações, para que resultem em frases verdadeiras:

a)  $\frac{3}{2}$   $\frac{1}{3}$

b)  $\frac{3}{5}$   $\frac{1}{3}$

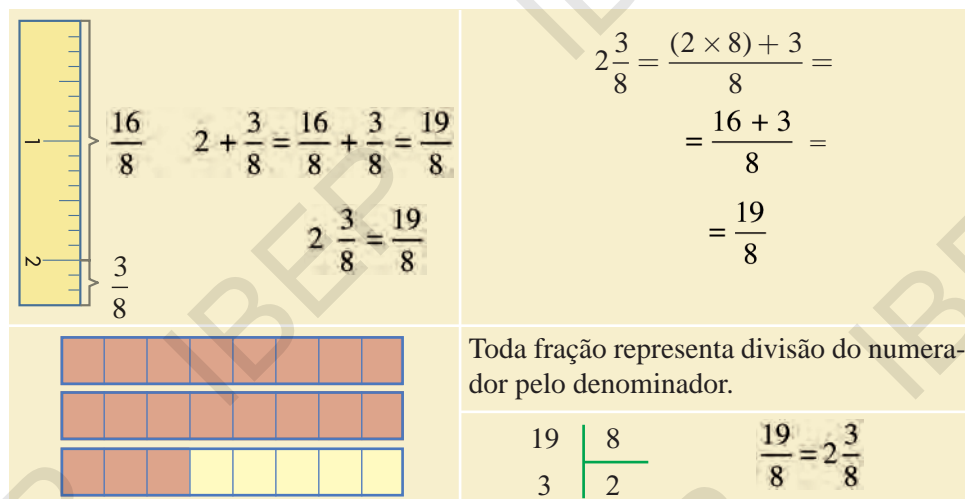
c)  $\frac{2}{4}$   $\frac{3}{6}$

d)  $\frac{2}{6}$   $\frac{5}{7}$

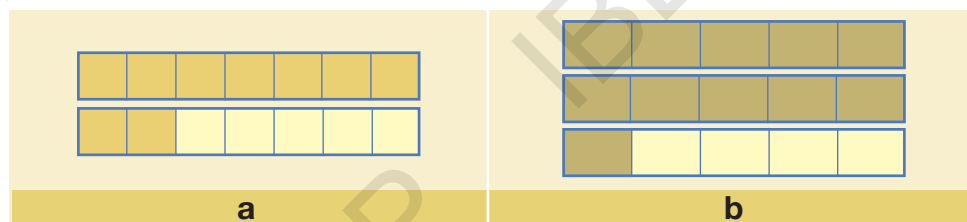
e)  $\frac{4}{9}$   $\frac{3}{2}$

70. a)  $3/2 > 1/3$ ;  
b)  $3/5 > 1/3$ ;  
c)  $2/4 = 3/6$ ;  
d)  $2/6 < 5/7$ ;  
e)  $4/9 < 3/2$ .

71. Observe os cálculos a seguir:



Agora, escreva de duas maneiras diferentes as frações representadas pelos desenhos a seguir:



**Fração como quociente:** divisão de um número natural por outro ( $a : b = a/b$ ,  $b \neq 0$ ). Para o aluno, ela se diferencia da interpretação anterior, pois dividir uma pizza em 3 partes e comer 2 dessas partes é uma situação diferente daquela em que é preciso dividir 2 pizzas para 3 pessoas. No entanto, nos dois casos, o resultado é representado pela mesma notação: 2/3.

**Exemplo:** Imagine duas barras de chocolate divididas por três meninos. A parte que cada menino recebeu é representada por  $1/3 + 1/3 = 2/3$ . A figura ao lado representa a divisão de 2 por 3:  $2 : 3 = 2 \times 1/3 = 2/3$ . Fração como quociente de 2 por 3.



**72. Calcule:**

a)  $2\frac{3}{8} + \frac{6}{8}$

b)  $2\frac{3}{8} + \frac{3}{4}$

c)  $3 + 1\frac{1}{3} + \frac{2}{3}$

**73. Resolva:**

- a) Ênio tinha R\$ 1 500,00. Gastou  $\frac{8}{15}$  na compra de um casaco e  $\frac{6}{15}$  na compra de uma calça. Com o restante, comprou um cinto. Quanto custou cada artigo?
- b) Certo dia, em um estacionamento, um terço do total dos veículos eram automóveis, e um quarto eram caminhões. Que fração representa o restante de veículos que existiam no estacionamento?
- c) Júlio e Patrícia têm, juntos, R\$ 350,00. Patrícia tem  $\frac{1}{3}$  a mais que Júlio. Quanto cada um possui?
- d) Adriana gastou  $\frac{5}{8}$  do que tinha na compra de um vestido e  $\frac{2}{7}$  na compra de uma blusa, ficando ainda com R\$ 100,00. Quanto custou cada objeto que Adriana comprou, e quanto ela possuía inicialmente?
- e) Se um pai repartir  $\frac{5}{6}$  de certa quantia igualmente entre seus 4 filhos, que fração representará a parte que cada um ganhará?
- f) Maria pagou R\$ 12,50 por 10 metros de pano. Preciso comprar 3 metros desse mesmo pano. Quanto irei pagar? (Sugestão: procure calcular quanto custa 1 metro do pano.)

**74. Resolva os problemas com os valores monetários a seguir:**

- a) Dei R\$ 500,00 para pagar uma conta de R\$ 436,50. Quanto recebi de troco?
- b) Se 4 carretéis de linha custam R\$ 2,56, quanto custarão 7 carretéis?
- c) Em uma compra, paguei R\$ 500,00 e recebi R\$ 134,00 de troco. Quanto gastei?
- d) Comprei uma bicicleta por R\$ 1 320,00 e vendi por R\$ 1 145,00. Quanto tive de prejuízo?
- e) Um comerciante comprou um grampeador por R\$ 7,00 e o revendeu por R\$ 9,20. Qual foi o seu lucro?
- f) Um automóvel é alugado por R\$ 80,00 a hora. Quanto pagará uma pessoa depois de utilizá-lo por 7 horas?
- g) O aluguel de uma casa é de R\$ 540,00 por mês. Quanto pagará o inquilino ao proprietário depois de nela morar por 1 ano e 3 meses?
- h) Na compra de um terno, tive desconto de R\$ 75,00. Qual é o preço original do terno se o lojista me deu um recibo de R\$ 478,00?
- i) Como pagamento na compra de uma moto, Pedro deu R\$ 1 500,00 e mais cinco cheques de R\$ 1 100,00. Quanto pagou pela moto?
- j) A conta de luz deste mês veio com um aumento de R\$ 32,46. Quanto paguei, no mês anterior, se neste mês paguei R\$ 172,79?
- k) Retirei R\$ 560,00 de minha caderneta de poupança, ficando ainda com um saldo de R\$ 4 317,00 em depósito. Quanto era o meu saldo antes da retirada?
- l) Paguei R\$ 227,00 de imposto territorial e R\$ 347,00 de imposto predial. Quanto paguei ao todo?

72. a) 25/8;  
b) 25/8;  
c) 5.

Atividades a serem feitas pelos alunos no quadro, orientadas pelo professor (73 e 74).

Sempre que possível, sugira aos alunos que façam desenhos para facilitar a compreensão.

Sugira aos alunos, também, que expliquem a sequência de operações que utilizaram para resolver os problemas. No problema 73, por exemplo, pode-se fazer como indicado a seguir.

Em (a), desenhe um retângulo dividido em 15 partes iguais, pinte 8 de uma cor e 6 de outra.

Em (b), reduza as frações ao mesmo denominador e depois use um retângulo dividido em 12 partes iguais. Pinte 4 dessas partes de uma cor e 3 de outra.

Em (c), desenhe três retângulos divididos em 3 partes iguais e pinte o primeiro com uma cor. Use outra cor para colorir totalmente o segundo e, com a mesma cor, uma das partes do terceiro. O primeiro representa quanto tem Júlio e os dois outros representam o quanto tem Patrícia. Portanto, a soma (7/3) representa o quanto têm juntos. Agora, use redução à unidade.

Em (d), reduza as frações ao mesmo denominador e depois faça um quadriculado 8 x 7 e pinte 35 quadradinhos de uma cor e 16 de outra. Os cinco quadradinhos restantes correspondem a 10 reais. Agora, use redução à unidade.

Em (e), divida 5/6 por 4, ou seja, calcule  $5/6 \times 1/4$ .

Em (f), use redução à unidade.

73. a) Casaco: R\$ 800,00;  
Calça: R\$ 600,00;  
Cinto: R\$ 100,00;  
b) 5/12;  
c) Patrícia: R\$ 200,00;  
Júlio: R\$ 150,00;  
d) Vestido: R\$ 700,00;  
Blusa: R\$ 320,00. Possuía, inicialmente, R\$ 1 120,00;  
e) 5/24;  
f) R\$ 3,75.

74. a) R\$ 63,50;  
b) R\$ 4,48;  
c) R\$ 366,00;  
d) R\$ 175,00;  
e) R\$ 2,20;  
f) R\$ 560,00;  
g) R\$ 8 100,00;  
h) R\$ 553,00;  
i) R\$ 7 000,00;  
j) R\$ 140,33;  
k) R\$ 4 877,00;  
l) R\$ 574,00.

Leia o texto A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS na margem da seção “Verifique se você aprendeu” do capítulo 2.

Recomende ou explore a leitura de:

“Atividades e jogos com números” (p. 39-50)

Marion Smoothey – Tradução de Sérgio Quadros

Coleção Investigação Matemática

Editora Scipione

- a) Escreveria  $\frac{1}{3}$  usando três barrinhas verticais e, sobre elas, a oval;  $\frac{1}{4}$  com quatro barrinhas verticais com a oval sobre elas;  $\frac{1}{20}$  com os dois símbolos de U invertido, e, sobre eles, uma oval;
- b) Verificação feita pelos alunos.

## História das frações

Você já sabe que os egípcios usavam os símbolos a seguir como algarismos para escrever os números naturais:

Número	1	10	100	1 000
Símbolo		∩	9	⤵

Estes mesmos símbolos foram também utilizados para representar denominadores de frações. Eles usavam apenas frações de numerador 1, e as frações  $\frac{2}{3}$  e  $\frac{3}{4}$ . As frações com numerador 1 eram representadas por um novo símbolo: um oval escrito sobre os símbolos acima, sem uso do traço de fração. Por exemplo:

 $\frac{2}{3}$	$\frac{3}{4}$ 	 $\frac{1}{5}$	 $\frac{1}{10}$	 $\frac{1}{100}$
---	---	--	--	---

Júlia Bianchi, 2006

- a) Se você fosse usar essa numeração, explique como escreveria  $\frac{1}{3}$ ,  $\frac{1}{4}$ , e  $\frac{1}{20}$ .

Para representar outras frações, eles usavam somas e equivalências, como, por exemplo:

1.) Para representar  $\frac{2}{5}$ , usavam a soma  $\frac{1}{3} + \frac{1}{15}$ .

2.) Para representar  $\frac{4}{5}$ , usavam a soma  $\frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{10}$ .

- b) Faça as contas das duas expressões acima, simplifique as somas e verifique se eles estavam corretos.

**Professor(a):** Estimule os alunos a pesquisarem sobre papiros, e sobre a matemática no Egito Antigo. Quanto ao problema, a solução é a seguinte: o sapateiro gasta  $\frac{1}{10}$  de dia de trabalho para cortar material para um par, e  $\frac{1}{5}$  para fabricá-lo. Logo, ele gasta  $\frac{1}{10} + \frac{1}{5} = \frac{3}{10}$  de dia para fabricar um par desde o corte do material. Assim, por dia, ele consegue fabricar  $10/3 = 3 + \frac{1}{3}$  de pares de sandálias por dia.

O que sabemos hoje sobre a matemática no Antigo Egito está registrado em uns poucos **papiros** escritos entre 2 000 e 1 500 antes de Cristo – bem antigos, não? Nesses papiros encontramos problemas para serem resolvidos, com suas soluções, como se fossem livros como esse que vocês estão usando – imaginem, livros didáticos de mais de 3 000 anos! Num desses **papiros**, conhecido como **Papiro de Moscou**, encontramos o problema seguinte:

“Por dia um sapateiro consegue cortar couro para fabricar 10 pares de sandálias, se fizer só isso. E se ele já tiver as partes cortadas, consegue fabricar 5 pares por dia. Se ele, num dia, cortar o couro e também fabricar os pares de sandálias, quantas conseguirá produzir?”

A resposta dos egípcios é 3 pares de sandálias completos e  $\frac{1}{3}$  de um par. Resolvam!



## Seção olímpica

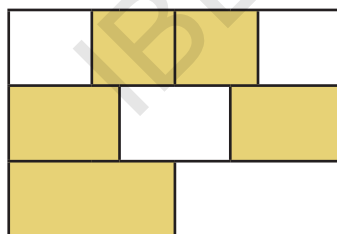
1. (OBMEP 2007) Turmalinas são pedras semipreciosas cujo valor varia de acordo com o peso; se uma turmalina pesa o dobro de outra, então seu valor é cinco vezes o dessa outra. Zita, sem saber disso, mandou cortar uma turmalina que valia R\$ 1 000,00 em quatro pedras iguais. Quanto ela irá receber se vender os quatro pedaços?

2. (OBMEP 2011) Em uma escola,  $\frac{1}{6}$  das meninas usam um único brinco; das meninas restantes, metade usa dois brincos e a outra metade não usa brincos. O número de brincos usados pelas meninas é:

- a) igual ao número de meninas.  
b) o dobro do número de meninas.  
c) a metade do número de meninas.  
d) dois terços do número de meninas.  
e) um terço do número de meninas.

Total de meninas: 12/12											
1/6 = 2/12											
2/12 1 único brinco				Metade restante usa dois brincos (5/12) ( Total de brincos: 2 x (5/12) = 10/12				Outra metade restante não usa brincos			

3. (OBMEP 2009) Adão atribuiu um valor numérico a cada letra do alfabeto. Multiplicando os valores atribuídos às letras, ele obteve PAPAÍ = 12, GALO = 5 e PAPAGAIO = 24. Qual é o valor que ele atribuiu à letra L?
4. (OBMEP 2013) A figura representa um retângulo de área  $36 \text{ m}^2$ , dividido em três faixas de mesma largura. Cada uma das faixas está dividida em partes iguais: uma em quatro partes, outra em três e a terceira em duas. Qual é a área total das partes coloridas?



5. (OBMEP 2006) Pedro vende na feira cenouras a R\$ 1,00 por quilo e tomates a R\$ 1,10 por quilo. Certo dia ele se distraiu, trocou os preços entre si, e acabou vendendo 100 quilos de cenoura e 120 quilos de tomate pelos preços trocados. Quanto ele deixou de receber por causa de sua distração?

1. R\$ 160. Sugestão: represente a pedra por um retângulo. Ao lado dele, outro retângulo igual dividido ao meio em partes iguais por um segmento cujos extremos sejam os pontos médios das bases. Logo, cada uma destas partes passou a valer  $1/5$  do valor inicial. Finalmente, desenhe um terceiro retângulo como o segundo e um segmento perpendicular ao anterior passando também pelo seu ponto médio, obtendo, assim, quatro partes iguais, que passam a valer  $1/5$  de  $1/5 = 1/25$  do valor inicial. Portanto, ao vender os quatro pedaços, Zita receberá  $4/25$  do valor inicial, isto é, 160 reais.

2. Letra A.

$1/6$  usa 1 brinco,  $5/12$  usam 2 brincos e  $5/12$  não usam brincos. O total de meninas é  $12/12$ . O total de brincos é  $1/6 + 2 \times 5/12 = 2/12 + 10/12 = 12/12$ .

3.  $5/2$ . Sugestão: use as palavras como números nos quais cada letra tem um único valor numérico. Escreva uma fração cujo numerador seja o produto PAPAÍ x GALO =  $12 \times 5$  e o denominador seja PAPAGAIO = 24. "Cancele" os pares de letras iguais no numerador e denominador, resultando para a letra L o valor  $5/2$ .

**Professor(a):** anteceda esta atividade com simplificação de frações fatorando numerador e denominador e "cancelando" os fatores comuns dos termos. Exemplificando: numerador  $2 \times 3 \times 5^2$  e denominador  $2 \times 3^2 \times 5$ . Após cancelar os fatores comuns, resultará a fração  $5/3$ .

4.  $20 \text{ m}^2$ . A parte colorida na faixa de cima representa 2 de 12 partes do retângulo, a parte do meio representa 2 de 9 partes do retângulo e a de baixo representa 1 de 6 partes do retângulo. A área total das partes equivale à soma:  $2/12 + 2/9 + 1/6 = 6/36 + 8/36 + 6/36 = 20/36$  da área do retângulo, ou seja,  $20 \text{ m}^2$ .

5. Como a diferença dos preços dos dois produtos é R\$ 0,10 por quilo, ao trocar os preços, Pedro ganhou  $100 \times 0,10 = 10$  reais na venda das cenouras e perdeu  $120 \times 0,10 = 12$  reais na venda dos tomates. Logo, no final, ele perdeu 2 reais.

6. R\$ 188,00. Faça as contas de trás para frente:  $(8 + 2) \times 2 = 20$ ,  $(20 + 2) \times 2 = 44$ ,  $(44 + 2) \times 2 = 92$  e  $(92 + 2) \times 2 = 188$ .

7. No produto  $45 \times a3 = 3bcd$ , é imediato concluir que  $d = 5$ , isto é,  $45 \times a3 = 3bc5$ . Fazendo uma estimativa de  $a$ , vemos que as possibilidades são duas:  $45 \times 73 = 3285$  e  $45 \times 83 = 3735$ , de onde se conclui que para  $a = 7$  temos  $b = 2$  e  $c = 8$ , e para  $a = 8$  temos  $b = 7$  e  $c = 3$ . Portanto,  $b + c + d = 2 + 8 + 5 = 7 + 3 + 5 = 15$ .

6. (OBM) Pedro saiu de casa e fez compras em quatro lojas, cada uma num bairro diferente. Em cada uma gastou a metade do que possuía e, a seguir, ainda pagou R\$ 2,00 de estacionamento. Se, no final, ainda tinha R\$ 8,00, que quantia tinha Pedro ao sair de casa?

7. (OBM) Na multiplicação a seguir,  $a$ ,  $b$ ,  $c$  e  $d$  são algarismos.

$$\begin{array}{r} 45 \\ a3 \times \\ \hline 3bcd \end{array}$$

Calcule  $b + c + d$ .

**REVISÃO** – A seu critério, proponha e verifique se os alunos utilizam com compreensão algumas ou todas as atividades a seguir:

Resolver problemas com frações e decimais usando figuras para facilitar a compreensão e o raciocínio.

Comparar valores de frações ou de decimais, decidindo se são iguais ou identificando qual é maior (ou menor).

Identificar ou dar exemplos de frações equivalentes, usando a propriedade do “produto cruzado”.

Simplificar frações usando o m.d.c. dos termos ou divisões sucessivas.

Reduzir frações ao mesmo denominador usando o m.m.c. dele.

Somar ou subtrair frações de denominadores diferentes.

Multiplicar ou dividir frações.

Calcular expressões com potências de frações.

Escrever números como produto de um número por uma potência de dez.

Representar, de duas maneiras diferentes, a soma de um número natural com uma fração.

Interpretar fração como quociente do numerador pelo denominador.

**Professor(a):** Leia a observação da página 22 (Sugestão sobre verificação da aprendizagem).

## Verifique se você aprendeu

Se ainda tem dúvidas sobre	Reveja os exercícios
Como resolver problemas com frações.	1 a 5, 7, 12, 21, 22, 28, 29, 32, 36, 37, 46, 73.
Como interpretar frações por meio de desenhos.	6, 9, 11, 29, 30, 31, 37, 38, 39, 40, 45, 52, 68.
Como comparar frações.	8, 11, 23, 24, 69, 70.
Como identificar ou escrever frações equivalentes.	9, 10, 13, 14, 37, 39, 40, 41, 42.
Simplificação de frações.	15, 16 a 20, 43.
Como reduzir frações ao mesmo denominador.	24 a 27.
Como calcular expressões com frações.	24, 26, 27, 30, 31, 33, 34, 35, 36, 38, 44, 45, 47, 48, 71, 72, 73.
Como comparar decimais.	49 a 52.
Como calcular expressões com decimais.	53, 54, 55, 58, 61, 63, 67.
Como resolver problemas com decimais.	56, 57, 59, 60, 62, 64, 65, 66, 74.

# CAPÍTULO 4

## Medidas e o dia a dia





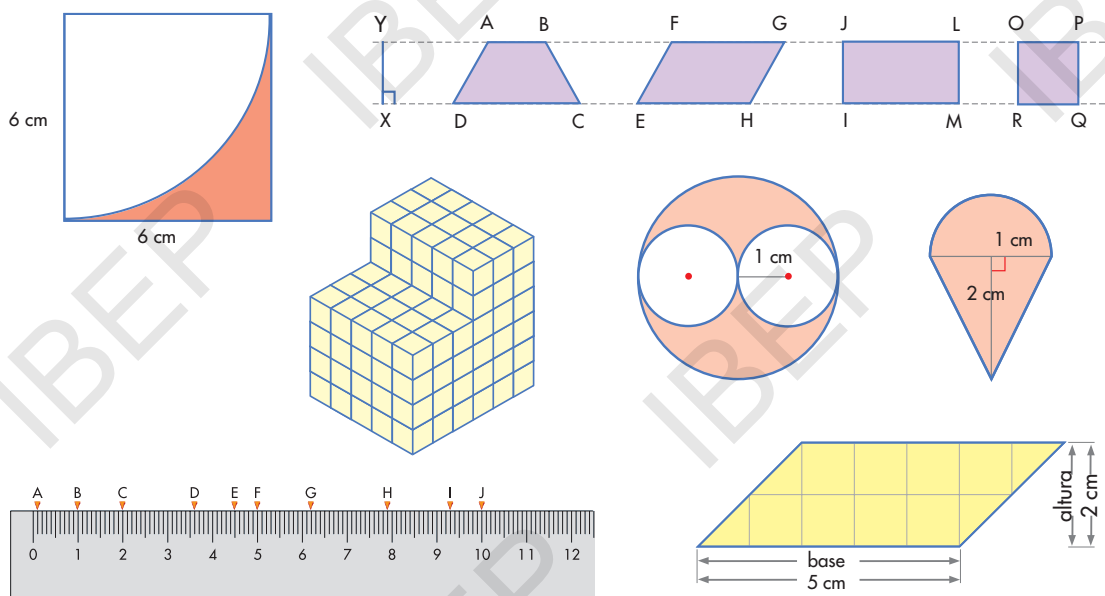
Ao lado, explicitamos os objetivos gerais do capítulo. Sugerimos um breve comentário sobre os mesmos, utilizando as ilustrações da página.

**Professor(a):** Neste e em outros capítulos, são exploradas diversas situações para que os alunos “descubram”, a partir de casos particulares, propriedades de números, de figuras, regras de cálculos etc. É extremamente importante que, após estas “descobertas”, sejam feitas observações afirmando que tais conclusões são verdadeiras (e, eventualmente, provar estes fatos) para que não fique a falsa ideia de que, a partir de poucos casos particulares, é possível generalizar. Sempre que possível, use expressões algébricas para expressar tais generalizações, bem como de algumas regularidades relacionadas com sequências numéricas.

## Você já resolveu alguns problemas relacionados com medidas de grandezas.

### Neste capítulo, você vai aprender como:

- Decidir qual é o instrumento mais adequado para medir grandezas dadas.
- Decidir qual é a unidade de medida mais adequada para medir grandezas dadas.
- Interpretar os significados de prefixos como “kilo”, “mili” e outros.
- Fazer estimativas de medidas.
- Interpretar e representar medidas por decimais ou frações.
- Resolver problemas relacionados com equivalências entre unidades de medidas.
- Resolver problemas sobre comprimentos, áreas, volumes, capacidade e massa.
- Resolver problemas sobre perímetros dos principais polígonos e sobre comprimento de circunferências e arcos de circunferência.
- Resolver problemas sobre áreas dos principais polígonos e sobre a área do disco e de setores circulares.
- Resolver problemas sobre perímetros de figuras compostas dos principais polígonos, da circunferência e de seus arcos.
- Resolver problemas sobre áreas de figuras cujos contornos são compostos dos principais polígonos, da circunferência e de seus arcos.
- Calcular áreas de superfícies de sólidos, interpretando suas planificações.
- Calcular volumes de prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas e de sólidos compostos de partes com essas formas.
- Resolver problemas relacionados com medidas de tempo: horas, minutos, segundos e frações de segundos.





# Aprendendo mais sobre medidas

## Explorando o que você já sabe

Faça a correspondência entre as frases do lado esquerdo e as frases do lado direito:

Para saber	Devo
1ª) Qual é a temperatura.	a) Somar os preços.
2ª) Qual é o comprimento de um muro.	b) Usar uma régua.
3ª) Qual é a largura da página do meu livro.	c) Usar uma balança.
4ª) Qual é a quantidade de farinha de um pacote.	d) Usar um termômetro.
5ª) Quanto pesa meu prato.	e) Usar um metro.
6ª) Qual é a despesa mensal na compra de pães.	f) Usar uma trena.
7ª) Qual é o comprimento do lápis.	
8ª) Qual é a largura da porta.	

### ATIVIDADES ORAIS

- 1ª ⇒ d.  
 2ª ⇒ f.  
 3ª ⇒ b.  
 4ª ⇒ c.  
 5ª ⇒ e.  
 6ª ⇒ a.  
 7ª ⇒ b.  
 8ª ⇒ e.



Explore alguns dos instrumentos de medida ilustrados na página, para fazer medidas no próprio ambiente da sala de aula: temperaturas corporais, medidas de diversos objetos com réguas, medidas de paredes com trenas, pesos de substâncias, desenhos de figuras geométricas simples com medidas dadas em centímetros etc.

**Professor(a):** Cabe, aqui, uma observação importante:

Neste capítulo, bem como nos anteriores, as medidas são tratadas como números racionais (números representados por decimais periódicos, incluindo os de período zero). Entretanto, é necessário esclarecer, em cada momento que abordarmos medidas (de comprimentos, áreas e volumes), que nem sempre é possível obter medidas de grandezas dadas por tais decimais, ou seja, existem diversas situações nas quais, por mais que se subdivida a unidade de medida, não se encontra fração dessa unidade de medida que permita medir tais grandezas. Isto se deve ao fato de que existem grandezas cujas medidas são expressas por outros números, chamados números irracionais. Os números irracionais podem ser caracterizados como sendo números cuja representação decimal não é periódica (tendo, portanto, infinitas ordens decimais e não contendo períodos). Sugere-se explorar este fato usando a conhecida representação, na reta numerada, da raiz quadrada de 2, afirmando (ou mesmo demonstrando) que se trata de um número irracional. Faça observações análogas para outros irracionais como o  $\pi$  e diversas raízes quadradas de números naturais que não são quadrados perfeitos. Em particular, esclareça que os cálculos envolvendo perímetros ou áreas de objetos que têm partes limitadas por circunferências ou arcos de circunferências são expressos por números racionais próximos das medidas reais. Observação análoga se deve fazer ao calcular volumes de objetos que têm seus contornos limitados por partes de esferas.

Esclareça que um estudo mais detalhado será feito no nono ano.

Explore os mais diversos instrumentos de medida (ou, pelo menos, figuras representativas), propondo aos alunos que pesquisem sobre como são utilizados (principalmente os menos conhecidos no dia a dia). Explore, dentre os seguintes, os que julgar convenientes: balanças, metros, régua graduada, trenas, termômetros, vasilhames graduados, seringas de injeção, conta-gotas, transferidores, paquímetros, micrômetros, relógios, cronômetros, calibradores, hidrômetros, medidores de energia elétrica, microscópios, multímetros, tacômetros, torquímetros, altímetros, anemômetros, barômetros, taxímetros, velocímetros, voltímetros, amperímetros, ohmímetros, wattímetros, osciloscópios, frequencímetros.

Sugira aos alunos que façam uma pesquisa sobre os instrumentos menos conhecidos e sobre "metrologia".

Um ótimo site a ser explorado: <http://www.ipem.sp.gov.br/>

Nele, é possível explorar um conversor de unidades de medidas (comprimento, área, volume, massa, temperatura, velocidade, massa específica, força, energia). Existem, também, diversos temas relacionados com o exercício de cidadania, como, por exemplo, a fiscalização da qualidade de diversos artigos colocados à disposição do público para aquisição.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, o quadro que antecede o exercício 1 (prefixos), bem como os quadros em destaque do mesmo exercício.

1. (a) 1 mililitro;
- (b) milésima parte do litro;
- (c) 1 quilograma;
- (d) 1 000 gramas;
- (e) 1 miligrama;
- (f) milésima parte do grama;
- (g) 1 quilômetro;
- (h) 1 000 metros;
- (i) 1 decímetro;
- (j) décima parte do metro;
- (k) 1 centímetro;
- (l) centésima parte do metro;
- (m) 1 milímetro;
- (n) milésima parte do metro.

Sugere-se antecipar os exercícios com atividades relacionadas a diversos objetos, principalmente do próprio ambiente da sala de aula.

## Aprendendo em sala de aula

Veja alguns exemplos de equivalências entre medidas:

Você vê	Você representa
1 quilômetro equivale a 1 000 metros	1 km = 1 000 m
1 decâmetro equivale a 10 metros	1 dam = 10 m
1 metro equivale a 100 centímetros	1 m = 100 cm

Os símbolos de diversas unidades de medida contêm prefixos. Por exemplo, o quilômetro representado, por km, contém o prefixo k, indicando 1 000 vezes a medida cujo símbolo ele antecede, no caso, o metro.

(km = 1 000 vezes m = 1 000 vezes o metro).

Veja, a seguir, uma relação de alguns prefixos e seus significados:

Prefixos	Abreviaturas	Múltiplos ou frações da unidade
quilo	<b>k</b>	1 000 vezes a unidade
hecto	<b>h</b>	100 vezes a unidade
deca	<b>da</b>	10 vezes a unidade
deci	<b>d</b>	0,1 da unidade
centi	<b>c</b>	0,01 da unidade
mili	<b>m</b>	0,001 da unidade

1. Em cada caso, escreva em seu caderno o que deve substituir corretamente as letras:

O litro é uma unidade de medida de capacidade e seu símbolo é **ℓ**.

Logo,

- 1 **ml** significa **a** e equivale a **b** do litro.

O grama é uma unidade de medida de massa e o seu símbolo é **g**. Logo,

- 1 kg significa **c** e equivale a **d** gramas.
- 1 mg significa **e** e equivale a **f** do grama.

O metro é uma unidade de medida de comprimento e seu símbolo é **m**.

Logo,

- 1 km significa **g** e equivale a **h** metros.
- 1 dm significa **i** e equivale a **j** do metro.
- 1 cm significa **k** e equivale a **l** do metro.
- 1 mm significa **m** e equivale a **n** do metro.

2. Faça **estimativas** e escreva, em seu caderno, um número aproximado ou uma medida aproximada que pode substituir cada letra:

- Meu livro de Matemática tem **a** páginas.
- O jogo de futebol durou **b** minutos.
- Comprei **c** de batatas e **d** de vinagre.
- O namorado deu **e** dúzias de flores para a namorada.
- Para fazer a camisa, a costureira gasta **f** de tecido.
- Minha mãe fez **g** docinhos para a festa.
- Meu irmão pesa **h** a mais do que minha irmã.
- Na festa de aniversário, foram consumidos **i** de refrigerantes.
- O médico recomendou andar **j** todos os dias.
- O salão de festas tem **k** de área.

2. Respostas variadas.

Por exemplo:

- (a) 200;
- (b) 90;
- (c) 3 kg;
- (d) 500 ml;
- (e) 3;
- (f) 1,5 m;
- (g) 100;
- (h) 10 kg;
- (i) 8 litros;
- (j) 4 km;
- (k) 130 metros quadrados.

3. Releia o exercício anterior e diga, em cada caso, **qual é a melhor escolha**:

a = 25  
b = 90  
c = 2 kg  
d = 30 litros  
e = 20  
f = 30 m  
g = 5  
h = 7 kg  
i = 2 litros  
j = 5 m  
k = 2 m<sup>2</sup>

a = 250  
b = 7  
c = 2 g  
d = 3 litros  
e = 2  
f = 3 m  
g = 300  
h = 70 kg  
i = 20 litros  
j = 5 km  
k = 10 m<sup>2</sup>

a = 2 500  
b = 360  
c = 2 mg  
d = 300 litros  
e = 200  
f = 30 cm  
g = 30 000  
h = 700 kg  
i = 2 000 litros  
j = 50 km  
k = 80 m<sup>2</sup>

3. a) 250;  
b) 90;  
c) 2 kg;  
d) 3 litros;  
e) 2;  
f) 3 m;  
g) 300;  
h) 7 kg;  
i) 20 l;  
j) 5 km;  
k) 80 m<sup>2</sup>.

4. Escreva, em seu caderno, **o nome da fração decimal** que deve substituir cada letra:

- O centímetro equivale à **a** do metro.
- O metro equivale à **b** do quilômetro.
- O grama equivale à **c** do quilograma.
- O miligrama equivale à **d** do grama.
- O mililitro equivale à **e** do litro.
- O centavo equivale à **f** de um real.

4. (a) centésima parte;  
(b) milésima parte;  
(c) milésima parte;  
(d) milésima parte;  
(e) milésima parte;  
(f) centésima parte.

5. Escreva, em seu caderno, **o número que deve substituir cada letra**:

- O grama equivale a **a** miligramas.
- O quilômetro equivale a **b** metros.
- O metro equivale a **c** centímetros.
- O litro equivale a **d** mililitros.
- O real equivale a **e** centavos de real.
- O quilograma equivale a **f** gramas.

5. (a) 1 000;  
(b) 1 000;  
(c) 100;  
(d) 1 000;  
(e) 100;  
(f) 1 000.

6. a) Três metros;  
b) Trezentos e cinquenta gramas;  
c) Quinhentos gramas;  
d) Cento e trinta e dois quilômetros;  
e) Duzentos e cinquenta e oito quilômetros;  
f) Dois litros;  
g) Oitenta metros quadrados;  
h) Cinco metros cúbicos.

7. a) 400 voltas;  
b) 1 550 metros.  
Explora-se, novamente, a ideia de quadriculados de 1 metro de lado como expressão da área em metros quadrados.

8. Área  $\Rightarrow 36\text{m}^2$ ;  
Perímetro  $\Rightarrow 24\text{ m}$ .

9. Os divisores de 36 são: 1, 2, 3, 4, 6, 9, 12, 18 e 36. Aos pares, diversos deles têm produto 36 (correspondendo à área do galpão em metros quadrados): 1 e 36, 2 e 18, 3 e 12, 4 e 9, 6 e 6. Destes, o par cuja diferença é 5 é o par formado pelos números 4 e 9. Portanto, o comprimento deve medir 9 metros, a largura 4 metros e, como consequência, o perímetro mede  $2 \times (9 + 4)$  metros, ou seja, 26 metros.

O exercício 10 certamente é conhecido do professor que tenha feito um curso de Cálculo. O resultado é interessante por revelar aos alunos que, na prática, é possível obter formas retangulares de mesma área com menor gasto de material, ou seja, menor perímetro.

10. a) Seu perímetro;  
b) 136 m;  
c) 900 m<sup>2</sup>;  
d) 30 m;  
e) 120 m;  
f) 16 m.

Caso julgue interessante, explore também o fato de que, dentre todos os retângulos que têm o mesmo perímetro, o de maior área é o quadrado.

Sugestão: retângulos de 20 por 30, 22 por 28 e 25 por 25 (mesmo perímetro: 100; maior área: 25 por 25).

6. Leia cada frase a seguir e, em seu caderno, escreva **em palavras** as medidas mencionadas.

- a) O tecido mediu 3 m.  
b) O fatiado de presunto pesou 350 g.  
c) A carne pesou 500 g.  
d) A distância entre Brejaúba e Brejetuba é de 132 km.  
e) O automóvel percorreu 258 km.  
f) A garrafa contém 2 l de refrigerante.  
g) A área do salão de festas é de 80 m<sup>2</sup>.  
h) O caminhão do Armando transporta até 5 m<sup>3</sup> de areia.

7. Paula descobriu que cada **volta completa de uma roda** de sua bicicleta corresponde a um deslocamento de aproximadamente 2,5 metros. Responda:

- a) Se Paula percorrer 1 km com a bicicleta, quantas voltas completas dará, aproximadamente, a roda?  
b) Se Paula andou de bicicleta até a roda completar 620 voltas completas, que distância aproximada Paula percorreu?

8. Para pintar as paredes de um salão, um pintor protegeu todo o piso com folhas quadradas de um metro de lado. Se ele gastou 36 dessas folhas, qual é, aproximadamente, a **área desse salão**? Se o salão for quadrado, qual é, aproximadamente, o seu perímetro?

9. Se o salão do exercício anterior for retangular e seu comprimento for 5 metros maior que a largura, qual é, aproximadamente, o seu **perímetro**? (Sugestão: identifique, dentre todos os divisores de 36, um par cujo produto seja 36 e cuja diferença seja 5.)

10. Teobaldo quer fazer um galpão retangular medindo 50 metros de comprimento por 18 metros de largura. Mas o construtor disse para ele que, se fizer o galpão com a mesma área em forma de quadrado, gastará menos tijolos. Será que ele tem razão? Vamos fazer as contas para verificar.

- a) Para verificar quantos metros de parede um galpão retangular de 50 m por 18 m tem, o que devemos calcular: seu perímetro ou sua área?  
b) Calcule o perímetro do galpão que Teobaldo pediu para ser feito.  
c) Calcule a área do mesmo galpão.  
d) Calcule o lado de um galpão quadrado que tenha a mesma área do galpão retangular.  
e) Calcule o perímetro desse galpão.  
f) Calcule quantos metros a menos de parede o galpão quadrado tem em relação ao galpão retangular.



11. Usando o símbolo **m**, **cm** ou **mm**, escreva, em seu caderno, o que substitui cada letra a seguir:

- O automóvel tem 1,4 **a** de largura.
- O automóvel tem 140 **b** de largura.
- A distância entre os dois postes é de 12 **c**.
- A largura da janela é de 0,9 **d** ou 90 **e**.
- O comprimento do lápis é de 15 **f** ou 150 **g**.

12. Usando o símbolo **kg** ou **g**, escreva, em seu caderno, o que substitui cada letra a seguir:

- O pacote de açúcar pesa 0,5 (a) ou 500 (b).
- O sabonete pesa 20 (c) ou 0,020 (d).

13. Usando o símbolo **l** ou **ml**, escreva, em seu caderno, o que substitui cada letra a seguir:

- A xícara de café contém 0,100 (a) ou 100 (b).
- O tubo contém 150 (c) de bronzeador.

## Aprendendo em casa

14. Usando o símbolo **km**, **m**, **cm** ou **mm**, escreva, em seu caderno, a **unidade de medida mais adequada para medir**:

- |                                    |  |
|------------------------------------|--|
| a) A distância entre duas cidades. | d) A espessura de um palito de fósforos. |
| b) O comprimento de um terreno.    | e) O comprimento deste livro.            |
| c) A largura de uma porta.         | f) O tamanho de seu dedo mínimo.         |

15. Usando o símbolo **kg**, **g** ou **mg**, escreva, em seu caderno, a **unidade de medida mais adequada para medir**:

- |                                   |                             |
|-----------------------------------|-----------------------------|
| a) Seu peso.                      | c) O peso de uma pulga.     |
| b) O peso de 200 grãos de feijão. | d) O peso de um comprimido. |

16. Usando o símbolo **l** ou **ml**, escreva, em seu caderno, a **unidade de medida mais adequada para medir o conteúdo de**:

- |                           |                                      |
|---------------------------|--------------------------------------|
| a) Uma garrafa de café.   | c) Um tubo de dentifrício.           |
| b) Uma ampola de injeção. | d) Um tanque de combustível de moto. |

17. Usando o símbolo **l** ou **ml**, escreva, em seu caderno, o que substitui cada letra a seguir:

- A garrafa de refrigerante contém 0,5 **a** ou 500 **b**.
- Um copo de leite contém 0,2 **c**.
- O copo maior de refrigerante contém 500 **d**.

Sugira aos alunos que explorem os itens (a), (b), (c), (f) e (h) do exercício 6, atribuindo valores monetários, atualizados, para as grandezas envolvidas. Com este objetivo, eles devem obter esses valores em jornais, folhetos de supermercados ou de lojas. Depois, devem formular perguntas sobre quanto se pagou pela aquisição de cada uma das grandezas, nas quantidades mencionadas.

11. (a) m;  
(b) cm;  
(c) m;  
(d) m;  
(e) 90 cm;  
(f) cm;  
(g) mm.

12. (a) kg;  
(b) g;  
(c) g;  
(d) kg.

13. (a) l;  
(b) ml;  
(c) ml.

14. a) km;  
b) m;  
c) cm;  
d) mm;  
e) cm;  
f) cm.

15. a) kg;  
b) g;  
c) mg;  
d) mg.

16. a) l;  
b) ml;  
c) ml;  
d) l.

17. a) l;  
b) ml;  
c) l;  
d) ml.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

- A: 5; B: 17; C: 32; D: 45; E: 59; F: 66; G: 78; H: 100; I: 113; J: 122.
- A: 0,5; B: 1,7; C: 3,2; D: 4,5; E: 5,9; F: 6,6; G: 7,8; H: 10; I: 11,3; J: 12,2.
- 10.

Sugere-se explorar atividades com réguas, medindo objetos na sala de aula.

Sugere-se, ainda:

A caracterização, na prática, das medidas como números racionais, ou seja, por mais precisa que seja uma medida no nosso dia a dia, ela se expressa por um decimal com poucas ordens decimais, ou seja, um número racional.

A ideia da não exatidão das medidas: medidas feitas por duas ou mais pessoas, dificilmente coincidem, principalmente se estamos preocupados com um número maior de ordens decimais na expressão de tais medidas.

As avaliações de medidas de objetos, como nos exercícios de 11 a 17.

As medidas não convencionais: medir usando palmas, varas, barbantes etc.

O sistema métrico decimal. As conversões. A equivalência com outros sistemas (a polegada, a milha, o galão etc.).

O uso das tabelas de dupla entrada para distâncias entre cidades.

Explorar embalagens de diversas formas para (quando possível): medir suas dimensões em milímetros; usar tais medidas para calcular o perímetro de algumas das faces.

O uso de outros instrumentos de medida: metro de lojista, metro articulado, trena.

O uso da proporcionalidade na conversão de medidas e distâncias. O uso das escalas no desenho arquitetônico e de peças, bem como nas ampliações. As medidas indiretas.

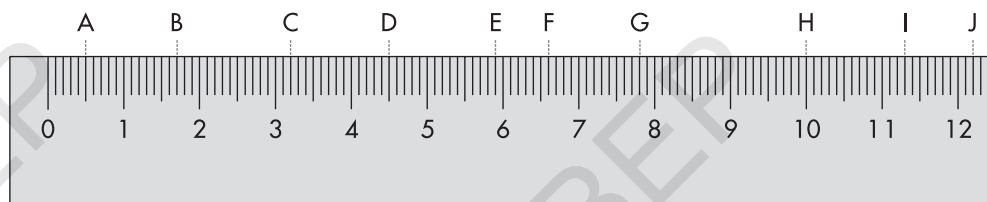
## Medidas de comprimento

### Explorando o que você já sabe

Você já sabe que: o **metro** é dividido em 10 partes iguais chamadas **decímetros**. Cada decímetro é dividido em dez partes iguais chamadas **centímetros**. Cada centímetro é dividido em dez partes iguais chamadas **milímetros**.

Sabe, também, que 1 000 metros equivalem a 1 **quilômetro**. Outros múltiplos menos usados do metro são o **decâmetro** (10 metros) e o **hectômetro** (100 metros).

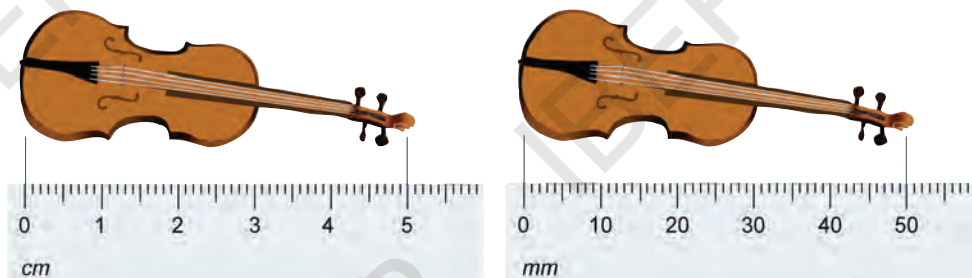
Observe a régua abaixo, graduada em centímetros e milímetros:



- Diga quais são as distâncias entre o zero da régua e os pontos correspondentes a cada letra, em milímetros.
- Diga quais são as distâncias entre o zero da régua e os pontos correspondentes a cada letra, em centímetros.
- Quantos milímetros formam um centímetro?

### Aprendendo em sala de aula

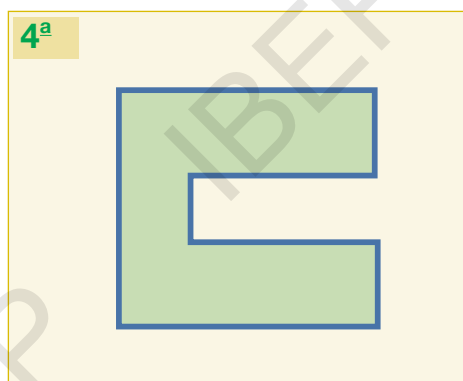
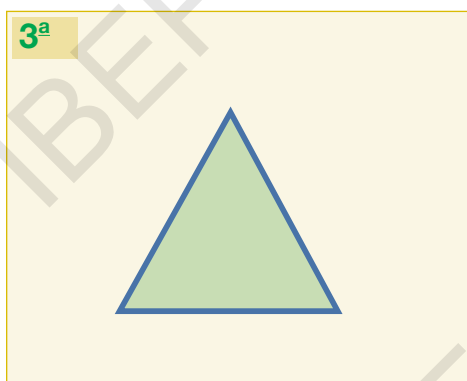
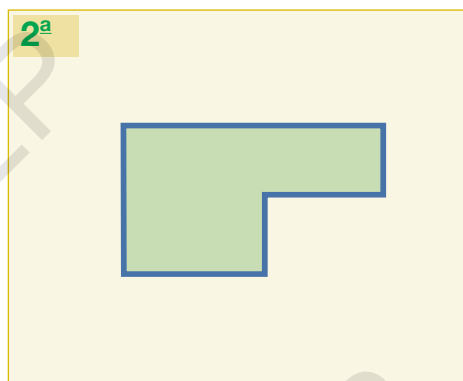
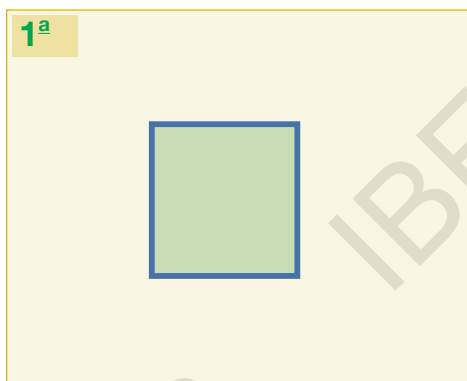
18. A seguir, você vê, sendo medidas, duas ilustrações de um violino.



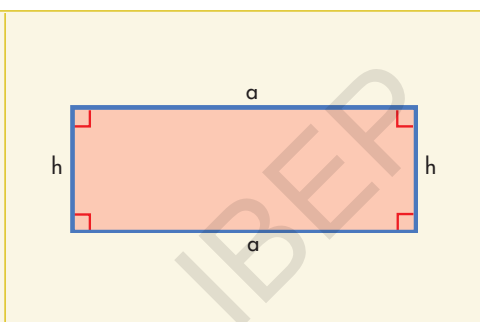
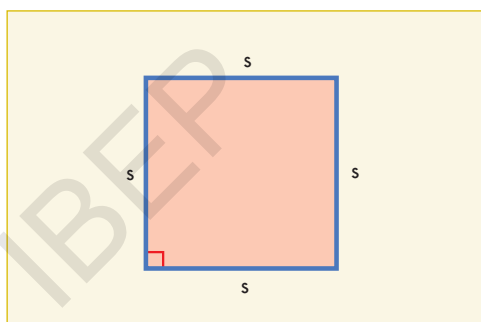
Julia Bianchi, 2006

- Em qual das duas figuras a ilustração está sendo medida em centímetros?
- Em qual delas a medida é dada em milímetros?
- Quantos centímetros mede a primeira ilustração?
- Quantos milímetros mede a segunda ilustração?
- Se as medidas forem iguais a 5,1 cm e 51 mm, elas são equivalentes?

19. Use uma régua para medir os lados das figuras a seguir, em milímetros. Depois, calcule os **perímetros** aproximados delas:



20. As medidas dos lados das duas figuras a seguir estão representadas por letras.



Escreva as **expressões dos perímetros** dessas figuras, usando as letras que representam suas medidas.

- Primeira figura;
- Segunda;
- Aproximadamente, 5 cm;
- Aproximadamente, 50 mm;
- São equivalentes.

#### ATIVIDADE EXTRA

Recore o conceito de escala e explore a 1ª e a 2ª figura, do exercício 19, como representativas de dois salões, na escala de 1 : 400. Peça as medidas aproximadas do lado do primeiro salão e o perímetro do segundo.

R) 7,6 m e 43,2 m.

19. Respostas aproximadas dos alunos:

1ª) 76 mm.

2ª) 108 mm.

3ª) 90 mm.

4ª) 174 mm.

Desenhe, no quadro, figuras compostas de polígonos como no exercício 19 e solicite a alguns alunos que, medindo-as, com a régua da sala de aula, calculem seus perímetros.

Proponha o cálculo de perímetros desenhando, no quadro, figuras como as do exercício 20 e registrando suas medidas. Proponha, também, o cálculo de perímetros de polígonos regulares, conhecida a medida de um dos lados, bem como o problema recíproco, isto é, informe o perímetro e peça a medida dos lados de polígonos regulares.

20. Quadrado:  $4s$ .  
Retângulo:  $2a + 2h$ .

#### ATIVIDADE EXTRA

Se o primeiro quadrado representa um terreno cujo perímetro mede 120 metros, qual é a medida de seus lados?

R) 30 metros.

Sugira a um aluno que represente a situação do problema 21 com um desenho no quadro e o explore com perguntas que conduzam o raciocínio.

21. 495 m.

**Professor(a):** Se julgar oportuno, comente a existência de mais três múltiplos da unidade: mega (M) 1 000 000 vezes a unidade, giga (G) 1 000 000 000 vezes a unidade e tera (T) 1 000 000 000 000 vezes a unidade, aproveitando a oportunidade de representar as potências de 10, correspondentes:  $10^6$ ,  $10^9$  e  $10^{12}$ , respectivamente. Comente também, as frações da unidade: micro ( $\mu$ ) 0,000 001 da unidade e nano (n) 0,000 000 001 da unidade (com as correspondentes potências de dez:  $10^{-6}$  e  $10^{-9}$ ).



Son Salvador

22. (a) 100;  
(b) 10;  
(c) 0,01;  
(d) 0,001.

Explore, novamente, atividades com a régua, principalmente ao reforçar a compreensão de que cada 10 milímetros equivalem a 1 cm. Use, também, uma fita métrica para relacionar centímetros com decímetros, e estes com o metro.

21. Edson vai cercar, com arame farpado, um terreno retangular de 36 metros de comprimento por 15 metros de largura. Ele vai deixar aberto um espaço de 3 metros para colocar um portão. Quantos metros de arame ele precisará comprar se pretende dar 5 voltas de arame no terreno?

Professor, resolver esse problema foi fácil. Mas, como proceder para resolver um problema que tem medidas em metros e centímetros como o seguinte?

Dario vai colocar rodapé em uma sala retangular que tem 7 m de comprimento e 5 m de largura. Nessa sala, existem três portas de 80 cm de largura. Sabendo que o rodapé custa R\$ 4,00 o metro, calcule quanto Dario gastará para comprar todo o rodapé necessário para colocar nessa sala.

Para resolver esse e diversos outros problemas, você deve saber a equivalência entre as medidas dadas em metros, decímetros, centímetros etc. É o que você vai aprender nos próximos exercícios.

22. Observe novamente a tabela de prefixos:

Prefixos	Abreviaturas	Múltiplos ou frações da unidade
quilo	k	1 000 vezes a unidade
hecto	h	100 vezes a unidade
deca	da	10 vezes a unidade
deci	d	0,1 da unidade
centi	c	0,01 da unidade
mili	m	0,001 da unidade

Compare a tabela a seguir com a anterior e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Símbolo	Nome	Múltiplos ou frações da unidade
km	quilômetro	1 000 metros
hm	hectômetro	(a) metros
dam	decâmetro	(b) metros
m	metro	1 unidade de medida de comprimento
dm	decímetro	0,1 do metro
cm	centímetro	(c) do metro
mm	milímetro	(d) do metro



23. Diga a quantos milímetros equivalem:

- a) 1 cm      c) 3 cm  
b) 2 cm      d) 4 cm

23. a) 10 mm;  
b) 20 mm;  
c) 30 mm;  
d) 40 mm.

24. Se uma medida é dada em centímetros, por quanto devemos multiplicá-la para obter a medida equivalente em milímetros?

24. 10.

25. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

12 cm = 120 mm	3,6 cm = 36 mm	17 cm = (a) mm
145 cm = (b) mm	7,8 cm = (c) mm	15,4 cm = (d) mm

25. (a) 170;  
(b) 1450;  
(c) 78;  
(d) 154.

26. Nos exercícios anteriores, você viu que:

120 mm = 12 cm	78 mm = 7,8 cm
36 mm = 3,6 cm	154 mm = 15,4 cm

Responda:

- a) 10 mm equivalem a quantos centímetros?  
b) Se uma medida é dada em milímetros, por quanto devemos dividi-la para obtermos uma equivalente em centímetros?

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os quadros em destaque dos exercícios 22 (segundo quadro) e 26.

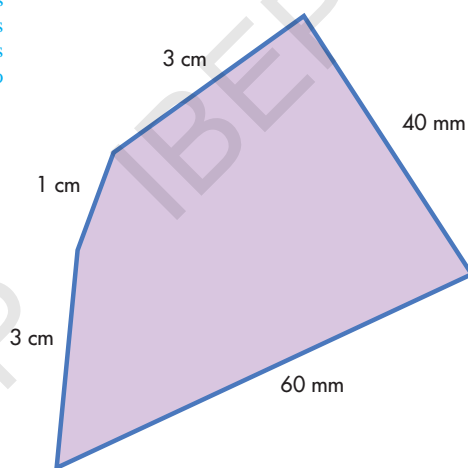
26. a) 1 cm;  
b) 10.

Explique para os alunos que as medidas correspondem aos objetos representados pelas figuras (salvo menção explícita).

Recorde o conceito de escala: razão entre a medida do desenho e a medida do objeto representado, na mesma unidade de medida, nesta ordem.

27. Observe a peça representada pela figura:

**Observação importante para os alunos:** as medidas anotadas nas ilustrações ou descritas nos exercícios são relacionadas com os objetos que elas representam e não com as próprias ilustrações.



27. a) Pentágono;  
b) 17 cm;  
c) 170 mm.

#### ATIVIDADE EXTRA

Use a resposta (b) para calcular quantos metros de tela seriam usados para cercar um terreno na forma da figura do exercício 27, representado pela figura, na escala de 1 : 1000.

R) 170 metros.

- a) Ela tem a forma de um quadrilátero ou de um pentágono?  
b) Calcule o perímetro da peça, em centímetros.  
c) Calcule também o perímetro em milímetros.

28. a) 2,503 m; 25,03 dm;  
250,3 cm; 2 503 mm;  
b) 2 metros e 503 milímetros =  
2,503 m;  
25 decímetros e 3 milímetros =  
25,03 dm; 250 centímetros e  
3 milímetros = 250,3 cm;  
2 503 milímetros =  
2,503 m;  
c) 1,432 m; 14,32 dm;  
143,2 cm; 1 432 mm;  
d) 1,432 m: 1 metro e  
432 milímetros;  
14,32 dm: 14 decímetros e  
32 milímetros;  
143,2 cm: 143 centímetros e  
2 milímetros; 1 432 mm:  
1 432 milímetros.

28. Observe a tabela a seguir. Nela, você vê as **equivalências entre o metro, o decímetro, o centímetro e o milímetro** e algumas medidas:

	metro	decímetro	centímetro	milímetro
Símbolos	m	dm	cm	mm
Equivalência	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m
<b>A</b>	3	4	6	7
<b>B</b>	2	5	0	3
<b>C</b>	1	4	3	2

A medida registrada na linha A da tabela pode ser escrita e lida na forma decimal de várias maneiras equivalentes. Veja:

$$3,467 \text{ m} = 34,67 \text{ dm} = 346,7 \text{ cm} = 3\,467 \text{ mm}$$

Cada uma destas escritas é lida assim:

$$\begin{aligned} 3,467 \text{ m} &= 3 \text{ metros e } 467 \text{ milímetros.} \\ 34,67 \text{ dm} &= 34 \text{ decímetros e } 67 \text{ milímetros.} \\ 346,7 \text{ cm} &= 346 \text{ centímetros e } 7 \text{ milímetros.} \\ 3\,467 \text{ mm} &= 3\,467 \text{ milímetros.} \end{aligned}$$

- a) Escreva as medidas da linha B em metros, decímetros, centímetros e milímetros.  
b) Escreva como se lê cada uma dessas medidas.  
c) Escreva as medidas da linha C em metros, decímetros, centímetros e milímetros.  
d) Escreva como se lê cada uma dessas medidas.

29. a) 10;  
b) 100;  
c) 1 000;  
d) 10;  
e) 100.

29. Veja novamente as **equivalências**:

$$3,467 \text{ m} = 34,67 \text{ dm} = 346,7 \text{ cm} = 3\,467 \text{ mm}$$

Agora, observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Para obter o equivalente de uma medida <b>A</b> dada em	Por outra <b>B</b> em	Devo multiplicar a medida <b>A</b> por
metros	decímetros	<b>a</b>
metros	centímetros	<b>b</b>
metros	milímetros	<b>c</b>
decímetros	centímetros	<b>d</b>
decímetros	milímetros	<b>e</b>

Você se lembra? No sexto ano, você aprendeu que:

$$2,3245 \times 10 = 23,245$$

$$2,3245 \times 100 = 232,45$$

$$2,3245 \times 1\,000 = 2\,324,5$$

Multiplicar um decimal por 10, 100, 1 000 corresponde a deslocar a vírgula uma, duas ou três ordens decimais para a direita, respectivamente.

$$23,245 : 10 = 2,3245$$

$$232,45 : 100 = 2,3245$$

$$2\,324,5 : 1\,000 = 2,3245$$

Dividir um decimal por 10, 100, 1 000 corresponde a deslocar a vírgula uma, duas ou três ordens decimais para a esquerda, respectivamente.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os três quadros em destaque do exercício 28 (1º quadro: 3 primeiras linhas), 1º e 3º quadros do exercício 29, enunciado e os dois primeiros quadros do exercício 30.

30. Veja mais uma vez as equivalências e o esquema indicativo do deslocamento da vírgula:

$$3,467 \text{ m} = 34,67 \text{ dm} = 346,7 \text{ cm} = 3\,467 \text{ mm}$$

→ A vírgula desloca-se para a direita.

km hm dam m dm cm mm

A vírgula desloca-se para a esquerda. ←

30. a) 1;  
b) 2;  
c) 3;  
d) 1;  
e) 2;  
f) 1;  
g) 2;  
h) 3;  
i) 1;  
j) 2.

Agora, observe as tabelas a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Para obter o equivalente de uma medida dada em	Por outra em	Devo deslocar a vírgula para a direita
metros	decímetros	<b>a</b> ordem decimal
metros	centímetros	<b>b</b> ordens decimais
metros	milímetros	<b>c</b> ordens decimais
decímetros	centímetros	<b>d</b> ordem decimal
decímetros	milímetros	<b>e</b> ordens decimais

Para obter o equivalente de uma medida dada em	Por outra em	Devo deslocar a vírgula para a esquerda
decímetros	metros	<b>f</b> ordem decimal
centímetros	metros	<b>g</b> ordens decimais
milímetros	metros	<b>h</b> ordens decimais
centímetros	decímetros	<b>i</b> ordem decimal
milímetros	decímetros	<b>j</b> ordens decimais

31. a)  $1,4 \text{ km} = 14 \text{ hm} = 140 \text{ dam} = 1.400 \text{ m}$ ;  
 b)  $0,004 \text{ hm} = 0,4 \text{ m} = 40 \text{ cm} = 400 \text{ mm}$ ;  
 c)  $17 \text{ mm} = 0,17 \text{ dm} = 0,017 \text{ m} = 0,0017 \text{ dam}$ .

31. Para escrever as equivalências, complete as medidas com Algarismos zero, se necessário:

- a) Dar as medidas equivalentes a  $1,4 \text{ km}$  em  $\text{hm}$ ,  $\text{dam}$  e  $\text{m}$ .  
 b) Dar as medidas equivalentes a  $0,004 \text{ hm}$  em  $\text{m}$ ,  $\text{cm}$  e  $\text{mm}$ .  
 c) Dar as medidas equivalentes a  $17 \text{ mm}$  em  $\text{dm}$ ,  $\text{m}$  e  $\text{dam}$ .

Muito bem!  
 Agora você está preparado para resolver o problema do Dario.  
 Vamos repeti-lo:



Son Salvador

32. a)  $24 \text{ m}$ ;  
 b) No local das 3 portas;  
 c)  $240 \text{ cm}$ ;  
 d)  $80 \text{ cm}$  da largura da porta  $\times$  3 portas;  
 e)  $2,4 \text{ m}$ ;  
 f)  $240 \text{ cm} : 100$ ;  
 g)  $24 \text{ m} - 2,4 \text{ m}$ ;  
 h)  $21,6 \text{ cm}$  de rodapé;  
 i)  $21,6 \text{ cm} \times \text{R\$ } 4,00$ ;  
 j)  $\text{R\$ } 86,40$ ;  
 k) Dario gastará  $\text{R\$ } 86,40$  para comprar todo o rodapé necessário para colocar nessa sala.

Dario vai colocar rodapé em uma sala retangular que tem  $7 \text{ m}$  de comprimento e  $5 \text{ m}$  de largura. Nessa sala, existem três portas de  $80 \text{ cm}$  de largura. Sabendo que o rodapé custa  $\text{R\$ } 4,00$  o metro, calcule quanto Dario gastará para comprar todo o rodapé necessário para colocar nessa sala.

32. Releia o problema do Dario e responda ou faça o que se pede:

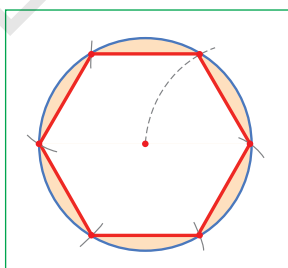
- a) Qual é o perímetro da sala?  
 b) Qual é a parte da sala que não terá rodapés?  
 c) Qual é a medida dessa parte sem rodapés, em centímetros?  
 d) Que conta você fez para calcular essa medida?  
 e) Qual é a medida dessa parte sem rodapés, em metros?  
 f) Que conta você fez para calcular essa medida?  
 g) Que conta se deve fazer para saber a quantidade de rodapés a ser gasta?  
 h) Faça essa conta. Que resultado você encontrou?  
 i) Que conta se deve fazer para saber quanto Dario gastará para comprar todo o rodapé?  
 j) Faça essa conta. Que resultado você encontrou?  
 k) Leia a pergunta do problema novamente e dê a resposta, usando uma frase.

O exercício 33 tem por objetivo dar uma primeira ideia da relação do comprimento de uma circunferência com o seu raio. Resolvendo-o, os alunos têm uma primeira aproximação para o comprimento da circunferência: é maior que seis vezes o raio.

**Professor(a):** Desenhe no quadro algumas circunferências e inscreva nelas hexágonos regulares. Peça a alguns alunos para, usando o compasso, verificar que os lados desses hexágonos têm medidas iguais às medidas dos raios das circunferências nas quais estão inscritos. Faça perguntas que os levem a concluir que “o perímetro de um hexágono regular inscrito em uma circunferência mede 6 vezes a medida do raio da circunferência”.

33. Na figura a seguir, você vê um hexágono regular inscrito em uma circunferência.

Use um compasso para verificar que o lado do hexágono é igual ao raio da circunferência.



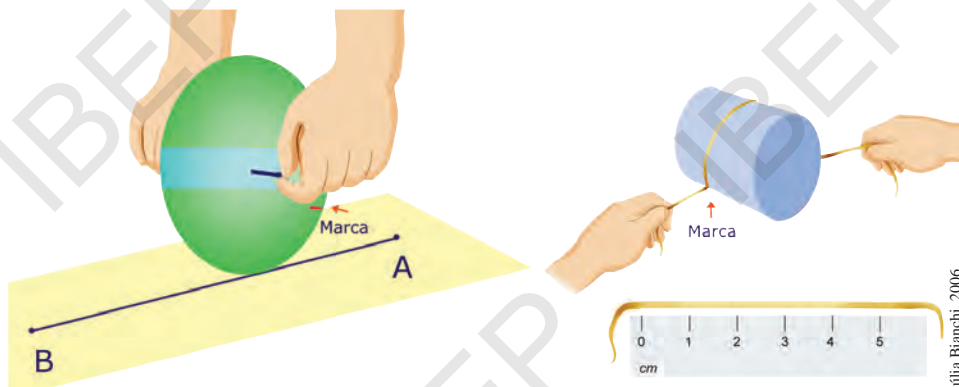
Agora, responda:

- a) O perímetro do hexágono mede quantos raios da circunferência?  
 b) O comprimento da circunferência é maior ou menor que o perímetro do hexágono?  
 c) O comprimento da circunferência é maior ou menor que seis vezes o seu raio?

33. a) 6 raios;  
 b) Maior;  
 c) Maior.



Nas figuras a seguir, você vê duas maneiras práticas de calcular o comprimento aproximado de uma circunferência:



Júlia Bianchi, 2006

Faça uma marca na circunferência de um disco circular e gire o disco, **sem deslizar**, sobre uma reta, partindo de um ponto A, até a marca chegar novamente sobre a reta. Marque, na reta, um ponto B coincidindo com a marca. Medindo o segmento AB, você terá o comprimento da circunferência.

Para medir a circunferência externa de um cilindro, envolva-o com um cordão e faça uma marca nas duas partes do cordão, como se vê na figura 2. Depois, meça a parte entre as duas marcas do cordão.

Você verificou que o comprimento da circunferência é um pouco maior que 6 vezes o raio. Na verdade, **o comprimento de qualquer circunferência é, aproximadamente, 6,28 vezes o raio.**

Portanto, se chamarmos de **C** o comprimento da circunferência e de **R** o seu raio, teremos a fórmula para calcular seu **comprimento aproximado**:

$$C = 6,28r$$

Observe que  $6,28 = 2 \times 3,14$ . Portanto, podemos também escrever:

$$C = 2 \times 3,14r$$

O motivo de escrevermos essa segunda fórmula é que 3,14 é um valor aproximado de um número muito importante na Matemática: o número  $\pi$  (pi), do qual voltaremos a falar em outros anos, com mais detalhes.

Promova atividades análogas às duas maneiras práticas descritas ao lado.

Peça, nos dois casos, para os alunos comprovarem que, dividindo os comprimentos encontrados pelo dobro do raio, obterão quociente pouco maior que 3.

Explore mais alguns exercícios sobre o comprimento da circunferência. Por exemplo:

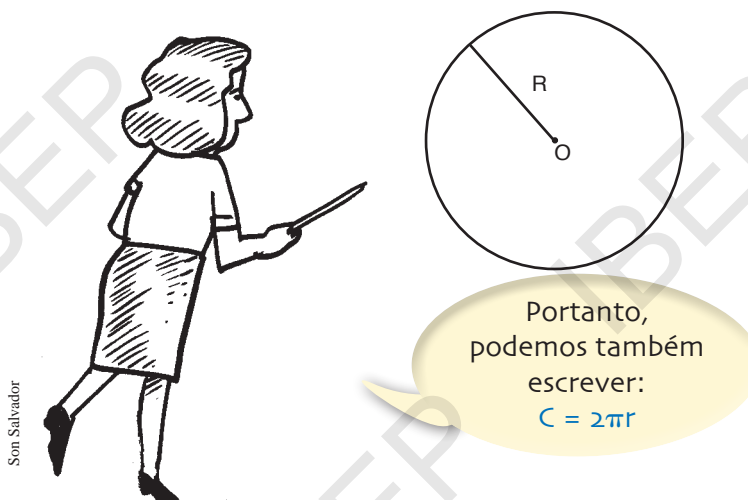
a) O pneu de um trator, mede .... cm de diâmetro externo. Ao dar uma volta completa percorre, aproximadamente, uma distância de quantos metros?

b) Um ciclista de uma prova de resistência deve percorrer .... km sobre uma pista circular cujo raio mede .... m. Qual o número aproximado de voltas que ele deve percorrer?

Em casa, os alunos devem anotar, em seus cadernos, o último quadro desta página e o texto abaixo do quadro.

Esclareça como ler:  $2\pi r$  ( $2 \pi r$ ) e o que significa: o produto de 2 pelo valor de pi pela medida do raio.

Explore exercícios de uso desta fórmula: a) Cálculos de comprimentos de circunferências de raios dados (em m, cm, mm, polegadas etc.). b) Cálculo aproximado dos raios de circunferências, dados seus comprimentos.



Son Salvador

No exercício 34, o aluno deve ser levado a concluir que o comprimento do arco da segunda figura é  $\frac{3}{4}$  do comprimento da circunferência correspondente.

34. a) 12,56 m;  
b) 4,71 m;  
c) R\$ 172,70.

Anteceda o exercício 35 com as perguntas a seguir, pedindo justificativas.

Na ilustração do exercício 35:

- a) Quanto medem, em graus, os arcos de circunferências das duas figuras?  
b) Qual dessas medidas é a décima parte de  $360^\circ$ ?  
c) A outra medida representa quantas partes de  $360^\circ$ ?

- d) O comprimento do arco da primeira figura corresponde a qual fração do comprimento da circunferência cujo raio mede 4 cm?  
e) O comprimento do arco da segunda figura corresponde a qual fração do comprimento da circunferência cujo raio mede 6 cm?

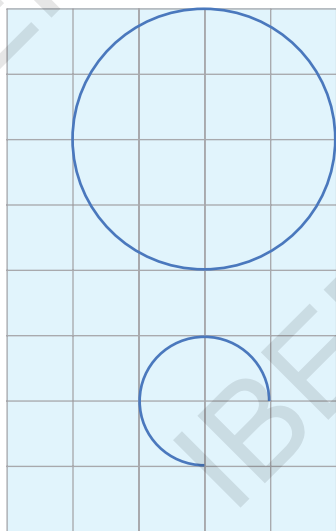
35. Valores aproximados:

- a) Figura da esquerda: 12,19 cm;  
Figura da direita: 15,768 cm;  
b) R\$ 1,22;  
R\$ 1,58.  
(Valores aproximados.)

36. (A)  $P = 14,28$  m;  
(B)  $P = 21,42$  cm.

Solicite que os alunos proponham, em casa, usando figuras diferentes, exercícios semelhantes aos de número 34 a 36, para posterior apresentação e discussão em sala.

34. Sérgio é serralheiro e fabricou duas peças: uma em forma de **circunferência** e outra de **arco de circunferência**, como se veem representadas nas duas figuras a seguir:



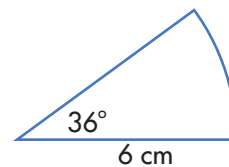
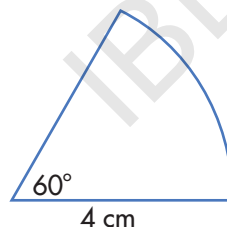
O raio da primeira peça mede 2 metros, e, o da segunda (o arco), mede 1 metro. Calcule, usando a fórmula do comprimento aproximado de uma circunferência dada no quadro anterior:

- a) O comprimento total aproximado do material gasto para fazer a primeira peça.  
b) O comprimento total aproximado do material gasto para fazer a segunda peça.  
c) Se cada metro de material gasto custa R\$ 10,00, qual é o custo total com material para fazer as duas peças?

Destaque o fato de que as medidas mencionadas referem-se aos objetos representados pelas ilustrações (e não a estas).

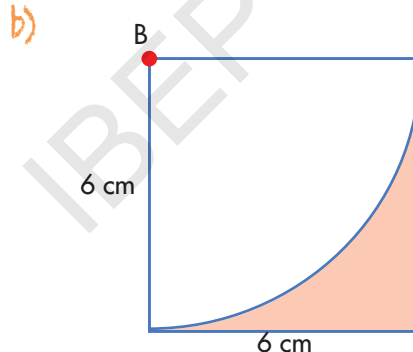
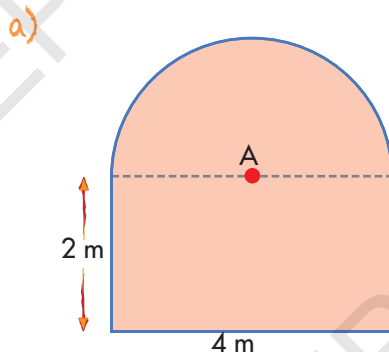
35. Veja as **figuras que representam duas outras peças** que Sérgio fabricou com o mesmo material. Cada uma delas é formada de um arco de circunferência e dois raios.

- a) Calcule o **comprimento total aproximado de material** que Sérgio gastou em cada uma das peças.  
b) Calcule o custo em reais para fazer cada uma dessas peças, ao mesmo preço do item c do exercício 34.



36. Calcule os **perímetros** aproximados dos contornos das superfícies coloridas representadas pelas figuras abaixo:

DICA: as partes curvas das figuras são arcos de circunferências de centros **A** e **B**, respectivamente.



### 37. Resolva os problemas a seguir:

- Tenho R\$ 33,75. Quantos metros de tecido de R\$ 4,50 o metro posso comprar?
- A altura de uma sobreloja é de 2,21 m. Quantos degraus tem a escada para alcançá-la, se cada degrau mede 17 cm de altura?
- Qual é o lucro de um comerciante que comprou 80 m de fio elétrico por R\$ 4,00 o metro e o revendeu por R\$ 6,20?
- Com 100 m de tecido, foram feitos 300 lenços. Quantos lenços poderão ser feitos com 175 metros?
- Márcia comprou 14,5 m de fazenda a R\$ 4,20 o metro. Carla comprou 11,7 m da mesma fazenda. Quanto gastou cada uma?
- Quanto paguei para colocar moldura em um quadro triangular regular se o carpinteiro me cobrou R\$ 4,80 o metro e se o quadro tem 17 cm de lado?
- O comprimento de um terreno retangular é o triplo da largura. Se o perímetro é de 96 m, quais são as dimensões do terreno?

Lembre-se: sempre que possível, use desenhos.

- 7,5 m;
- 13 degraus;
- R\$ 176,00;
- 525 lenços;
- Márcia gastou R\$ 60,90 e Carla gastou R\$ 49,14;
- R\$ 2,45;
- 12 m e 36 m.

Sugestão: em 37 (g), use  $\square$  para representar a medida da largura, obtendo a “equação”  $(\bullet + \bullet\bullet\bullet) + (\bullet + \bullet\bullet\bullet) = 96 \Rightarrow 8x \bullet = 96 \Rightarrow \bullet = 96 : 8 = 12$  (largura)  $\Rightarrow$  comprimento = 36. Novamente aqui, a “álgebra dos quadradinhos”.

Peça aos alunos que expliquem como resolveram os itens do exercício 37.

#### ATIVIDADE EXTRA

Duas polias cujos raios medem 50 centímetros são ligadas por uma correia que transmite os movimentos de uma para outra. A distância entre os centros das polias é de 4 metros. Calcule o comprimento da correia transmissora dos movimentos. Faça um desenho representando a situação descrita, explique o que fazer para resolver o problema e o resolva.

Solução: Como as polias têm raios iguais, é fácil concluir que o comprimento da correia é a soma dos comprimentos de duas semicircunferências (as partes que tocam as polias) e de dois segmentos de tangentes às polias cujas medidas são iguais à distância entre os centros.

Logo, expressando 50 centímetros como 0,5 metro, temos que o comprimento  $L$  da correia, em metros, é dado pela expressão  $2 \times 3,14 \times 0,5 + 2 \times 4 = 3,14 + 8 = 11,14$ .

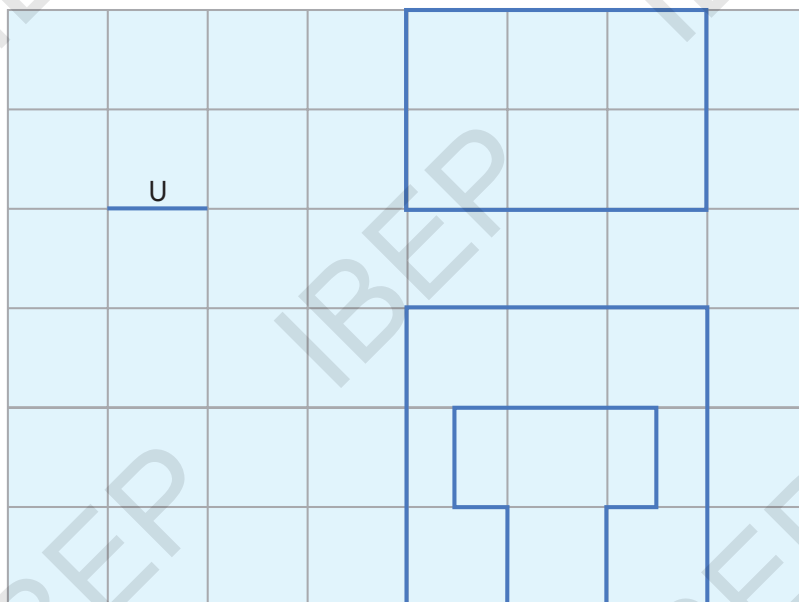
**R)** A correia mede, aproximadamente, 11,14 metros.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las. No item (b) do exercício 38, pede-se o perímetro aproximado, porque existem partes do contorno que “parecem” medir metade da unidade de comprimento adotada, mas nada garante este fato. O que se pode usar é que cada uma dessas partes mede aproximadamente metade da unidade de comprimento.

Comente com os alunos que, em certas situações, usamos unidades de medida arbitrárias para efetuar medidas. Foi o que se fez no exercício 38, convencionando cada lado dos quadrados do quadriculado como unidade de medida.

## Aprendendo em casa

### 38. Observe o segmento de medida $u$ e as duas figuras à direita dele:



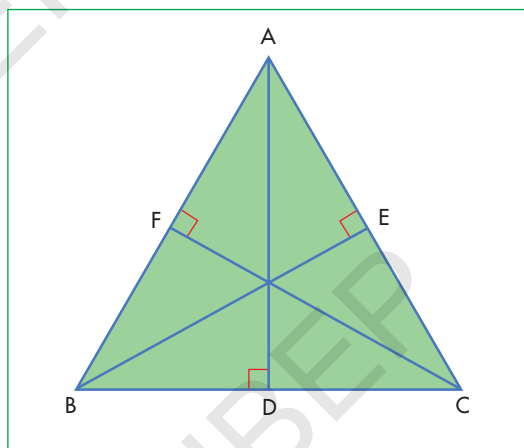
- Calcule o perímetro aproximado da primeira figura (o retângulo) usando o segmento  $U$  como unidade de medida de comprimento. 38. a) 10.
- Calcule o perímetro aproximado da segunda figura (uma poligonal fechada) usando o segmento  $U$  como unidade de medida de comprimento. b) 18.

39. Valores aproximados:

- a) 15 cm;
- b) 11,8 cm;
- c)  $(2,55)^2 + (4,3)^2 = 24,99$ ;
- d)  $5^2 = 25$ ;
- e) São aproximadamente iguais.

Na página 23, depois do exercício 48, citamos e exploramos atividades relacionadas com o Teorema de Pitágoras (sem demonstrá-lo). Aqui, no exercício 39, novamente uma abordagem sobre o Teorema. Comente com os alunos que os valores encontrados e calculados nos itens (c) e (d), do exercício 39, são aproximados, mas que, pelo Teorema de Pitágoras, sendo ABD um triângulo retângulo, tem-se  $(AD)^2 + (BD)^2 = (AB)^2$ .

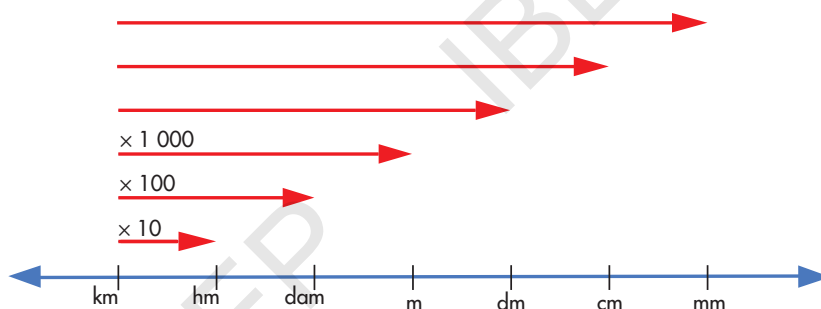
39. Use uma régua para medir os segmentos necessários para resolver o que se pede em relação à figura a seguir:



- a) Calcule o perímetro do triângulo ABC.
- b) Calcule o perímetro do triângulo ABD.
- c) Some os quadrados das medidas dos catetos AD e BD do triângulo ABD.
- d) Calcule o quadrado da medida da hipotenusa AB do triângulo ABD.
- e) Compare os resultados dos itens (c) e (d) anteriores.

40. Desenhos e exemplos dos alunos.

40. Para representar como se obtêm medidas de comprimentos equivalentes, Celina fez o desenho a seguir:



Ele significa que, para obter medidas equivalentes a uma medida dada em km, se você multiplicar por 10, obtém a medida em hm; se multiplicar por 100, obtém a medida em dam; e, se multiplicar por 1 000, obtém a medida em m.

Por exemplo:  $13 \text{ km} = 130 \text{ hm} = 1\,300 \text{ dam} = 13\,000 \text{ m}$ .

- a) Faça um desenho como o da Celina que mostre, dada uma medida em metros, como obter as medidas equivalentes em dam, hm e km, e dê um exemplo.
- b) Faça um desenho como o da Celina e que mostre, dada uma medida em metros, como obter as medidas equivalentes em dm, cm e mm, e dê um exemplo.
- c) Faça um desenho como o da Celina e que mostre, dada uma medida em mm, como obter as medidas equivalentes em cm, dm e m, e dê um exemplo.



41. Observe a **tabela**:

	metro	decímetro	centímetro	milímetro
símbolo	m	dm	cm	mm
equivalência	1 m	0,1 m	0,01 m	0,001 m
exemplo	2	3	7	6
<b>A</b>	3	9	0	6
<b>B</b>	5	6	3	1
<b>C</b>	3	4	0	7

A medida da linha do exemplo pode ser escrita assim:

- 2,376 m e se lê 2 metros, 376 milímetros. Ou:
- 23,76 dm e se lê 23 decímetros e 76 milímetros. Ou:
- 237,6 cm e se lê 237 centímetros e 6 milímetros. Ou:
- 2 376 mm e se lê 2 376 milímetros.

- Escreva as medidas da linha A em metros, decímetros, centímetros e milímetros.
- Escreva como se lê cada uma dessas medidas.
- Escreva as medidas da linha B em metros, decímetros, centímetros e milímetros.
- Escreva como se lê cada uma dessas medidas.
- Escreva as medidas da linha C em metros, decímetros, centímetros e milímetros.
- Escreva como se lê cada uma dessas medidas.

42. Complete usando os **nomes dos múltiplos ou divisores do metro** mais adequados para **medir aproximadamente** cada objeto citado:

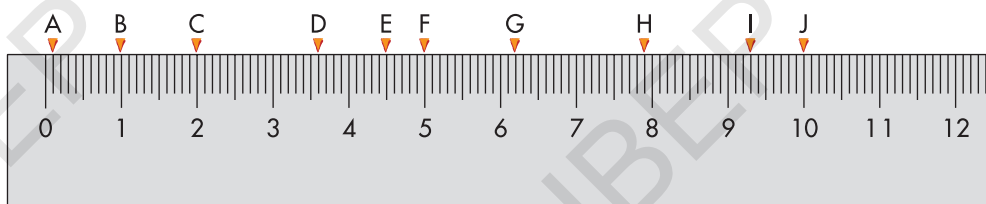
- A cabeça de um alfinete.
- A largura de um lote.
- A largura da unha do seu dedo polegar.
- A altura da parede da sua sala de aula.
- O tamanho de um palito de fósforo pequeno.
- A medida do seu palmo.
- A espessura do seu lápis.
- O tamanho de um giz inteiro.
- A largura da sua sala de aula.
- O comprimento de sua sala de aula.

- 3,906 m; 39,06 dm; 390,6 cm; 3 906 mm;
- 3 metros e 906 milímetros; 39 decímetros e 6 milímetros; 390 centímetros e 6 milímetros; 3 906 milímetros;
- 5,631 m; 56,31 dm; 563,1 cm; 5 631 mm;
- 5 metros e 631 milímetros; 56 decímetros e 31 milímetros; 563 centímetros e 1 milímetro; 5 631 milímetros;
- 3,407 m; 34,07 dm; 340,7 cm; 3 407 mm;
- 3 metros e 407 milímetros; 34 decímetros e 7 milímetros; 340 centímetros e 7 milímetros; 3 407 milímetros.

- Milímetro;
- Metro;
- Centímetro ou milímetro;
- Metro;
- Centímetro;
- Centímetro;
- Milímetro;
- Milímetro ou centímetro;
- Metro;
- Metro.

43. a) A: 1 mm; B: 10 mm;  
C: 20 mm; D: 36 mm;  
E: 45 mm; F: 50 mm;  
G: 62 mm; H: 79 mm;  
I: 93 mm; J: 100 mm;  
b) B: 1 cm; C: 2 cm;  
E: 5 cm; J: 10 cm.

43. Observe a régua a seguir:

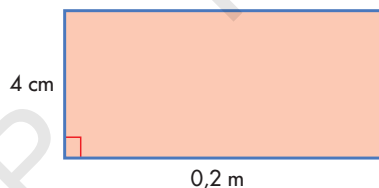


- a) Diga quais são as **distâncias, em milímetros**, entre o zero da régua e os pontos correspondentes a cada letra.  
b) Diga quais são as **distâncias, em centímetros**, entre o zero da régua e os pontos B, C, F e J.

44. a) 48 cm;  
b) 0,48 m.

Destaque o fato de que as medidas mencionadas referem-se aos objetos representados pelas ilustrações (e não a estas).

44. Observe o retângulo representado na figura:



Calcule o **perímetro** dele:

- a) Em centímetros.  
b) Em metros.

**Professor(a):** A seguir, retomaremos o estudo de áreas. É extremamente importante explorar atividades como as da página seguinte, sem o que os alunos assumirão apenas uma fórmula para o cálculo da área de um retângulo, sem compreender sua razão. Devem associar, em um primeiro momento, o conceito de área com quadriculados. Como a figura representa um trecho de um pátio pavimentado em forma de um retângulo que contém 15 quadrados de 1 metro de lado, devem “concluir” que a área do retângulo mede 15 metros quadrados, e que tal conclusão equivale a multiplicar comprimento vezes altura, ou, equivalentemente, base vezes altura.

Evidentemente, esta é uma primeira noção de área bem simplista e que deve ser estendida pouco a pouco, passando a valores racionais e, posteriormente, a valores irracionais.

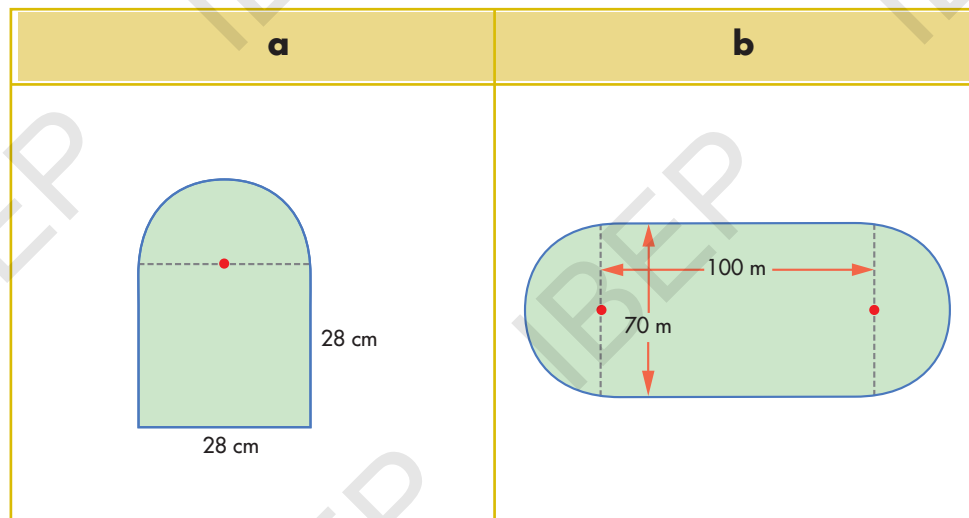
45. Calcule o **comprimento aproximado das circunferências** cujos raios medem:

- a) 2,3 cm;  
b) 1,8 cm;  
c) 1,4 cm;  
d) 100 m.

45. (a) 14,44 cm;  
(b) 11,30 cm;  
(c) 8,79 cm;  
(d) 628 m.

46. Calcule os **perímetros** aproximados da placa e da pista representadas pelas figuras a seguir: (As partes curvas das figuras são arcos de semi-circunferências.)

46. a) 127,96 cm;  
b) 459,8 m.

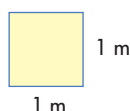


## Medindo áreas

Explore a leitura do texto:  
“Área de quadriláteros”  
Revista do Professor de Matemática – Nº 1 (p. 22)

### Explorando o que você já sabe

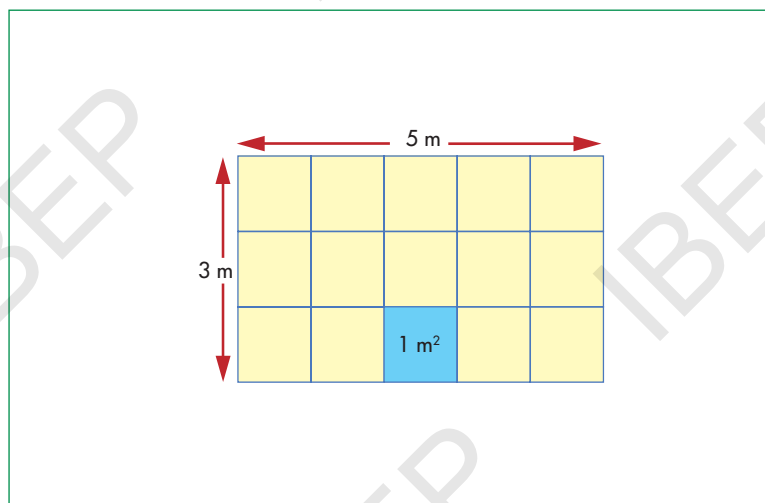
A figura abaixo representa um quadrado cujos lados medem 1 metro.



- Qual é a área desse quadrado?
- Qual é a área de um quadrado cujos lados medem 1 cm?
- Qual é a área de um quadrado cujos lados medem 1 mm?

$$\bullet 1 \text{ m}^2 \bullet 1 \text{ cm}^2 \bullet 1 \text{ mm}^2$$

A figura abaixo representa um trecho pavimentado de um pátio de forma retangular, cujas dimensões são: comprimento 5 m e largura 3 m.



- Esse trecho do pátio contém quantos quadrados de 1 m de lado?
- Qual a área desse trecho do pátio?  $\bullet 15 \text{ quadrados} \bullet 15 \text{ m}^2 \bullet 360 \text{ m}^2$
- Se o pátio tem também a forma retangular com 30 metros de comprimento e 12 metros de largura, qual a área total do pátio?

### Aprendendo em casa

47. Diga quanto mede o lado de um quadrado, sabendo que:

- a) Sua área mede  $9 \text{ m}^2$ .
- b) Sua área mede  $16 \text{ cm}^2$ .
- c) Sua área mede  $49 \text{ mm}^2$ .

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

Observação importante para os alunos: as medidas anotadas nas ilustrações ou descritas nos exercícios são relacionadas com os objetos que elas representam e não com as próprias ilustrações. Assim, na segunda ilustração, obviamente, as medidas 5 m e 3 m correspondem ao comprimento e largura do trecho do pátio nela representado.

Comente: para paralelogramos em geral, usaremos os termos base ou comprimento para designar uma de suas dimensões, e o termo altura para a outra dimensão.

Explorar:

Retângulos quadriculados de dimensões diferentes, mas que têm a mesma área.

Malhas de quadrados ou de triângulos equiláteros x áreas de figuras compostas de alguns desses quadrados ou desses triângulos, desenhadas nessas malhas. (Considerar cada quadradinho ou cada triângulo como unidade de medida de área.)

Decompor embalagens para calcular áreas de suas faces. (Cálculo, na prática, de áreas laterais e de áreas totais.)

Avaliação de áreas de figuras contidas em outras, ou figuras que contêm outras.

Cálculo de áreas utilizando desenhos arquitetônicos. Utilizar as escalas nas quais são apresentados os desenhos para calcular: áreas de diversos cômodos, problemas sobre revestimento de paredes, pisos etc.

Mais uma vez, trabalhe o conceito de área relacionada com “quantos quadrados unitários cabem no retângulo (ou na figura dada)”.

Reveja, também, o conceito de raiz quadrada.

47. a) 3 m;  
b) 4 cm;  
c) 7 mm.

48. a) 210 quadrados;  
b) 56 quadrados;  
c) 72 quadrados.

**Professor(a):** É recomendável explorar atividades sobre cálculo de áreas de pequenas superfícies. Para isto, sugerimos:

Recorte figuras de retângulos ou compostas de retângulos (como as dos exercícios 84 e 85 deste capítulo), nas mais variadas formas, porém fáceis de ser medidas em centímetros, e distribua para que os alunos calculem suas áreas. Para facilitar a correção, identifique-as com letras A, B, C etc.

Explore situações nas quais figuras distintas têm áreas iguais (figuras equivalentes).

Proponha que os alunos calculem as áreas aproximadas de alguns objetos da própria sala de aula.

Destaque o fato de que as medidas mencionadas referem-se aos objetos representados pelas ilustrações (e não a estas).

49. Caixa à esquerda:  $248 \text{ cm}^2$ .  
Caixa à direita:  
 $8\ 100 \text{ cm}^2$ .

50. O custo total para fazer a segunda caixa foi de R\$ 162,00.

51. a) R\$ 30,00;  
b) R\$ 88 200,00;  
c) R\$ 51,84;  
d)  $206 \text{ m}^2$ .

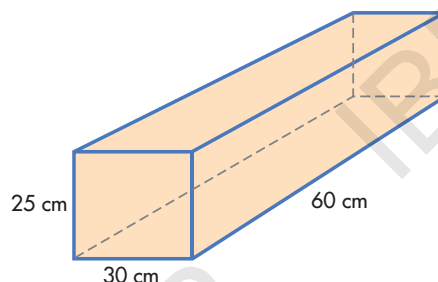
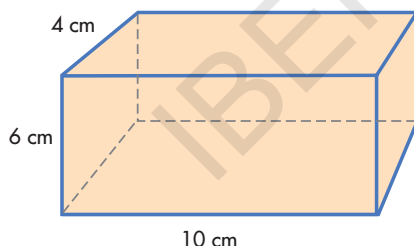
Peça aos alunos que expliquem como resolveram os itens do exercício 51.

52. Multiplicando a medida de comprimento e a medida de largura, temos a área do retângulo.

48. Quantos quadrados de 1 m de lado cabem em um retângulo cujas dimensões são:

- a) Comprimento 21 m e largura 10 m?  
b) Comprimento 8 m e largura 7 m?  
c) Base 9 m e altura 8 m?

49. Em uma fábrica de embalagens de papelão, são feitas caixas em forma de paralelepípedo como as representadas nas figuras a seguir:



Calcule a quantidade aproximada de papelão gasta para fazer cada uma dessas caixas (fechadas).

50. Considere que as duas caixas do exercício anterior foram feitas do mesmo tipo de papelão. Se o custo total do papelão gasto para fazer a primeira caixa foi de R\$ 4,96, calcule o custo total do papelão gasto para fazer a segunda caixa.

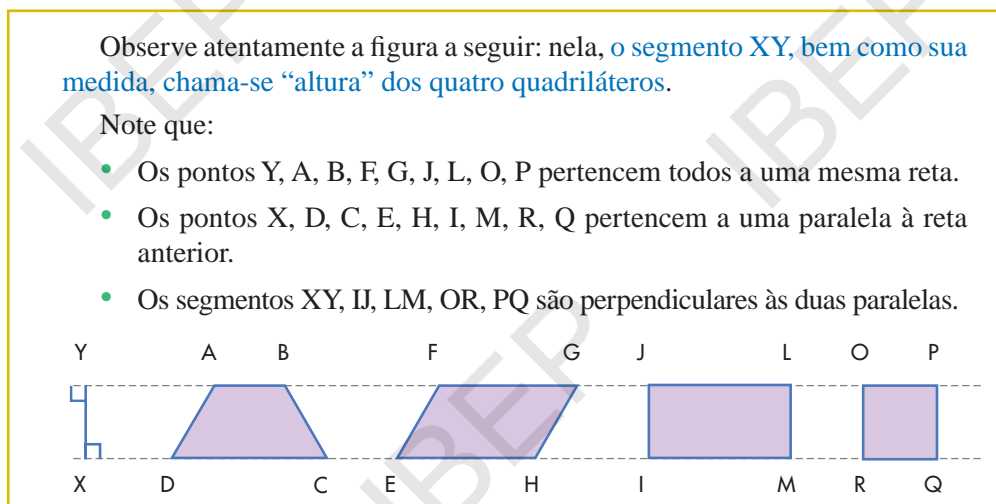
51. Resolva os problemas a seguir:

- a) Paguei R\$ 10 800,00 por um terreno de  $360 \text{ m}^2$ . Quanto paguei pelo metro quadrado?  
b) Qual é o preço de um terreno retangular de 12 m de largura por 30 m de comprimento, se está sendo vendido por R\$ 245,00 o metro quadrado?  
c) Para pintar os dois lados de um muro de 1,8 m de altura e 32 m de comprimento, um pintor cobrou R\$ 0,45 o metro quadrado. Quanto o pintor recebeu por esse trabalho?  
d) Uma quadra retangular de 18 m de comprimento por 8 m de largura foi construída em um terreno retangular de 14 m de largura por 25 m de comprimento. Qual é a área não ocupada pela quadra?

52. Discuta com seus colegas e descreva como calcular a área de um retângulo, conhecendo as medidas de seu comprimento e sua largura em uma mesma unidade de comprimento.



53. Discuta com seus colegas e descreva como calcular a área de um quadrado, conhecendo as medidas de seus lados.



54. Responda, com base na figura e nas informações anteriores:

- Como se chamam, pela ordem, os quatro quadriláteros?
- A altura de um trapézio é a perpendicular às suas bases?
- $IJ$  pode ser considerado altura do retângulo  $IJLM$ ?
- Quais lados do quadrado  $OPQR$  podem ser considerados suas alturas?

55. Observe as figuras e leia as informações que as acompanham:

TRIÂNGULO ABC	TRIÂNGULO APQ
A base é o segmento AC.	A base é o segmento AP.
A altura relativa à base AC é o segmento BH.	A altura relativa à base AP é o segmento QS.

Agora, diga se cada frase a seguir é verdadeira ou falsa:

- A base de um triângulo é um de seus lados. 55. Todas as frases são verdadeiras.
- A altura de um triângulo é perpendicular à base ou à reta que a contém.
- Um dos extremos da altura de um triângulo é o seu vértice oposto à base.
- O segmento  $QS$  é uma altura do triângulo  $AQS$ .
- O segmento  $QS$  é uma altura do triângulo  $PQS$ .
- O segmento  $QS$  é uma altura do triângulo  $AQP$ .

53. Calculando o quadrado da medida do lado.

Desenhe, no quadro, os quatro quadriláteros e, no interior deles, uma das alturas.

54. a) Trapézio, paralelogramo, retângulo, quadrado;  
b) Sim;  
c) Sim;  
d)  $OR$  e  $PQ$ .

**Professor(a):** Explore as situações a seguir:

Desenhe duas paralelas e explore o fato de que todos os segmentos de perpendiculares a elas, com extremos que lhes pertencem, têm medidas iguais.

Desenhe, no quadro, um triângulo como o triângulo  $ABC$  do exercício 39 deste capítulo e as suas três alturas  $AD$ ,  $BE$  e  $CF$ . Explore a situação para que os alunos compreendam que qualquer triângulo tem 3 alturas. Se julgar conveniente, destaque o fato de que as 3 alturas se interceptam em um único ponto, bem como explore alturas de triângulos obtusângulos como o triângulo  $ABC$  do exercício 55.

Desenhe também, no quadro, o triângulo obtusângulo  $ABC$  do exercício 55 (mantendo o lado  $AC$  na posição horizontal), escreva, de forma inclinada, próximo do lado  $BC$ , a palavra “base” e sugira a um aluno que desenhe a altura relativa a essa base. Esta atividade objetiva deixar claro para os alunos que qualquer um dos lados de um triângulo pode ser considerado base dele, evitando a interpretação de que base de triângulo tem que ser um dos lados situados sobre uma horizontal. Reforce esta atividade desenhando triângulos tais que nenhum de seus lados esteja contido em horizontais e explorando os conceitos de base e altura.

Desenhe 3 trapézios no quadro inserindo medidas nas bases e nas alturas, e identifique pelos nomes: base menor, base maior e altura. Varie as posições de tais trapézios (dois com bases horizontais, um com base menor acima e outro com base menor abaixo, e o terceiro com bases inclinadas). Depois, desenhe mais outros trapézios e sugira que os alunos façam medidas das bases e alturas usando régua graduada.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, o quadro em destaque do exercício 55.

56. a) Base  $\Rightarrow$  3 / altura  $\Rightarrow$  2;  
 b) Base  $\Rightarrow$  2 / altura  $\Rightarrow$  2;  
 c) Base  $\Rightarrow$  2 / altura  $\Rightarrow$  2;  
 d) Base  $\Rightarrow$  2 / altura  $\Rightarrow$  2.

**Professor(a):** Explore as situações a seguir, com base nas figuras **a** e **b** do exercício 57:

A área do paralelogramo da figura **a** equivale à soma das áreas de quantos quadradinhos de 1 cm de lado? (Use o fato de que cada duas metades desses quadradinhos equivale a um quadradinho.)  
 R) 10 quadradinhos.

E a área do paralelogramo da figura **b**? R) 6 quadradinhos.

Com base nas duas respostas anteriores, diga quais as áreas dos dois paralelogramos citados.

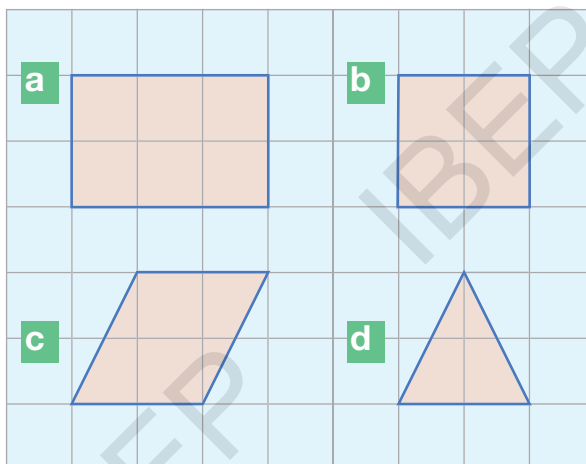
R) Área do paralelogramo

(a) : 10 cm<sup>2</sup>;

Área do paralelogramo  
 (b) : 6 cm<sup>2</sup>.

57. a) 10 cm<sup>2</sup>;  
 b) 6 cm<sup>2</sup>.

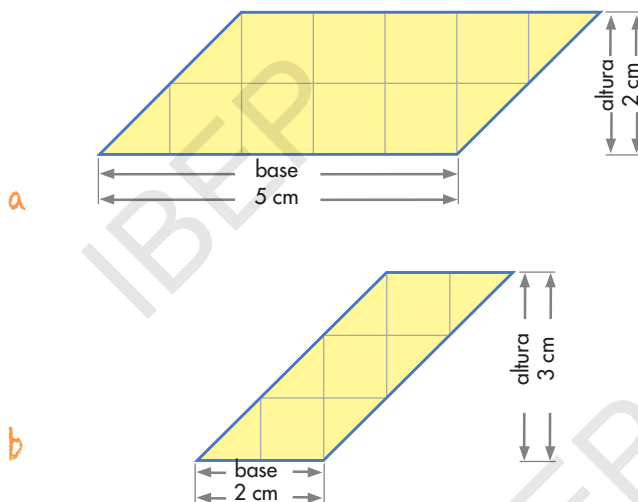
**56.** Observe:



Use um lado dos quadradinhos para medir:

- a) A base e a altura do retângulo.  
 b) A base e a altura do quadrado.  
 c) A base e a altura do paralelogramo.  
 d) A base e a altura do triângulo.

**57.** Calcule as áreas dos paralelogramos representados pelas figuras **a** e **b**, usando como unidade de medida os quadradinhos cujos lados medem 1 cm. Observe que eles são formados de quadradinhos e meios quadradinhos:



**Observação importante para os alunos:** as medidas anotadas nas ilustrações ou descritas nos exercícios são relacionadas com os objetos que elas representam e não com as próprias ilustrações.

58. a) 5 cm;  
 b) 2 cm;  
 c) 10 cm<sup>2</sup>.

**58.** Observe, ainda, os dois paralelogramos e responda:

- a) Quanto mede a base do paralelogramo da figura **a**?  
 b) Quanto mede a altura?  
 c) Qual é o produto da base pela altura do paralelogramo?

59. Responda às mesmas perguntas anteriores para o paralelogramo da figura b.

Professor, foi coincidência ou sempre a área de um paralelogramo é igual ao produto da base pela altura?



Você mesmo vai responder a essa pergunta. Para isso, faça o seguinte:



59. a) 2 cm;  
b) 3 cm;  
c) 6 cm<sup>2</sup>.

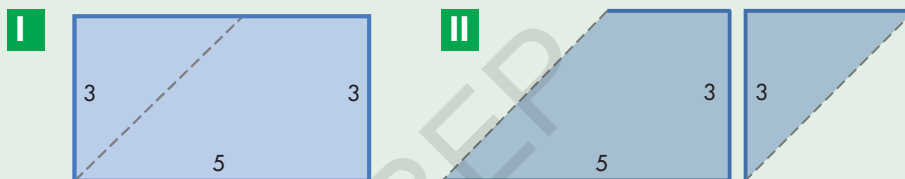
**Professor(a):** Explore, usando folhas de papel retangulares, a situação descrita nesta página, para que os alunos assimilem o resultado nela obtido: como calcular a área de um paralelogramo conhecidas as medidas da base e da altura (dadas em uma mesma unidade de medida).

Observe novamente que, para tornar as informações mais simples, facilitando aos alunos compreendê-las, muitas vezes, em um abuso de linguagem, iremos nos referir a segmentos no sentido de medida deles, o mesmo ocorrendo com os ângulos quando, por exemplo, dizemos que um é maior que outro.

Use um cartão retangular qualquer e faça nele um corte, como se vê tracejado na figura I.

Coloque a parte cortada à direita da parte maior que sobrou, como na figura II.

Observe que a base e a altura do cartão retangular são iguais à base e à altura do paralelogramo que você formou. Observe, também, que as áreas são iguais e podem ser obtidas multiplicando as bases pelas alturas, tanto do retângulo quanto do paralelogramo.



Em casa, os alunos devem anotar no caderno os textos do diálogo final do exercício 59.

Professor, agora me convenci: a área do paralelogramo é o produto da base pela altura.



Mas muito cuidado! As duas dimensões têm que ser dadas em uma mesma unidade de medida.



60.

Área do paralelogramo	Altura do paralelogramo	Base do paralelogramo
60 cm <sup>2</sup>		
	5 m	
		6 cm
		30 m
112 dm <sup>2</sup>		

61. (a) 345 cm<sup>2</sup>;  
(b) 360 cm<sup>2</sup>.

Peça aos alunos que expliquem como resolveram os itens do exercício 61.

Faça figuras análogas às do exercício 62 no quadro e sugira que um aluno desenhe as alturas, a partir do vértice superior, relativas ao lado horizontal do terceiro e quarto triângulos. Depois, desenhe os retângulos que circunscrevem esses triângulos, ou seja, os retângulos cujos lados são as bases, os segmentos a elas paralelos, passando pelos vértices e os dois segmentos verticais que têm por extremos os extremos das bases (como no exercício 65).

O objetivo é fazer com que os alunos descubram que as áreas desses triângulos são iguais à metade das áreas dos retângulos que os contêm. Faça perguntas que os convençam destes fatos.

62. Primeira figura: 4;  
Segunda figura: 6;  
Terceira figura: 6;  
Quarta figura: 3.

Justificativas: Nos dois primeiros casos, as áreas dos triângulos são claramente a metade das áreas de retângulos que têm bases e alturas iguais às dos respectivos triângulos.

No terceiro triângulo, a altura com extremo no vértice superior o divide em dois triângulos, cada um de área igual à metade de áreas de retângulos. Basta somar estas duas para obter a área do terceiro triângulo. Procedimento análogo ao do terceiro permite calcular a área do quarto triângulo, bastando considerar a altura cujo extremo é o vértice inferior do triângulo.

136

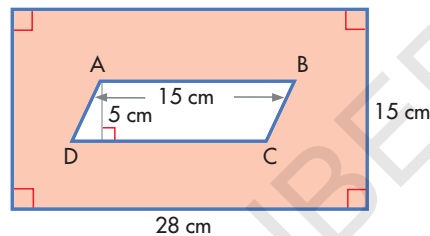
60. Copie e complete a tabela a seguir com os valores corretos de bases, alturas ou áreas de paralelogramos:

Base do paralelogramo	Altura do paralelogramo	Área do paralelogramo
12 cm	5 cm	
	7 cm	42 cm <sup>2</sup>
	12 m	360 m <sup>3</sup>
40 m		200 m <sup>2</sup>
14 dm	8 dm	

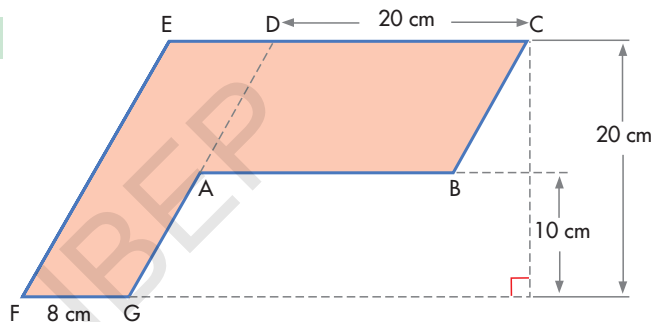
61. As duas figuras a seguir representam peças feitas em chapas de metal. Calcule as áreas coloridas, sabendo que:

- a) A peça (a) é formada de um retângulo com um buraco em forma de paralelogramo.  
b) A peça (b) é formada de duas partes em forma de paralelogramo.

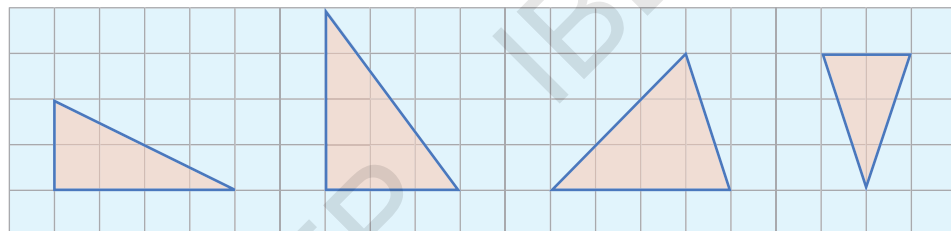
a



b



62. Na ilustração a seguir, considere cada quadradinho como unidade de medida de área. Depois, calcule as áreas dos 4 triângulos, comparando-as com as áreas de retângulos que os contêm. Sugestão: nos dois últimos triângulos, desenhe as alturas, decompondo cada um deles em dois triângulos retângulos. Justifique os resultados.



**63.** Considere os lados dos quadradinhos da figura anterior como unidade de medida de comprimento e calcule:

- a) A base e a altura de cada um dos quatro triângulos.  
b) A metade do produto da base pela altura de cada triângulo.

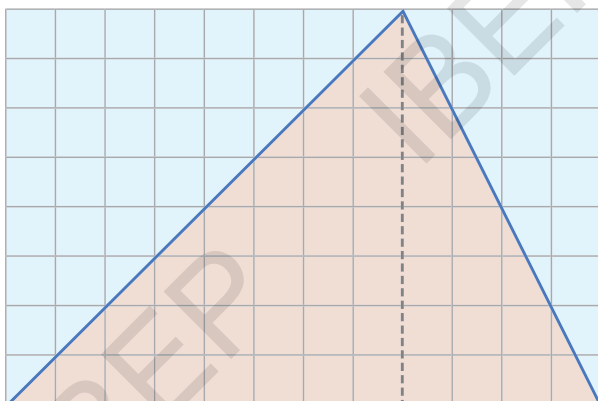
63. a) Primeira figura: base  $\Rightarrow 4$  / altura  $\Rightarrow 2$ ;  
Segunda figura: base  $\Rightarrow 3$  / altura  $\Rightarrow 4$ ;  
Terceira figura: base  $\Rightarrow 4$  / altura  $\Rightarrow 3$ ;  
Quarta figura: base  $\Rightarrow 2$  / altura  $\Rightarrow 3$ ;

b) Primeira figura: 4;  
Segunda figura: 6;  
Terceira figura: 6;  
Quarta figura: 3.

**64.** Reúna-se com seus colegas e faça o que se pede:

- a) Compare as áreas obtidas para os triângulos no exercício 62, com os resultados obtidos no item (b) do exercício 63.  
b) Discuta com seus colegas e descreva como calcular a área de um triângulo.

**65.** Observe a figura a seguir:



O retângulo quadriculado está subdividido em um quadrado e em outro retângulo.

O quadrado contém 64 quadradinhos e o retângulo contém 32 quadradinhos.

Considere cada quadradinho como unidade de medida e responda:

- a) Qual é a área do quadrado?  
b) Qual é a área do retângulo menor?  
c) Se você somar essas duas áreas, que área encontrará?  
d) Qual a área de cada triângulo retângulo que forma o quadrado?  
e) Que raciocínio você fez para calcular essas áreas?  
f) Qual a área dos triângulos retângulos que formam o retângulo menor?  
g) Que raciocínio você fez para calcular essas áreas?

**66.** Na figura anterior, você vê dois triângulos separados por uma linha pontilhada, formando um terceiro triângulo que tem mesma base e mesma altura do retângulo maior.

- a) O que se pode dizer da área desse terceiro triângulo em relação às áreas dos triângulos que o formam?  
b) O que se pode dizer da área desse terceiro triângulo em relação à área do retângulo maior?  
c) Escreva como calcular a área do terceiro triângulo, conhecidas sua base e altura, e justifique.

**64. a)** São resultados iguais.

b) Calculamos a área de um triângulo multiplicando sua base pela altura e dividindo o produto por dois.

Observação importante para os alunos: quando formos calcular áreas de triângulos cujas medidas sejam dadas em metros, decímetros, centímetros etc., suas áreas são expressas em  $m^2$ ,  $dm^2$ ,  $cm^2$ , respectivamente.

Explore a contagem dos 64 e dos 32 quadradinhos do exercício 65, verificando, através de perguntas, se os alunos estabeleceram a estratégia de multiplicar linhas por colunas. Proceda de modo análogo para a contagem dos 96 quadradinhos do retângulo.

**65. a)** 64;

b) 32;

c) A área do retângulo maior, ou seja, 96;

d) 32;

e) Observei que o quadrado da esquerda é dividido em dois triângulos de mesma área por sua diagonal; logo, a área de cada um desses triângulos é a metade da área do quadrado da esquerda, isto é, 32;

f) 16;

g) Observei que o retângulo da direita é dividido em dois triângulos de mesma área por sua diagonal; logo, a área de cada um desses triângulos é a metade da área do retângulo da direita, isto é, 16.

**66. a)** A área dele é a soma das áreas dos triângulos que o formam;

b) A área dele é a metade da área do retângulo maior;

c) Para calcular a área do terceiro triângulo, multiplicar base  $\times$  altura e dividir o produto por 2. Justificativa: Sabe-se que, para calcular a área do retângulo, multiplicamos a base pela altura. Logo, como a área do triângulo é a metade da área do retângulo, para obtê-la, basta calcular a metade do produto base  $\times$  altura.

Comente que o procedimento descrito na resposta 66 (c) é válido em geral, sistematizando a regra correspondente ao cálculo da área do triângulo. (Reforce a observação para o fato de que a unidade de medida deve ser a mesma.)



Os itens 67 (a) e 67 (c) oferecem oportunidade de utilizar (e eventualmente rever) as subtrações de frações, bem como a transformação de fração em decimal, pela divisão do numerador pelo denominador.

**Professor(a):** Outra opção para introduzir a fórmula da área de um triângulo:

Desenhar um retângulo e um paralelogramo não retangular e, em cada um deles, uma de suas diagonais.

Explorar o fato de que a diagonal divide estes dois paralelogramos em dois triângulos de áreas iguais (o que pode ser comprovado com figuras feitas em papelão ou usando papel transparente para facilitar a verificação do que se disse copiando um dos triângulos e verificando que ele se superpõe exatamente sobre o outro).

Como as áreas dos dois triângulos (em ambos casos) são iguais, suas áreas são equivalentes à metade das áreas dos paralelogramos correspondentes.

Pelo fato de as bases e alturas desses triângulos serem as mesmas dos paralelogramos correspondentes, conclui-se a fórmula da área dos paralelogramos.

$$\begin{aligned} 68. \text{ABC} &\Rightarrow (2 \times 3) : 2 = 3; \\ \text{PQR} &\Rightarrow (2 \times 4) : 2 = 4; \\ \text{EFG} &\Rightarrow (3 \times 5) : 2 = 7,5. \end{aligned}$$

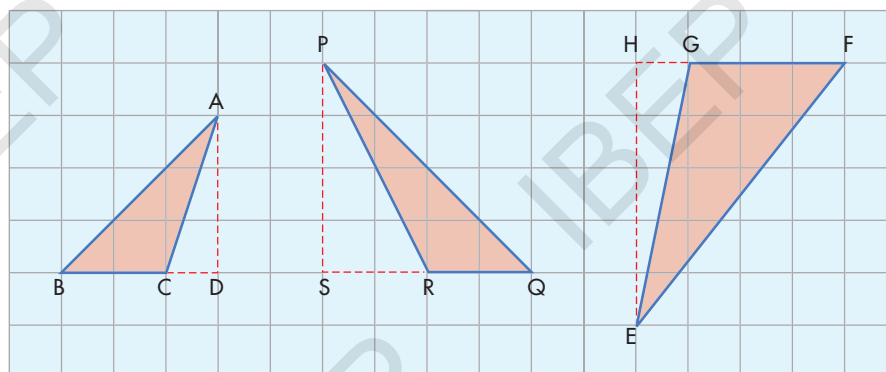
Peça aos alunos que anotem, em seus cadernos: “A área de um triângulo é a metade do produto da base pela altura, medidas na mesma unidade de medida”.

**Professor(a):** Os exercícios de 69 a 72 sugerem atividades com material concreto, partindo de dados numéricos e, estabelecendo uma analogia, passando a dados literais até se obter a fórmula da área de um trapézio. Promova tais atividades. Se julgar necessário, recorde os conceitos de base menor e base maior dos trapézios, já explorados.

69. a) 3;  
b) 9;  
c) 4 e 5, respectivamente;  
d) Significa que eles têm áreas iguais;  
e) A área de cada um dos dois trapézios é igual à metade da área do paralelogramo;  
f) Concordo. Com base no que se respondeu no item (e).

70. a) Medidas das bases;  
b) Medida da altura.

67. Observe os triângulos a seguir:



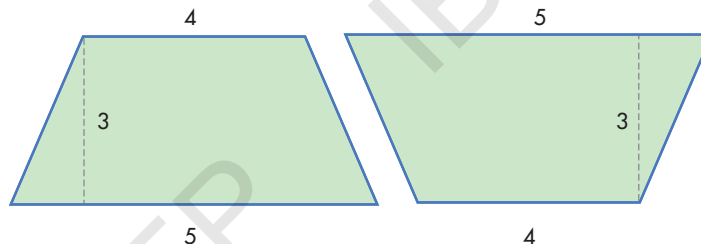
Calcule as áreas dos triângulos a seguir como diferença das áreas de dois triângulos retângulos: 67. a) 3; ( $ABD - ACD$ ); b) 4; ( $PSQ - PSR$ ); c) 7,5; ( $EHF - EHG$ ).

- a) Área do triângulo ABC. b) Área do triângulo PQR. c) Área do triângulo EFG.

68. Agora, calcule as áreas dos mesmos triângulos, calculando a metade do produto da base pela altura.

69. Observe os dois trapézios da figura. Eles foram obtidos cortando um paralelogramo em duas partes iguais. Responda com base no que você vê na figura:

- a) A altura do paralelogramo e as alturas dos dois trapézios são iguais. Qual o número que expressa esta medida?



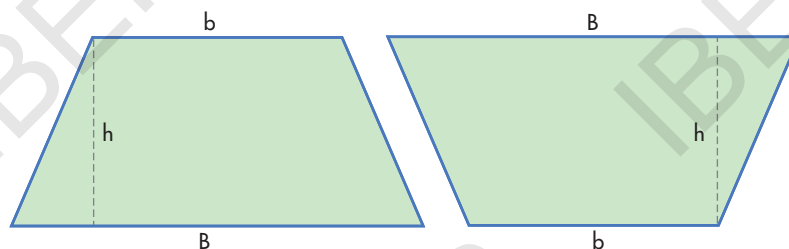
- b) Qual o número que expressa a medida da base do paralelogramo?  
c) Quais os números que expressam as medidas das bases menor e maior dos dois trapézios?  
d) Se recortarmos os dois trapézios, será possível superpor exatamente um sobre o outro. O que significa este fato em relação às áreas dos trapézios?  
e) O que você conclui a respeito da área de cada um desses trapézios em relação à área do paralelogramo?  
f) Cláudia disse que calculou a área de cada trapézio assim:  $\frac{(4+5) \times 3}{2}$ , ou seja, a

metade da área do paralelogramo. Você concorda com ela? Justifique.

70. Com base nas respostas dos itens do exercício 69, copie a frase a seguir, em seu caderno, discuta com seus colegas e complete-a de maneira que fique correta, segundo suas interpretações.

Para calcular a área de um trapézio, somamos as (a), multiplicamos o resultado pela (b) e dividimos esse produto por dois.

71. Observe os dois trapézios da figura. Eles foram obtidos cortando um paralelogramo em duas partes iguais. Responda com base no que você vê na figura:



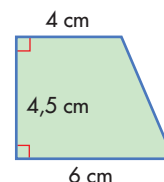
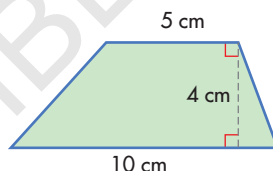
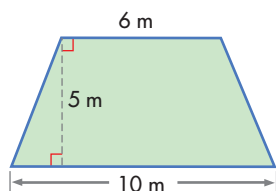
- A altura do paralelogramo e as alturas dos dois trapézios são iguais. Qual a letra que expressa esta medida?
- Como se expressa a medida da base do paralelogramo?
- Quais as letras que expressam as medidas das bases menor e maior dos dois trapézios?
- Se recortarmos os dois trapézios, será possível superpor exatamente um sobre o outro. O que significa este fato em relação às áreas dos trapézios?
- O que você conclui a respeito da área de cada um desses trapézios em relação à área do paralelogramo?

72. Cláudia disse que calculou a área de cada um dos trapézios assim:

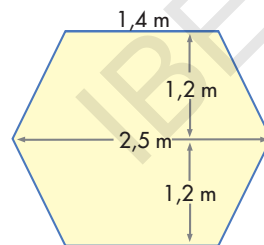
$$\frac{(B + b) \times h}{2}$$

- O que representa  $(B + b)$ ?
- O que representa  $(B + b) \times h$ ?
- Conhecendo o resultado do item (b) anterior, que conta se faz para obter a área do trapézio?

73. Use a fórmula da Cláudia para calcular as áreas dos trapézios representados pelas figuras a seguir:



74. A peça representada pela figura ao lado é formada de dois trapézios de áreas iguais. Calcule a área da peça.



Os exercícios 70 e 71 são exemplos de como abordar uma generalização: partindo de um (ou alguns) caso(s) particular(es), é mais fácil aos alunos compreender as generalizações.

71. a)  $h$ ;  
b)  $B + b$ ;  
c)  $b$  e  $B$ , respectivamente;  
d) Significa que eles têm áreas iguais;  
e) A área de cada um dos dois trapézios é igual à metade da área do paralelogramo.

72. a) A soma das bases do trapézio;  
b) A área do paralelogramo;  
c) Dividindo por 2 o resultado encontrado no item (b).

Solicite que os alunos desenhem, em seus cadernos, o trapézio da esquerda da ilustração do exercício 71, seguido da fórmula em destaque no exercício 72. Depois, escrevam: para calcular a área de um trapézio cujas bases medem  $B$  e  $b$ , e cuja altura mede  $h$ , somamos as medidas das bases, multiplicamos pela medida da altura e dividimos o resultado por dois. (Lembre-se de observar que todas as medidas devem estar expressas em uma mesma unidade de medida: ou metro, ou centímetro etc.)

73. Trapézio da esquerda:  $40 \text{ m}^2$ ;  
Trapézio do meio:  $30 \text{ m}^2$ ;  
Trapézio da direita:  $22,5 \text{ cm}^2$ .

Explore as três figuras do exercício 73 propondo: “Se as figuras representam terrenos na escala de 1 : 1 000, calcule as medidas das bases e da altura, bem como a área dos terrenos respectivos”.

O exercício 74 oferece oportunidade de utilizar (e eventualmente rever) operações com decimais.

74.  $4,68 \text{ m}^2$ .

Diga para os alunos que também é correto usar, para a circunferência, o termo perímetro, em vez de comprimento.

**Professor(a):** O exercício 75 aborda cálculos com expressões literais. Por este motivo, sugiro que os alunos exerçam as atividades que propomos a seguir, com o objetivo de facilitar a compreensão dos cálculos nele envolvidos.

Atividades sugeridas:

- Quando escrevemos  $3n$ , que conta estamos representando entre o número 3 e o número representado pela letra  $n$ ? E o que representa a expressão  $7mn$ ?
- A fórmula  $C = 2\pi r$  indica, em linguagem matemática, como calcular o comprimento  $C$  da circunferência de raio  $r$ . Descreva que contas são necessárias para obter este comprimento.
- Leiam o início do exercício 75 e respondam os itens (a), (b) e (c).
- Na expressão  $(\pi r)r$ , em que ordem devem ser feitas as contas e quais são elas?
- E na expressão  $\pi(r.r)$ ?
- Ao calcular essas duas últimas expressões, vamos encontrar resultados iguais ou diferentes? Verdadeiro ou Falso:  $\pi(r.r) = \pi r^2$ ?

75. a) O comprimento da circunferência;  
 b) 3,14;  
 c) Multiplicando o  $\pi$  (3,14) por 2 e pelo raio da circunferência;  
 d) 16;  
 e) 16;  
 f) A altura mede  $r$  e a base  $\pi \times r$ ;  
 g)  $\pi r^2$ ;  
 h) A área do disco é aproximadamente igual à área do “paralelogramo”.

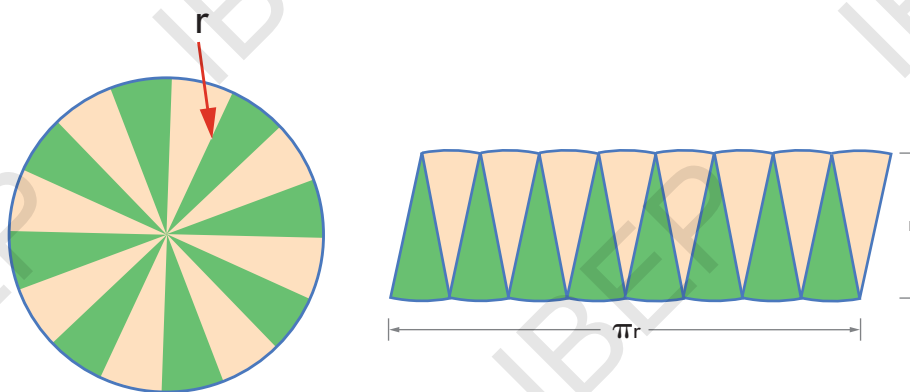
Destaque o item (f): a base é aproximadamente a metade do comprimento da circunferência (soma da medida de 8 arcos).

75. Você já sabe que o comprimento de uma circunferência de raio  $r$  é dado pela fórmula:

$$C = 2\pi r$$

- O que significa  $C$ ?
- Qual é o valor aproximado de  $\pi$  com duas ordens decimais?
- Como se calcula  $C$ ?

Agora, observe a ilustração a seguir e responda: Na primeira parte, você vê um disco de raio  $r$ , dividido em diversos setores de medidas iguais. Na segunda parte, você vê como foram recortados todos os setores do disco e agrupados de modo a obter uma figura que se parece com um paralelogramo.



- Em quantos setores iguais foi dividido o disco?
- Quantos setores iguais a eles foram utilizados na figura que se parece com um paralelogramo?
- Se o raio dessa circunferência mede “ $r$ ”, quanto mede, aproximadamente, a altura desse “paralelogramo”? E a base?
- Qual é a área aproximada desse “paralelogramo”?
- O que se pode dizer das áreas do disco e do “paralelogramo” da figura?

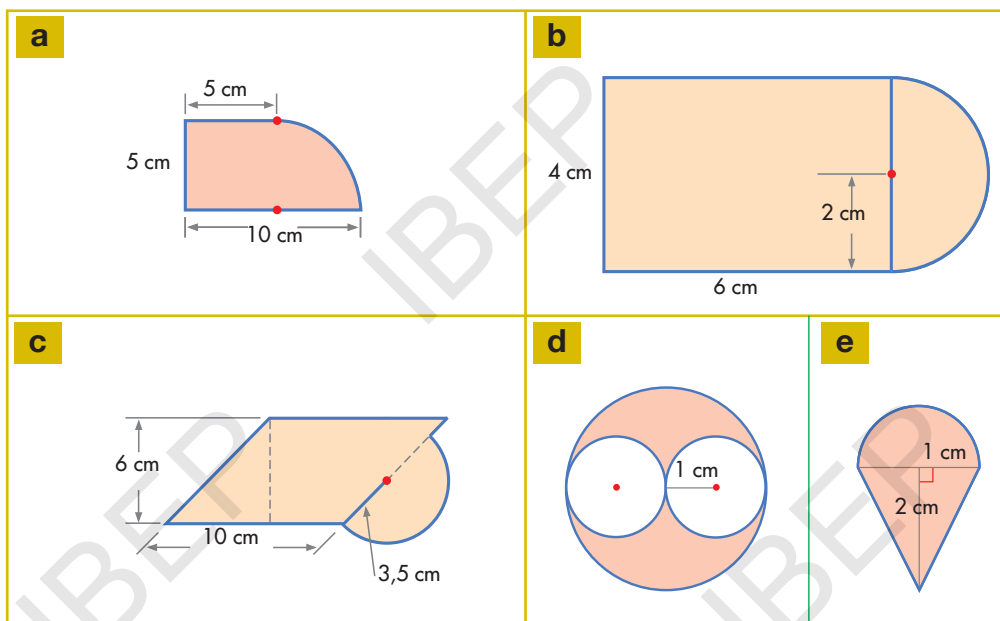
Tal como se dividiu o disco em 16 setores, é possível dividi-lo em 32, 64, 128 setores, ou muitos mais, de modo a obter figuras tanto mais próximas de um paralelogramo de base “ $\pi r$ ” e altura “ $r$ ”, sendo, portanto, bem razoável aceitar a área do disco equivalente à área do paralelogramo, ou seja,  $\pi r^2$ .

Logo, se chamarmos a área do disco de  $D$ , teremos a fórmula a seguir para o cálculo aproximado de  $D$ :

$$D = \pi r^2$$

Portanto, para calcular a área aproximada  $D$ , de um disco, multiplicamos o quadrado da medida do raio por um valor aproximado de  $\pi : 3,14$ .

76. Teotônio é tapeceiro e faz tapetes circulares de 2 metros de raio.
- Quantos metros quadrados de tecido Teotônio gasta para fazer 10 tapetes?
  - Se cada metro quadrado de tecido custa R\$ 3,20, qual é a despesa total de Teotônio com a compra dos tecidos para fazer os tapetes?
77. Calcule as áreas aproximadas das partes coloridas representadas pelas figuras a seguir: (As partes curvas nas figuras são arcos de circunferências.)



76. a) 125,6 m<sup>2</sup>;  
b) R\$ 401,92.

Comente que, na realidade, a resposta (a) do exercício 76 corresponde à soma das áreas dos 10 tapetes e não ao total de tecido gasto, pois, como se sabe, ao recortar o tecido, existirão perdas. Como consequência, a resposta (b) é inferior à despesa que efetivamente Teotônio terá. Melhor esclarecendo, supondo que existem tecidos de 4 metros de largura, Teotônio teria que comprar 40 metros deste tecido, usando 10 quadrados de 4 metros de lado, ou seja, teria que comprar 160 metros quadrados deste tecido e pagaria, ao todo, 512 reais. Desenhando no quadro um desses quadrados, explore:

- Escala;
- Circunferência inscrita no quadrado.

Destaque o fato de que as medidas mencionadas referem-se aos objetos representados pelas ilustrações (e não a estas).

77. a) 44,625 cm<sup>2</sup>;  
b) 30,28 cm<sup>2</sup>;  
c) 79,23 cm<sup>2</sup>;  
d) 6,28 cm<sup>2</sup>;  
e) 3,57 cm<sup>2</sup>.

Você já sabe como calcular áreas de retângulos, quadrados, paralelogramos, triângulos e do disco.

Todos os dias, você usa ou vê embalagens cujas faces têm as formas das figuras citadas acima.

Se você trabalhasse em uma fábrica dessas embalagens, saberia calcular quanto de material se gasta para fazer cada uma delas?

Nos próximos exercícios, você vai ver como resolver esse tipo de problema. Para isso, será necessário saber calcular a superfície total de diversos objetos espaciais.

Proponha diversos exercícios de cálculo de áreas de figuras como as já exploradas nas diversas atividades anteriores, agora colocando dimensões em unidades de medidas diferentes como, por exemplo, algumas em centímetros e outras em milímetros.

Promova discussões entre os alunos de como resolver estas situações novas de cálculos de áreas.

78. Teobaldo quer fabricar uma embalagem de papelão em forma de cubo de 30 cm de aresta. Ele quer calcular quanto de material vai gastar. Responda:
- Quanto de material ele gastará para fazer uma das faces da embalagem?
  - Que conta você fez para responder o item (a)?
  - Quanto de material ele gastará para fazer toda a caixa?
  - Que conta você fez para responder o item (c)?

78. a) 900 cm<sup>2</sup>;  
b) 30 x 30;  
c) 5400 cm<sup>2</sup>;  
d) 900 x 6.

Destaque para os alunos que, na prática, gasta-se mais material, pois existem pequenas dobras para permitir colar as faces.

79.  $2\,200\text{ cm}^2$ .

Anteceda as atividades dos itens (b), (c), (d), (e), do exercício 80 atribuindo valores numéricos (de preferência inteiros) como medidas do raio da base e da altura do cilindro.

Após os cálculos usando tais valores, escreva as três fórmulas do retângulo em destaque após o exercício.

Depois, passe a resolver o exercício 80. Essa passagem do particular para o geral, facilita a compreensão das fórmulas obtidas.

Verifique se os alunos perceberam a razão de a segunda parcela da fórmula da área total ser  $2\pi r^2$ .

Diga para os alunos que as frases que anotaram no caderno são válidas em geral. Com isto, visamos evitar que os alunos criem a falsa ideia de que é possível concluir regras gerais a partir de alguns casos particulares.

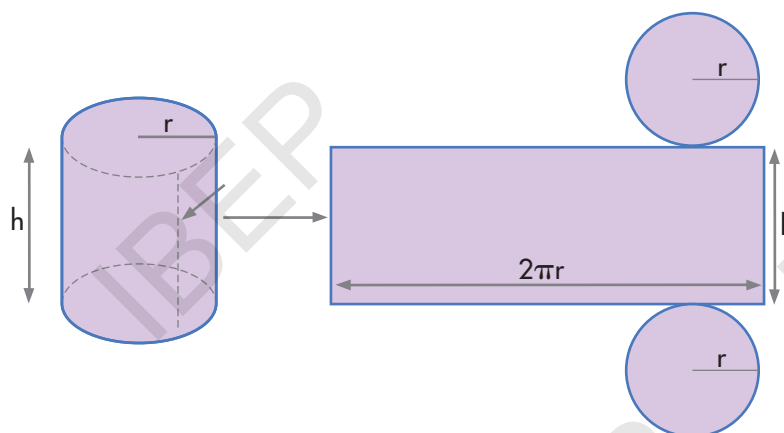
Comentário: evidentemente, a fórmula da área tem também a expressão  $2\pi r(h + r)$ , que não foi explorada porque não julgamos conveniente explorá-la no momento.

80. a) Retângulo;  
b)  $2 \times \pi \times r$ ;  
c)  $h$ ;  
d)  $2 \pi rh$ ;  
e)  $\pi \times r^2$ .

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, o quadro em destaque do exercício 80.

79. Qual é a quantidade de papelão necessária para se fazer uma caixa em forma de paralelepípedo retângulo, cujas dimensões meçam 10 cm por 20 cm por 30 cm?

80. Teobaldo teve uma encomenda para fazer embalagens em forma de cilindro. Ele cortou a embalagem que tinha de modelo, como você vê na figura a seguir:



Responda:

- A **superfície lateral do cilindro**, depois de planificada, toma a forma de qual quadrilátero?
- Se o raio das duas bases do cilindro mede **r**, quanto mede o comprimento do retângulo da planificação do cilindro?
- Se a altura do cilindro mede **h**, quanto mede a altura do retângulo da planificação do cilindro?
- Qual é a área do retângulo equivalente à área da superfície lateral do cilindro?
- Qual é a **área de cada uma das bases do cilindro**?

Você deve ter concluído que:

A **área da superfície lateral do cilindro** é o produto da base do retângulo da planificação ( $2\pi r$ ) pela altura ( $h$ ), ou seja, chamando essa área de **AL** (área lateral), temos:

$$AL = 2\pi rh$$

Cada uma das bases é um disco de raio **r**. Chamando de **SB** a **área de cada base**, temos:

$$SB = \pi r^2$$

Logo, a **área total AT do cilindro** é dada pela fórmula:

$$AT = 2\pi rh + 2\pi r^2$$



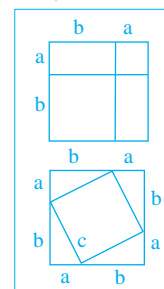
81. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Cilindros e suas áreas				
Raio da base (r)	Altura do cilindro (h)	Área lateral	Área da base	Área total
3 cm	8 cm	a	b	c
5 cm	12 cm	d	e	f
2 m	10 m	g	h	i

81. a)  $150,72 \text{ cm}^2$ ;  
 b)  $28,26 \text{ cm}^2$ ;  
 c)  $207,24 \text{ cm}^2$ ;  
 d)  $376,8 \text{ cm}^2$ ;  
 e)  $78,5 \text{ cm}^2$ ;  
 f)  $533,8 \text{ cm}^2$ ;  
 g)  $125,6 \text{ m}^2$ ;  
 h)  $12,56 \text{ m}^2$ ;  
 i)  $150,72 \text{ m}^2$ .

82. Resposta do aluno.  
 Valores aproximados:  
 a)  $11,76 \text{ cm}^2$ ;  
 b)  $13,92 \text{ cm}^2$ .

Caso julgue conveniente, apresente para seus alunos uma demonstração do Teorema de Pitágoras usando áreas. Para isso, reproduza no quadro as duas figuras a seguir, onde os dois quadrados têm lados de medidas iguais:  $(a + b)$  e, portanto, têm áreas iguais.



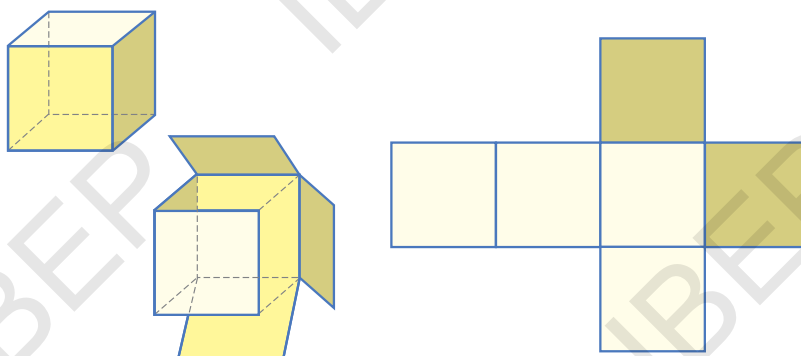
Argumente que:

- (1) A área do quadrado de cima pode ser escrita como  $a^2 + b^2 + 2ab$ .
- (2) No segundo quadrado, sendo  $c$ , a medida da hipotenusa dos quatro triângulos de catetos  $a$  e  $b$ , é também a medida do lado do quadrado inscrito. Portanto, a área do segundo quadrado pode ser escrita como  $c^2 + 2ab$ .
- (3) Como as áreas dos dois quadrados são iguais, tem-se:  $a^2 + b^2 + 2ab = c^2 + 2ab$ .
- (4) Logo, subtraindo  $2ab$  nos dois membros da igualdade, obteremos  $a^2 + b^2 = c^2$ , ou seja, "o quadrado da hipotenusa ( $c^2$ ) é igual à soma dos quadrados dos catetos ( $a^2 + b^2$ )".

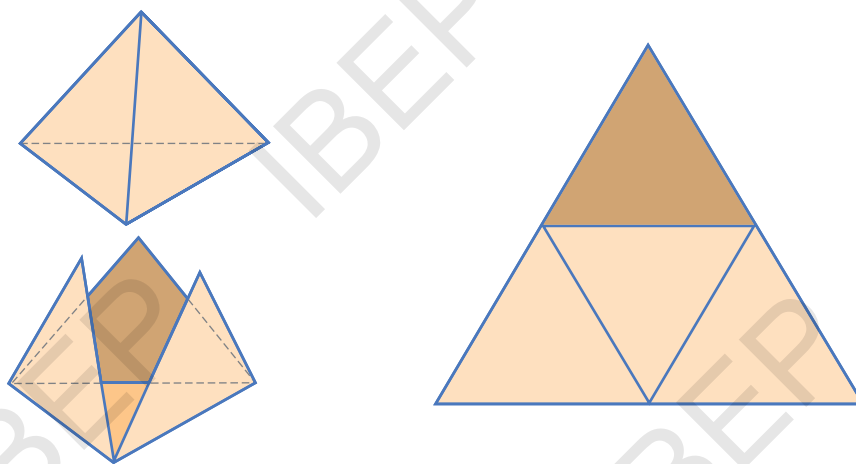
Explore a decomposição de embalagens em papelão, para cálculos de áreas laterais e totais.

82. Observe as planificações a seguir:

Cubo



Pirâmide triangular regular



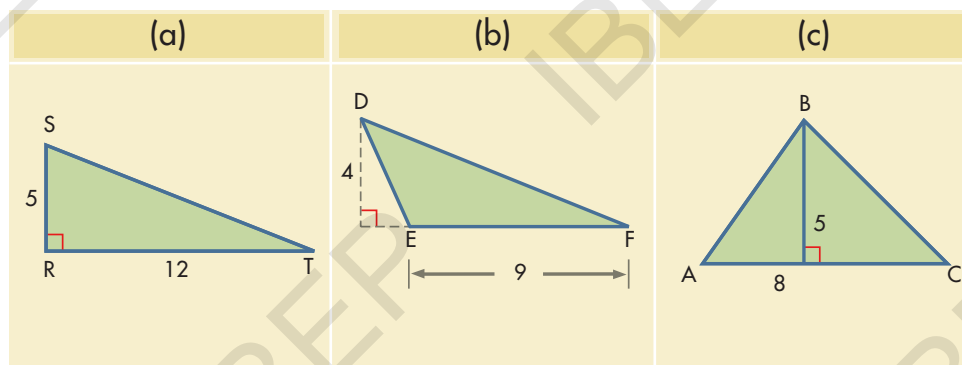
- Meça o lado de um dos quadrados da planificação do cubo e calcule sua área total.
- Meça a base e a altura do triângulo maior da planificação da pirâmide e calcule sua área total.

## Aprendendo em casa

**83.** Calcule as **áreas** dos triângulos representados pelas figuras a seguir:

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

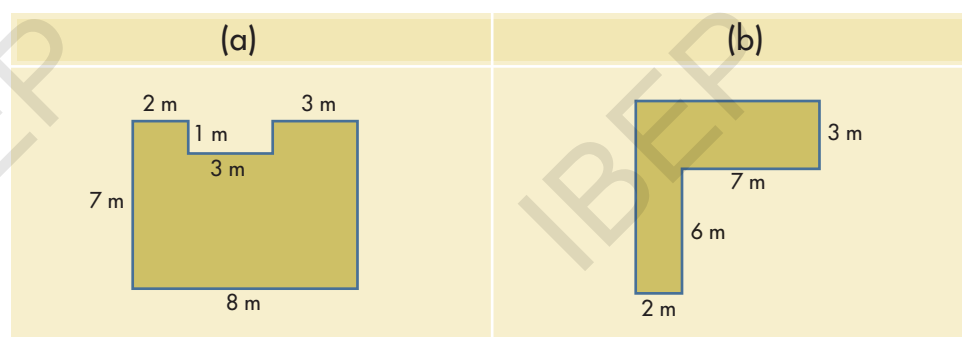
Explore o exercício 83 atribuindo às medidas diversas unidades: mm, cm, m etc. Verifique se os alunos atribuem às áreas as unidades correspondentes: mm<sup>2</sup>, cm<sup>2</sup>, m<sup>2</sup> etc.



83. (a) 30;  
(b) 18;  
(c) 20.

**84.** Pelicarlo é pedreiro e vai construir duas lajes nas formas das figuras a seguir: (considere lados consecutivos perpendiculares entre si)

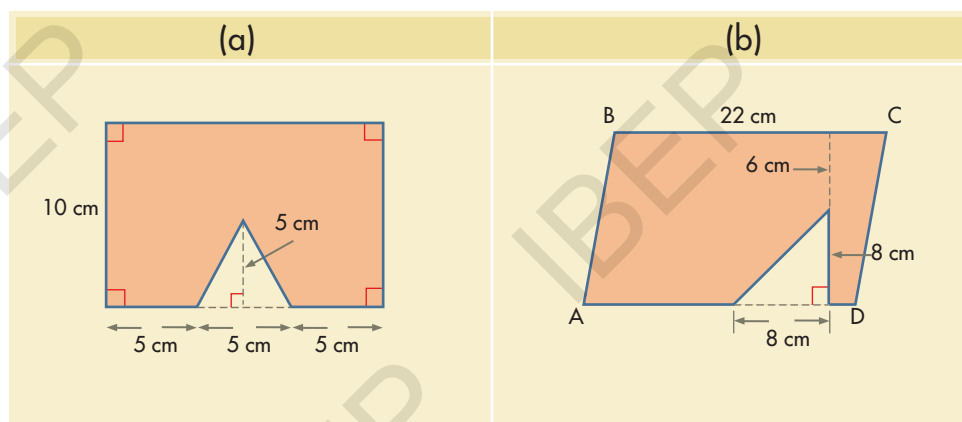
84. a) 53 m<sup>2</sup> e 39 m<sup>2</sup>;  
b) 36 800 reais.



- a) Calcule as **áreas** das duas lajes que Pelicarlo vai construir.  
b) Se o metro quadrado de laje custa R\$ 400,00, quanto se gastará, ao todo, com a construção das duas lajes?

85. a) 137,50 cm<sup>2</sup>;  
b) 276 cm<sup>2</sup>.

**85.** Calcule as **áreas** coloridas das peças representadas pelas figuras a seguir: (considere ABCD como paralelogramo)



86. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir, em valores aproximados, as letras.

Atenção! Lembre-se de que **2 cm** = 20 mm.

Cilindros e suas áreas				
Raio da base (r)	Altura do cilindro (h)	Área lateral	Área da base	Área total
4 cm	6 cm	a	b	c
3 cm	15 cm	d	e	f
2 cm	40 mm	g	h	i

Sugerir aos alunos que usem as fórmulas do exercício 80.

86. a) 150,72 cm<sup>2</sup>;  
b) 50,24 cm<sup>2</sup>;  
c) 251,20 cm<sup>2</sup>;  
d) 282,6 cm<sup>2</sup>;  
e) 28,26 cm<sup>2</sup>;  
f) 339,12 cm<sup>2</sup>;  
g) 5 024 mm<sup>2</sup>;  
h) 1 256 mm<sup>2</sup>;  
i) 7 536 mm<sup>2</sup>.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

Explique para os alunos que as medidas do quadro ao lado são as que se usam no dia a dia. Não é comum, apesar de existirem, usar hectogramas, decagramas, decigramas, quilolitros, hectolitros, decalitros, decilitros e centilitros.

- 1 000 g.
- 0,001 g.
- 0,001 l.

Explore a noção de função em atividades de cálculo de áreas e perímetros. Exemplificando:

(I) Desenhe do quadro, um retângulo cujas dimensões expressas em metros, sejam representadas por  $n$  e  $2n + 3$ . Proponha aos alunos o cálculo do perímetro  $P$  desse retângulo para os valores de  $n$  a seguir:  $n = 3$ ,  $n = 5$  e  $n = 10$ .

(II) Para o mesmo retângulo anterior, proponha o cálculo da área  $A$ , para os valores de  $n$  a seguir:  $n = 2$ ,  $n = 4$  e  $n = 8$ .

(III) Proponha cálculos de perímetros e áreas atribuindo a  $n$ , valores fracionários ou decimais.

## Medidas de massa e capacidade

### Explorando o que você já sabe

Observe o que se segue e responda		
Medidas	Leitura	Múltiplos ou frações de medida
kg	quilograma	• 1 kg equivale a quantos gramas?
g	grama	1 grama é a unidade de medida de massa.
mg	miligrama	• 1 miligrama equivale a quantos gramas?
l	litro	1 litro é a unidade de medida de capacidade.
ml	mililitro	• 1 mililitro equivale a quantos litros?

### Aprendendo em sala de aula

87. Usando o símbolo **kg**, **g** ou **mg**, escreva, em seu caderno, a unidade de medida mais adequada para pesar:

- |                  |                      |                          |
|------------------|----------------------|--------------------------|
| a) Um lápis.     | d) Uma pessoa.       | g) Um comprimido.        |
| b) Um tijolo.    | e) Uma agulha.       | h) A página de um livro. |
| c) Um automóvel. | f) Um grão de milho. | i) Um palito.            |

87. a) g;  
b) g;  
c) kg;  
d) kg;  
e) mg;  
f) mg;  
g) mg;  
h) mg;  
i) mg.

88. 416 g.

89. 30 kg de carne.

Peça ao professor de Ciências para explorar o estudo das proteínas e sais minerais. Sugira aos alunos que pesquisem sobre estes temas e promova uma apresentação sobre os resultados obtidos.

Explorar:

(a) Relação massa x volume: mesma massa não significa mesmo volume (maior ou menor concentração de matéria – densidade).

(b) Densidade = massa/volume – tabelas de densidade.

(c) Misturas e concentrados.

(d) Bulas de remédios – o miligrama e o mililitro.

Proponha pesquisas que possam ligar os conceitos de massa e volume:

(1) **A farmácia e aos laboratórios farmacêuticos:** remédios - dosagens - posologia. As diversas medidas de ampolas e seringas.

(2) **Aos instrumentos caseiros de medida** (nas receitas de culinária): colheres (sopa, chá, café), xícaras, copos, biscoitos, garrafas.

(3) Situações que utilizem conhecimento de massas ou capacidades ligadas a Ciências.

90. a) 6,15 g;  
b) 41,79 g;  
c) 0,44 g;  
d) 25,68 g;  
e) 1 g;  
f) 22,4 g.

Sugira aos alunos que explorem os itens do exercício 90, atribuindo valores monetários, atualizados, para as grandezas envolvidas. Com este objetivo, eles devem obter esses valores em jornais, folhetos de supermercados ou de lojas. Depois, devem formular perguntas sobre quanto se pagou pela aquisição de cada uma das grandezas, nas quantidades mencionadas.

88. Num restaurante a quilo, o peso médio do prato é 148 g. Cláudio pesou seu prato de comida e a balança registrou 0,564 kg, incluindo o prato. Qual foi o peso da comida?

89. O consumo médio de carne num churrasco é de 300 g por pessoa. O pai de Clara quer fazer, em seu aniversário, um churrasco para os seus amigos. Se ele pretende convidar 100 pessoas, qual é a quantidade mínima de carne, em quilos, que deve ser comprada?

90. Os alimentos que consumimos, de modo geral, contêm proteínas e sais minerais dos quais nosso corpo necessita. A tabela seguinte fornece, aproximadamente, quanto de proteína há em 100 g de cada alimento:

Alimento	Quantidade de proteínas em cada 100 g
Farinha de mandioca	2,2 g
Melancia	0,5 g
Bife de carne	28 g
Queijo	27,86 g
Ovo	12,3 g
Feijão	21,4 g

Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir, em valores aproximados, as letras:

Alimento	Quantidade	Quantidade de proteína
Ovo	50 g	a
Queijo	150 g	b
Farinha de mandioca	20 g	c
Feijão	120 g	d
Melancia	200 g	e
Bife de carne	80 g	f

## 91. Resolva:

- a) Paguei R\$ 18,00 por 2,4 kg de batatas. Quanto pagaria por 3,5 kg?
- b) Mário pesava 81,5 kg e emagreceu 13,7 kg. Qual é o peso atual de Mário?
- c) Se 300 g de presunto custam R\$ 3,60, quanto custa o quilograma?
- d) Se 1 kg de queijo custa R\$16,00, quanto custará um pedaço de 75 g?
- e) Uma lata de banha custa R\$ 160,00 e pesa 20 kg. Se a banha foi colocada em embalagens de 250 g e vendida com um lucro total de R\$ 80,00, por quanto foi vendida cada embalagem?

Quando possível, use o método de redução à unidade.

Sugestão para 91 (e): pergunte:

- (1) Qual é o preço total de venda? ( $160 + 80 = 240$ );
- (2) Quantas embalagens foram utilizadas para colocar 1 kg? E para colocar os 20 kg? ( $4; 80$ );
- (3) Que conta você faria para calcular por quanto foi vendida cada embalagem? ( $240 : 80 = 3$ ).

## 92. Resolva:

- a) Em 100 litros de combustível, há 15 litros de álcool. Quanto há de álcool em 1 litro?
- b) Um ônibus gastou 49,5 ℓ de óleo em 3 dias. Se no primeiro dia gastou 12,3 ℓ e, no segundo, 13,4 ℓ, quanto gastou no terceiro dia?
- c) Uma lata de azeite contém 2,73 ℓ e outra, o quádruplo. Quantos litros contêm as duas juntas?
- d) Uma garrafa contém 0,92 ℓ de vinho. Quantos litros de vinho existem em 350 garrafas de mesma capacidade?
- e) Comprei 13,75 ℓ de refrigerantes, 43,15 ℓ de cerveja e 1,19 ℓ de refresco. Quantos litros de bebida comprei?

91. a) R\$ 26,20;  
b) 67,8 kg;  
c) R\$ 12,00;  
d) R\$ 1,20;  
e) R\$ 3,00.

92. a) 0,15 ℓ;  
b) 23,8 ℓ;  
c) 16,38 ℓ;  
d) 322 ℓ;  
e) 58,09 ℓ.

Sugestões para o exercício 93.

- a)  $24 \times 2,5 = 60$   
 $60 \text{ ℓ} \Rightarrow 60 \text{ kg}$ ; logo,  
 $1 \text{ ℓ} \Rightarrow 1 \text{ kg}$   
 $80 \text{ ℓ} \Rightarrow 80 \text{ kg}$ ; logo,  
40 queijos de 2 kg.
- Use o método de redução à unidade.

Com 60 litros de leite, faço  
 $24 \times 2,5 = 60 \text{ kg}$  de queijo etc.  
b) O preço de 1 grama é  
 $0,42 : 125 = 0,00336$   
reais; logo, 1 kg custa  
 $0,00336 \times 1\,000 = 3,36$   
reais.

93. a) 40 queijos de 2 kg;  
b) R\$ 16,80;  
c) 1 600 pães;  
d)  $0,623 \text{ kg} = 623\text{g}$ ;  
e) R\$ 960,00.

## Aprendendo em casa

## 93. Resolva:

- a) Preciso de 60 litros de leite para fazer 24 queijos de 2,5 kg cada um. Quantos queijos de 2 kg eu faria com 80 litros de leite?
- b) Se um pedaço de queijo de 125 g custa R\$ 2,10, quanto custa o kg deste queijo?
- c) Para fazer um pão, gastei 0,025 kg de farinha. Quantos pães iguais ao que fiz é possível produzir com 40 kg da mesma farinha?
- d) Se 100 pacotes de aveia pesam 62,3 kg, quanto pesa, em média, cada pacote?
- e) Um comerciante compra 60 kg de batata a R\$ 8,00 o kg e revende por R\$ 9,60. Qual é o seu lucro?

## 94. Resolva:

- a) Em 1 000 latas de óleo existem 4 870 ℓ. Quantos litros de óleo cabem em cada lata? (considere todas com mesma capacidade)
- b) Para fazer 1 litro de refresco, gastei 0,0625 ℓ de xarope. Quantos litros de xarope gastarei para fazer 1 000 litros do mesmo refresco?
- c) Um negociante comprou 120 litros de vinagre. Se vendeu 14,7 ℓ e depois 27,9 ℓ, quantos litros ainda tem para vender?
- d) Um negociante compra vinho por R\$ 8,20 e vende por R\$ 12,80, cada litro. Qual é o lucro que ele tem se vender 80 litros de vinho?

94. a) 4,87 ℓ;  
b) 62,5 ℓ;  
c) 77,4 ℓ;  
d) R\$ 368,00.



## Medidas de volume

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”

**Observação importante para os alunos:** as medidas anotadas nas ilustrações ou descritas nos exercícios são relacionadas com os objetos que elas representam e não com as próprias ilustrações.

### ATIVIDADES ORAIS

Explore, ao máximo, embalagens para que, medindo suas dimensões, calculem seus volumes. Explore, também, medidas indiretas de volumes irregulares usando pesagem.

Proponha pesquisas que possam ligar os conceitos de volume e capacidade a:

- (1) Engenharia Cartográfica;
- (2) Engenharia de Materiais;
- (3) Engenharia de Minas;
- (4) Engenharia Metalúrgica;
- (5) Geografia;
- (6) Geologia;
- (7) Nutrição;
- (8) Oceanografia.

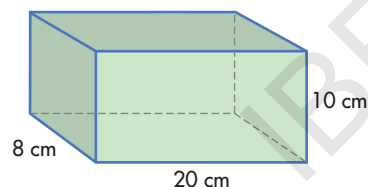
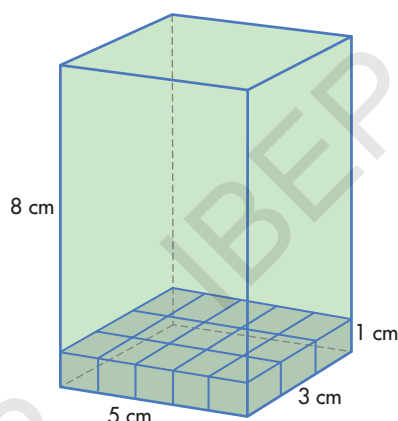
- a) 1 cm;
- b) 15 pequenos cubos;
- c)  $5 \times 3$ ;
- d) 8 camadas;
- e) 120;
- f)  $1 \text{ cm}^3$ ;
- g)  $120 \text{ cm}^3$ ;
- h)  $1 600 \text{ cm}^3$ ;
- i)  $8 \times 10 \times 20$ ;
- j) 1 600.

Em casa, os alunos devem anotar no caderno o último quadro em destaque desta página.

**Professor(a):** Lembre os alunos de que linhas tracejadas representam partes não visíveis dos sólidos representados pelas figuras.

## Explorando o que você já sabe

Na primeira figura a seguir, você vê um paralelepípedo e nele, em destaque, pequenos cubos formando uma camada inferior.



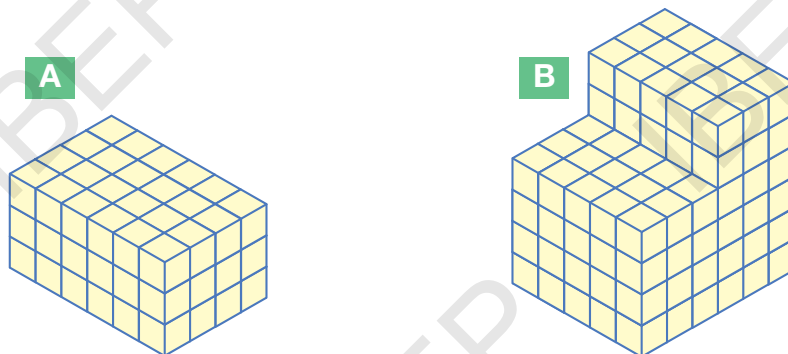
- a) Qual a medida das arestas de cada um dos pequenos cubos?
- b) Quantos desses pequenos cubos formam a camada inferior do paralelepípedo?
- c) Que conta você fez para responder o item (a)?
- d) Quantas camadas de cubos, como a que se vê, são necessárias para preencher todo o paralelepípedo?
- e) Quantos pequenos cubos de 1 cm de aresta preenchem totalmente o paralelepípedo? Que conta você fez para responder a esta pergunta?
- f) Qual é o volume de cada pequeno cubo?
- g) Qual é o volume do paralelepípedo?
- h) Calcule o volume do segundo paralelepípedo.
- i) Que conta você fez para responder o item (h)?
- j) O volume do segundo paralelepípedo corresponde ao volume de quantos pequenos cubos de 1 cm de aresta?

## Aprendendo em sala de aula

Você se lembra? No capítulo 6 do sexto ano você aprendeu que:

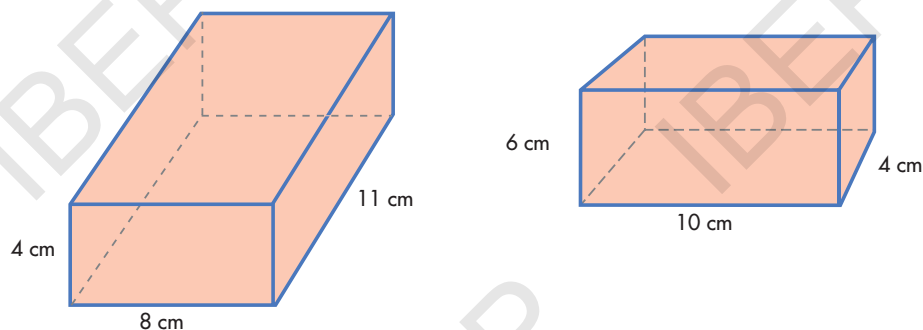
O volume de um paralelepípedo é o produto de suas três dimensões medidas com a mesma unidade de medida.

95. As figuras a seguir **representam pilhas de blocos cúbicos** de 1 cm de aresta:



Calcule o volume de cada uma delas.

96. Messias fabrica **embalagens em forma de paralelepípedo**. Nas figuras a seguir, você vê **representadas** algumas delas com suas respectivas medidas. Calcule o volume de cada uma:



97. Observe, novamente, as representações das embalagens anteriores e responda:

- Quando multiplicamos 8 cm por 11 cm, o que estamos calculando?
- Quando multiplicamos o produto encontrado no item anterior pela altura (4 cm), o que estamos calculando?
- Calcule a área da base da segunda embalagem.
- Agora, multiplique a área obtida pela altura. O que você obteve?

Você deve ter concluído que:

Se as três dimensões de um paralelepípedo retangular são medidas em uma mesma unidade, o volume dele é o produto da área da base por sua altura.

Explore a leitura do texto:  
“Sólidos x canudos x varetas”

Revista do Professor de Matemática – nº 28 (p. 29)

Comente com os alunos que eles devem considerar as figuras do exercício 95 sem “saliências” nem “reentrâncias”.

95. a)  $72 \text{ cm}^3$ ;  
b)  $150 \text{ cm}^3$   
( $5 \times 6 \times 4$ ) + ( $5 \times 3 \times 2$ ).

96. Figura da esquerda:  
 $352 \text{ cm}^3$ ;  
Figura da direita:  
 $240 \text{ cm}^3$ .

O exercício 97 tem por objetivo estabelecer uma “nova” expressão para o cálculo de volumes de paralelepípedos retângulos em função da área da base e da altura.

97. a) Área da base;  
b) Volume da primeira embalagem;  
c)  $40 \text{ cm}^2$ ;  
d)  $240 \text{ cm}^3$ ; o volume da segunda embalagem.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, a frase em destaque após o exercício 97.

Faça com que os alunos observem que todas as medidas estão dadas em uma mesma unidade de medida. Diga para eles que, futuramente, vão resolver exercícios nos quais as dimensões são dadas em unidades de medidas diferentes.

**Professor(a):** Use modelos físicos para explorar a situação do exercício 98, como, por exemplo, partindo convenientemente uma barra de sabão em forma de paralelepípedo.

Optamos, aqui, por explorar a decomposição do paralelepípedo (exercício 98) por achar ser mais compreensível do que o uso do Princípio de Cavalieri.

Visite ou recomende os sites <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1040> e <http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo1/conteudo/conteudos13.htm> sobre o Princípio de Cavalieri (estes sites remetem a diversos outros que contêm também cálculos de áreas totais e volumes de sólidos geométricos. É possível ainda visitar diversos sites sobre outros blocos de conteúdos.)

Comente em relação à ilustração: o prisma de base triangular se obtém unindo, após o corte do paralelepípedo, a face dianteira com a face da direita, de modo a ficarem adjacentes os ângulos retos. Comente, também: como a primeira figura representa um paralelepípedo, a base deste não é, necessariamente, um quadrado. Como consequência, o triângulo da base do prisma representado na segunda figura não é, necessariamente, um triângulo retângulo.

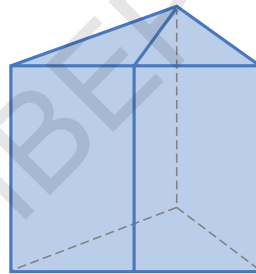
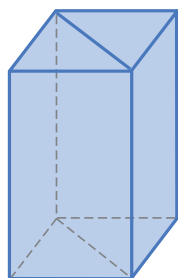
Comente: Observe que, se a base de um prisma for um quadrilátero, ele é formado da união de dois prismas triangulares. Se for um pentágono, ele é formado de três prismas triangulares, e assim por diante. (A base pode ser cortada por planos verticais que passam por um mesmo vértice e os outros vértices não adjacentes.) Isto permite a conclusão do item (c) anterior.

99. a)  $15 \text{ cm}^2$ ;  
b)  $120 \text{ cm}^3$ .

Em casa, os alunos devem anotar no caderno a frase em destaque no último retângulo da página.

98. a) O volume de cada parte é a metade do volume do paralelepípedo;  
b) São iguais;  
c) São iguais;  
d) Usando a mesma unidade de medida de comprimento, o volume de um prisma de base triangular é igual ao produto da área da base pela altura.

98. Observe as figuras e responda:



- a) Se cortarmos um paralelepípedo ao meio, como se vê na primeira figura, o que se pode dizer do volume de cada uma das duas partes em relação ao volume do paralelepípedo?  
b) Se separarmos as duas partes e formarmos um novo sólido, como se vê na segunda figura, o que se pode dizer dos volumes da primeira e da segunda figuras?  
c) Se dois prismas têm a mesma altura e as áreas das bases iguais, o que você diria dos volumes deles?  
d) Você sabe que, se as dimensões do paralelepípedo são medidas com a mesma unidade, o volume dele é igual ao produto da área da base pela altura. O que você diria do cálculo do volume do prisma de base triangular?

Observe que, se a base de um prisma se decompõe em triângulos, temos que a área **B** da base do prisma é a soma das áreas  $b_1$ ,  $b_2$ ,  $b_3$ , ... desses triângulos, e o volume **V** do prisma, sendo **h** a altura, é a soma dos volumes de todos os prismas triangulares correspondentes:

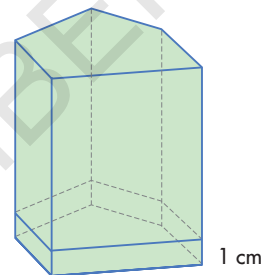
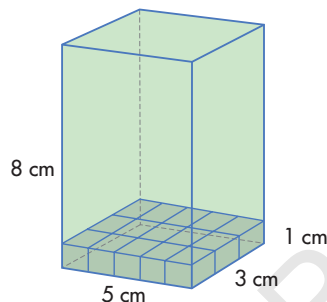
$$V = b_1 h + b_2 h + b_3 h + \dots = (b_1 + b_2 + b_3 + \dots) h = Bh.$$

Logo, podemos afirmar:

Usando a mesma unidade de medida de comprimento, o volume de um prisma é igual ao produto da área da base pela altura.

99. O paralelepípedo e o prisma de base pentagonal, representados nas figuras a seguir, têm mesma altura e mesma área da base.

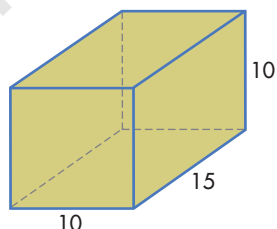
- a) Calcule a área da base do prisma pentagonal.  
b) Calcule o volume do prisma pentagonal.



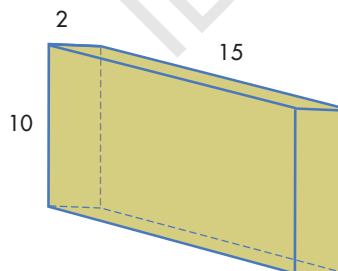
100. As figuras a seguir representam os seguintes prismas: (a) e (b), paralelepípedos retângulos; (c), prisma de base triangular; e (d), prisma cujas bases são trapézios isósceles de bases 2 e 8 e altura 4.

Calcule os volumes dos prismas, se todas as medidas são expressas em centímetros:

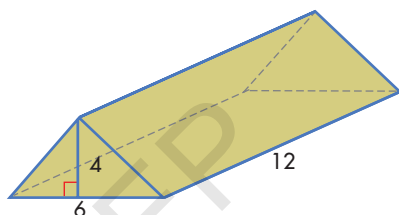
a



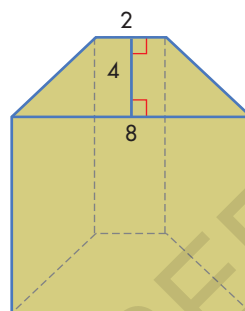
b



c



d



**Professor(a):** É conveniente explorar experimentalmente a situação descrita após a ilustração do exercício 100.

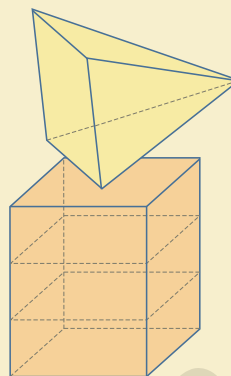
100. a) 1 500 cm<sup>3</sup>;  
b) 300 cm<sup>3</sup>;  
c) 144 cm<sup>3</sup>;  
d) 200 cm<sup>3</sup>.

No item (d), lembre como calcular a área da base:  $(2 + 8) \times 4/2 = 20$ .

Benício descobriu uma **relação entre os volumes de uma pirâmide e de um prisma de base retangular que têm a mesma base e a mesma altura.**

Ele encheu completamente a pirâmide de areia três vezes seguidas e conseguiu encher totalmente o prisma.

Discuta com seus colegas e responda às perguntas dos exercícios a seguir, para você mesmo descobrir o que Benício descobriu.



101. a) Multiplico a área da base pela altura;  
b) Divido o produto da área da base pela altura por três, porque, pelo experimento de Benício, o volume do prisma de base retangular é o triplo do volume da pirâmide.

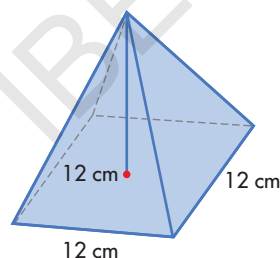
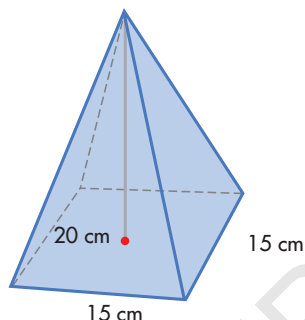
Em relação ao experimento de Benício citado no quadro, e ao exercício 101, esclareça aos alunos que a propriedade sugerida pelo experimento (de que o volume de uma pirâmide é 1/3 do volume do prisma de mesma base e mesma altura) pode ser rigorosamente demonstrada através dos princípios matemáticos usados para definir e calcular volumes. Se possível, realize o experimento em sala, usando pirâmides e prismas de papelão, ou algo equivalente.

101. Responda com base no que Benício descobriu:

- a) Conhecendo a área da base e a altura de um prisma de base retangular, que conta você faz para calcular o volume?  
b) Para calcular o volume de uma pirâmide **que tem a mesma área da base e mesma altura** do prisma, que conta você faria? Por quê?

102. Figura da esquerda  $\Rightarrow$  1 500 cm<sup>3</sup>,  
Figura da direita  $\Rightarrow$  576 cm<sup>3</sup>.

102. Observe as figuras das **pirâmides de bases quadradas** a seguir. A altura da primeira mede 20 cm e a altura da segunda mede 12 cm. Calcule os **volumes** de ambas.



103. a) Base;  
b) Altura;  
c) 3.

Escreva, no quadro, a frase a seguir, para que os alunos as copiem em seus cadernos: "Usando a mesma unidade de medida de comprimento, o volume de uma pirâmide é igual a um terço do produto da área da base pela altura."

Antes de trabalhar com o exercício 104, diga aos alunos e alunas que a medida de capacidade "litro" foi definida como sendo o volume correspondente a 1 dm<sup>3</sup>, ou, equivalentemente, 1 000 cm<sup>3</sup>. Esta relação foi escolhida porque 1 dm<sup>3</sup> de água pura pesa exatamente 1 kg, e foi estabelecida há muitos anos, no século XVIII. Faça alguns experimentos em sala para verificar este fato. Por exemplo, pode-se construir uma caixa cúbica de aresta 10 cm, preenchê-la com arroz e verificar que este volume de arroz é de aproximadamente um litro. Pode-se também pesar um litro de água e ver que corresponde a um quilo.

Lembre que as frases que descrevem como calcular volumes de sólidos a seguir são válidas desde que todas as dimensões sejam medidas com a mesma unidade de medida.

103. Copie os itens **a**, **b** e **c** a seguir e complete em seu caderno.

Para calcular o volume de uma pirâmide:

- a) Calculo a área da...?  
b) Multiplico o resultado pela...?  
c) Divido o produto obtido por...?

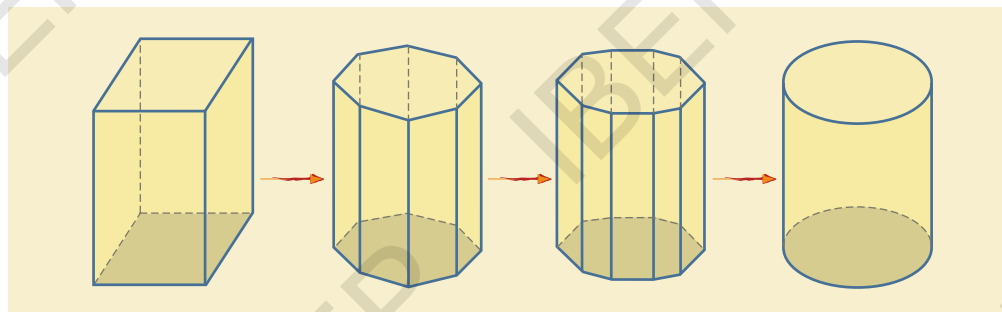
O que você acabou de responder no exercício 103 é verdadeiro para pirâmides cujas bases são polígonos quaisquer. Este fato pode ser comprovado experimentalmente, como foi feito pelo Benício, usando prismas e pirâmides de bases iguais e alturas iguais, e rigorosamente demonstrado usando-se princípios matemáticos.

Você já sabe que paralelepípedos e prismas que têm mesmas áreas da base e mesma altura têm também o mesmo volume.

Observando a sequência de figuras a seguir, você verifica que, se as bases dos prismas são polígonos regulares, quanto mais lados elas tiverem, mais se aproximam da forma de um disco.

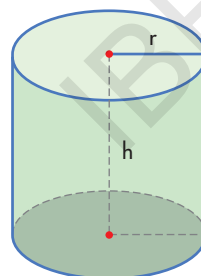
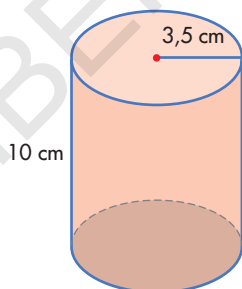
Através deste argumento, pode-se mostrar que, se o cilindro tem mesma área da base e mesma altura do paralelepípedo e dos prismas, então:

**O volume de um cilindro é o produto da área de sua base por sua altura.**





104. Observe os cilindros representados pelas figuras:



- Calcule, aproximadamente, a área da base do primeiro cilindro.
- Multiplique a área da base pela altura desse cilindro.
- Qual é o volume aproximado dele?
- O raio do segundo cilindro é  $r$ . Qual é a área da base?
- Multiplique a área da base pela altura  $h$ . O que representa esse produto?

Você acabou de descobrir que:

O volume de um cilindro cujo raio da base mede  $r$  e cuja altura mede  $h$  é dado pela fórmula:

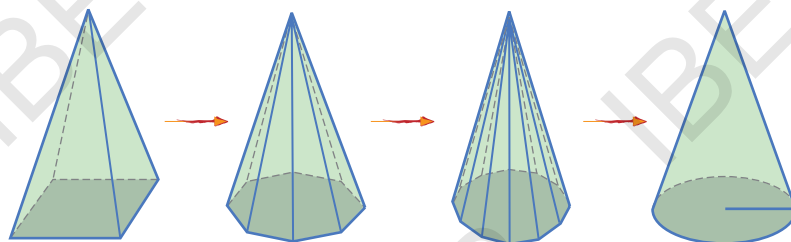
$$V = \pi r^2 h$$

Você já sabe que os volumes das pirâmides que têm as áreas das bases iguais, bem como as alturas, são os mesmos.

Observando a sequência de figuras a seguir, você verifica que, se as bases das pirâmides são polígonos regulares, quanto mais lados elas tiverem, mais se aproximam da forma de um disco.

Se um cone tem mesma área da base e mesma altura que as pirâmides, é razoável propor que:

O volume de um cone é a terça parte do produto da área de sua base por sua altura.



Verifique, experimentalmente, a fórmula do volume do cilindro dada no exercício 104. Para isso, obtenha um recipiente que contenha exatamente 1 litro de um líquido colorido (por exemplo, um refrigerante). Despeje todo este líquido em um cilindro transparente de capacidade maior que um litro. Faça medidas do raio interno do cilindro e da altura do nível da água e use a fórmula para calcular o volume do cilindro formado pelo líquido. Ao efetuar os cálculos, você obterá, como resposta, um decímetro cúbico. Como um decímetro cúbico é equivalente a um litro, este valor encontrado confirma experimentalmente a validade da fórmula.

Lembre aos alunos que a área da base é dada pela expressão  $\pi r^2$ , sendo  $r$  o raio e  $\pi \approx 3,14$ .

104. a)  $38,465 \text{ cm}^2$ ;  
 b)  $38,465 \times 10 \text{ cm}^3$ ;  
 c)  $384,6 \text{ cm}^3$ ;  
 d)  $3,14 r^2 \approx \pi r^2$ ;  
 e)  $\pi \times r^2 \times h$  representa o volume de um cilindro cujo raio da base é  $r$  e cuja altura é  $h$ .

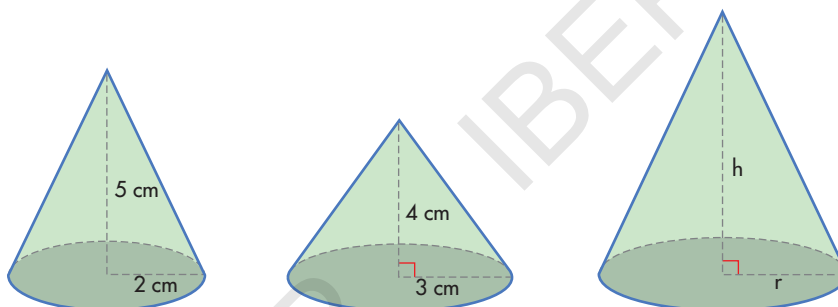
Comente com os alunos que, ao aplicar as fórmulas de cálculos de áreas ou volumes, as dimensões devem ser dadas em uma mesma unidade de medida. Em situações nas quais isso não ocorre, é necessário, antes dos cálculos, reduzir todas as medidas a uma mesma unidade de medida. Comente, também, que nos cálculos de áreas, ou volumes cujas medidas sejam dadas, por exemplo, em centímetros, as áreas correspondentes e os volumes correspondentes são dados em  $\text{cm}^2$  e  $\text{cm}^3$ , respectivamente.

Solicite que os alunos escrevam, em seus cadernos, as frases em destaque sobre volume de cilindro e de cone.

Comente com os alunos que estas fórmulas de volume para pirâmides e cilindros que estão aprendendo podem ser rigorosamente demonstradas através dos princípios da matemática, e que experimentos não são suficientes para garantir sua validade em todos os casos. Você pode também dizer que a demonstração destas fórmulas dependem de alguns conhecimentos que verão em séries posteriores e em cursos superiores de Cálculo ou Geometria.

Imite a experiência descrita no quadro após o exercício 100, enchendo completamente um cone com areia e despejando-a por três vezes sucessivas em um cilindro com mesmo raio da base e altura do cone. Esta experiência confirma a fórmula encontrada para o volume do cone: a terça parte do volume do cilindro de mesmo raio da base e mesma altura que o cone.

**105.** Calcule os volumes dos cones representados pelas figuras a seguir:



**105.** Figura à esquerda:  
20,93 cm<sup>3</sup>;  
Figura central:  
37,68 cm<sup>3</sup>;  
Figura à direita:  
( $\pi r^2 h$ )/3.

Peça que os alunos anotem em seus cadernos:

“O volume de um cone de altura  $h$  e raio de base  $r$  é dado pela fórmula:  $v = \pi r^2 h/3$ ”.

**Professor(a):** Sugiro explorar a situação descrita após o exercício 105 para a obtenção do volume da esfera usando material concreto. Este fato possibilitará aos alunos a medição do raio da base do cilindro, da altura (que deve ser o dobro do raio da base) e, usando uma esfera que satisfaça as condições necessárias, levá-los a aceitar a generalização dos resultados obtidos no exercício 106.

Explore a noção de função desenhando no quadro alguns sólidos e representando suas dimensões em metros, por expressões contendo a letra  $n$ . Depois, proponha que os alunos calculem os volumes correspondentes a alguns valores de  $n$  (naturais, fracionários ou decimais).

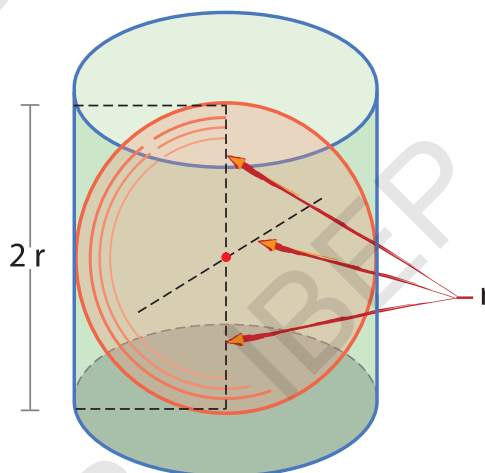
Antônio fez o seguinte **experimento**:

Encheu totalmente de água um cilindro de vidro transparente cujas medidas internas são: raio da base  $r$  e altura  $2r$ .

Colocou esse cilindro dentro de uma bacia e mergulhou bem devagar, dentro do cilindro, uma esfera de aço de raio  $r$ . Ao fazer isso, parte da água do cilindro caiu na bacia.

Retirando a esfera e a água restante do cilindro, despejou neste toda a água retida na bacia. Medindo com uma régua, notou que a altura do nível da água equivalia a  $\frac{2}{3}$  da altura do cilindro.

Antônio concluiu, então, que o volume da esfera é igual ao volume da água que vazou do cilindro, ou seja,  $\frac{2}{3}$  do volume do cilindro.



106. Você sabe que o volume de um cilindro é o produto da área da base (um disco) pela altura. Agora, responda ou faça o que se pede:

- Se o cilindro tem raio da base  $r$ , qual é a área da base?
- Se a altura do cilindro é  $2r$ , qual é o volume dele?
- Você sabe que  $r^2$  vezes  $r$  é igual a  $r^3$ . Escreva o volume do cilindro, usando o fator  $r^3$ .
- Calcule, agora,  $\frac{2}{3}$  do volume do cilindro. Pelo experimento que Antônio fez, a que é igual esse resultado?

Do experimento feito, podemos concluir que:

Se uma esfera tem raio  $r$ , seu volume é dado pela fórmula:

$$V = \frac{4\pi r^3}{3}$$

107. Calcule os volumes aproximados das esferas cujos raios medem:

- 2 mm
- 2 mm
- 2 mm

108. **Desafio!**

No experimento que Antônio fez, ele mediu o nível da água com uma régua. Discuta com seus colegas e descreva outra maneira como Antônio poderia ter chegado à mesma conclusão, sem utilizar uma régua para medir.

106. a)  $\pi r^2$ ;  
b)  $\pi \times r^2 \times 2r$ ;  
c)  $2 \times \pi \times r^3$ ;  
d)  $4 \times \pi \times r^3/3$ .

Esse resultado é o volume da esfera de raio  $r$ .

Solicite que os alunos escrevam, em seus cadernos, a frase em destaque sobre volume da esfera.

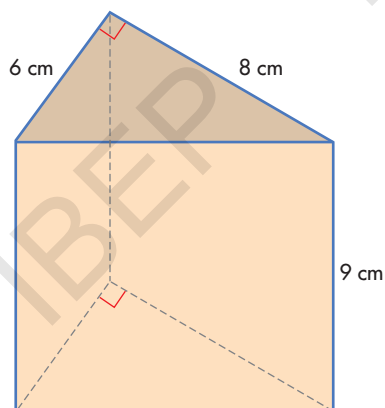
107. a) 33,49 mm<sup>3</sup>;  
b) 267,95 cm<sup>3</sup>;  
c) 4 186,67 mm<sup>3</sup>.

108. Fazendo o experimento 3 vezes. Em cada vez, colhe-se a água que sobrou no cilindro em um vasilhame. Após a terceira vez, verifica-se que, despejando no cilindro toda a água colhida nos vasilhames, o volume da água corresponde exatamente ao volume do cilindro (ele se enche totalmente, sem sobras). Logo, a cada vez a esfera desloca um volume de água correspondente a  $2/3$  do volume do cilindro, restando, neste,  $1/3$  de seu volume. Tal fato confirma que o volume da esfera equivale a  $2/3$  do volume do cilindro.

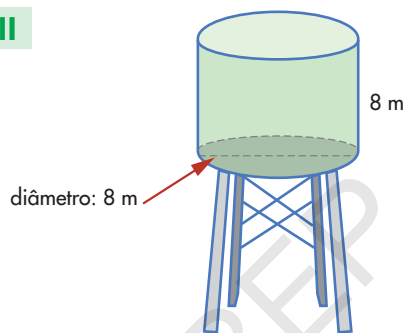
## Aprendendo em casa

109. Calcule os volumes aproximados dos sólidos representados pelas figuras a seguir:

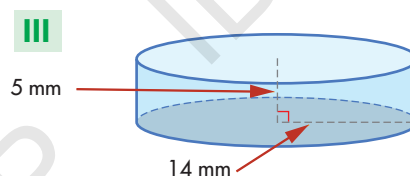
I



II



III



Faça breve abordagem oral sobre as atividades do "Aprendendo em casa" para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

Explore o exercício 109 atribuindo às medidas diversas unidades: mm, cm, m etc., e verifique se os alunos atribuem aos volumes as unidades correspondentes: mm<sup>3</sup>, cm<sup>3</sup>, m<sup>3</sup> etc.

109. Figura I  $\Rightarrow$  216 cm<sup>3</sup>;  
Figura II  $\Rightarrow$  401,92 m<sup>3</sup>;  
Figura III  $\Rightarrow$  3 077 mm<sup>3</sup>.

Calcule o valor aproximado de litros de água que cabem na caixa de água cilíndrica da figura II, do exercício 109. Com os dados, o volume será expresso em metros cúbicos. Use, depois, o fato de que cada 1 m<sup>3</sup> equivale a 1 000 litros, para obter a resposta em litros.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

## Usando medidas de tempo

### ATIVIDADES ORAIS

- 6 minutos.
- 36 segundos.
- 1 000.

Antes de abordar os exercícios desta seção, faça uma revisão sobre medidas de tempo: (a) 1 segundo e 1 minuto como frações do minuto e da hora, respectivamente; (b) múltiplos do segundo e do minuto como frações do minuto e da hora, respectivamente; (c) adições ou subtrações de horas, minutos e segundos “com reserva”. Multiplicações ou divisões de medidas de tempo por um número natural. Sugestão: veja as diversas atividades abordadas nos textos do sexto ano.

110. a) 3 h 35 min;  
b) 4 h 11 min;  
c) 3 h 55 min;  
d) 4 h 19 min.

Explorar: Micro-ondas e tempo de cozimento, de assar, de descongelar. A geladeira e o freezer, e o tempo de durabilidade de congelados. Problemas relacionados com: horas trabalhadas, tempos de percursos, duração de espetáculos etc. Os termos semana, mês, ano, bimestre, trimestre, semestre, século etc. Relógios de sol.

Proponha pesquisas que possam ligar as unidades de medida de tempo com: (a) Programas de rádio ou televisão (horários, tempo de duração); (b) Período de validade de perecíveis; (c) As viagens (as distâncias e os tempos de percurso); (d) Enfermagem (tempo de administrar remédios); (e) História (a evolução de diversos fatos históricos); (f) Rádio e Televisão (horários e duração de programas e anúncios).

Proponha aos alunos que, usando o exercício 110, explorem outras atividades.

## Explorando o que você já sabe

Uma hora tem 60 minutos.

Um minuto tem 60 segundos.

- A quantos minutos equivale  $\frac{1}{10}$  da hora?
- A quantos segundos equivale  $\frac{1}{100}$  da hora?
- Quantos milésimos de segundo são necessários para completar um segundo?

## Aprendendo em sala de aula

110. Fabrício trabalha em uma loja e suas horas trabalhadas na semana passada, anotadas no **cartão de ponto**, foram registradas na tabela que se vê a seguir:

Funcionário		Nome: Fabrício					
DIA DA SEMANA		Segunda	Terça	Quarta	Quinta	Sexta	Sábado
MANHÃ	ENTRADA	8 h 10 min	8 h 5 min	8 h 13 min	8 h 2 min	7 h 5 min	8 h 3 min
	SAÍDA	11 h 45 min	12 h	11 h 52 min	11 h 47 min	12 h	12 h 13 min
TARDE	ENTRADA	13 h	12 h 55 min	13 h 13 min	13 h 5 min	13 h 11 min	
	SAÍDA	17 h 11 min	17 h 14 min	17 h 4 min	16 h 47 min	16 h 55 min	

Calcule quanto tempo Fabrício trabalhou:

- Na segunda-feira pela manhã.
- Na segunda-feira pela tarde.
- Na terça-feira pela manhã.
- Na terça-feira pela tarde.

- III. Sabe-se que Fabrício ganha R\$ 3,50 por hora completa trabalhada e R\$ 0,06 por minuto, pelo tempo excedente às horas completas. Calcule:

- Quanto Fabrício deveria receber pelo tempo que trabalhou na segunda-feira.
- Quanto Fabrício deveria receber pelo tempo que trabalhou na terça-feira.
- Quanto Fabrício deveria receber pelo tempo que trabalhou durante toda a semana.

- II2. Discuta com seus colegas e descreva como se faz para:

- Calcular a sétima parte de 280.
- Calcular  $\frac{2}{7}$  de 280.
- Calcular  $\frac{3}{10}$  de 400.
- Calcular  $\frac{3}{10}$  de 60.
- Calcular  $\frac{7}{10}$  de 3 600.



- III3. Calcule os produtos correspondentes e os itens **d)** e **e)** do exercício anterior, simplificando os resultados:

$$a) \frac{3}{10} \times 60 \quad b) \frac{7}{10} \times 3\,600$$

- II4. Você sabe que  $\frac{3}{10} = 0,3$ . Logo,  $0,3 \times 60 = \frac{3}{10} \times 60 = 18$ .

$$\text{Também que } \frac{7}{10} = 0,7. \quad \text{Logo, } 0,7 \times 3\,600 = \frac{7}{10} \times 3\,600 = 2\,520.$$

Calcule os produtos a seguir, substituindo os decimais pelas frações decimais correspondentes. Depois, escreva o resultado como decimal:

- $0,34 \times 0,5$
- $1,8 \times 0,02$

- II5. Observe a **tabela** a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

1	minuto corresponde a 60 segundos.	
0,1	do minuto corresponde a 6 segundos.	
0,2	do minuto correspondem a $2 \times 6 = 12$ s.	
0,3	do minuto correspondem a $3 \times 6 =$	<b>a</b>
0,5	do minuto correspondem a...	<b>b</b>
0,9	do minuto correspondem a...	<b>c</b>

111. a) R\$ 27,26;  
b) R\$ 28,84;  
c) R\$ 153,26.

112. a) Dividimos 280 por 7;  
b) Dividimos 280 por 7 e multiplicamos o resultado por 2;  
c) Dividimos 400 por 10 e multiplicamos o resultado por 3;  
d) Dividimos 60 por 10 e multiplicamos o resultado por 3;  
e) Dividimos 3 600 por 10 e multiplicamos o resultado por 7.

Peça aos alunos que efetuem as operações descritas nos itens (a), (b) e (c) e apresentem os resultados.

113. (a) 18;  
(b) 2 520.

114. a)  $0,170 = 0,17$ ;  
b) 0,036.

Peça aos alunos que escrevam em ordem crescente os fatores do item (a) do exercício 114 e seus respectivos produtos ( $0,17 < 0,34 < 0,5$ ). Proceda de modo análogo, usando o produto de dois decimais maiores que 1 (por exemplo,  $1,03 \times 1,4 = 1,442$ ). Depois, pergunte: (a) O produto de dois números pode ser menor que qualquer um deles? (Pode.) Se pode, o que você diz deles em relação ao número 1? (São menores que 1.) (b) Se o produto de dois números é maior que 1, os dois são maiores que 1? (Falso! Contraexemplo:  $0,1 \times 100 = 10$ .) Estabeleça atividades análogas com frações maiores que 1 e menores que 1.

115. (a) 18 s;  
(b) 30 s;  
(c) 54 s.

**Professor(a):** Explorar mais o exercício 115 como: Escrever em segundos:

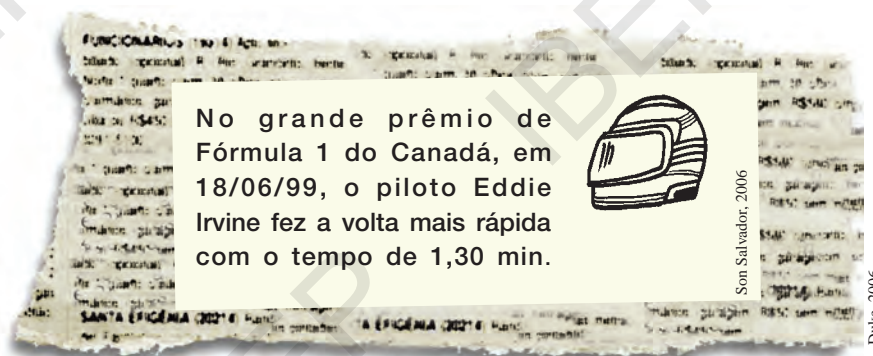
- 1,3 minutos;
- 2,4 minutos etc.



116. a) 1 minuto e 30 centésimos de segundo;  
b) 0,6 segundos;  
c) 18 segundos;  
d) 1 minuto e 18 segundos.

116. Os **tempos** de corrida de automóveis não são dados em horas, minutos e segundos, mas **em valores decimais da hora**.

Veja, por exemplo, o recorte de notícia:



- a) O que se deve entender da informação sobre esse tempo: foi de 1 minuto e 30 segundos ou de 1 minuto e 30 centésimos de minuto?  
b) A quantos segundos equivalem 1 centésimo de minuto?  
c) A quantos segundos equivalem 30 centésimos de minuto?  
d) Escreva o tempo da volta de Irvine em minutos e segundos.

117. a) 1 hora e 24 minutos;  
b) 2 horas e 18 minutos;  
c) 4 horas e 42 minutos;  
d) 2,2 h;  
e) 5,6 h;  
f) 3,8 h;  
g) 7,4 h;  
h) 3,3 min;  
i) 4,4 min.

117. Escreva em horas e minutos:

- a) 1,4 h      b) 2,3 h      c) 4,7 h

Escreva como quantidade decimal da hora:

- d) 2 h 12 min      e) 5 h 36 min      f) 3 h e 48 min      g) 7 h e 24 min

Escreva como quantidade decimal do minuto:

- h) 3 min 18 s      i) 4 min 24 s

## Aprendendo em casa

118. a) 60;  
b) 420;  
c) 540.

118. Calcule:

- a)  $\frac{1}{10}$  de 600      b)  $\frac{7}{10}$  de 600      c)  $\frac{9}{10}$  de 600

119. a) R\$ 4,00;  
b) R\$ 6,00;  
c) R\$ 10,50.

119. Observe a tabela de estacionamento de motocicletas e responda quanto paga quem estaciona por:

- a) 1 h 25 min  
b) 2 h 13 min  
c) 6 horas

ESTACIONE AQUI	
Pela 1ª hora, pague R\$ 2,00	Até 3 horas, pague R\$ 6,00
Até 2 horas, pague R\$ 4,00	Por hora adicional após 3 horas de estacionamento, pague mais R\$ 1,50

120. Escreva em horas e minutos:

- a) 1,3 h
- b) 2,5 h
- c) 3,6 h

Escreva como quantidade decimal da hora:

- d) 3 h 18 min
- e) 2 h 24 min

Escreva em minutos e segundos:

- f) 2,3 min
- g) 4,7 min

Escreva como quantidade decimal do minuto:

- h) 2 min 48 s
- i) 5 min 18 s

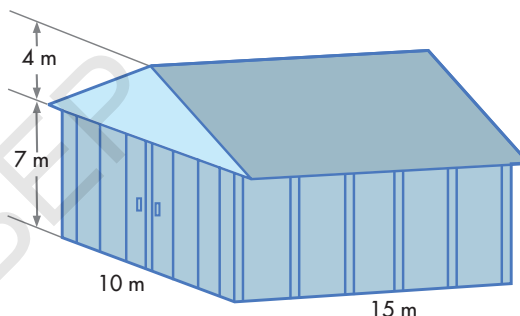
120. a) 1 hora e 18 minutos;  
b) 2 horas e 30 minutos;  
c) 3 horas e 36 minutos;  
d) 3,3 h;  
e) 2,4 h;  
f) 2 minutos e 18 segundos;  
g) 4 minutos e 42 segundos;  
h) 2,8 min;  
i) 5,3 min.

## Explorando o que você aprendeu e aprendendo mais

121. Laerte é carpinteiro e vai construir um galpão sem janelas, com paredes de madeira, como o que se vê representado na figura.

Quantos metros quadrados de madeira ele vai gastar para construir:

- a) As partes retangulares das paredes da frente e dos fundos?
- b) As partes triangulares das paredes da frente e dos fundos, considerando que existem dois beirais laterais de 1 metro cada?
- c) As duas paredes laterais?



121. a) 140 m<sup>2</sup>;  
b) 48 m<sup>2</sup>;  
c) 210 m<sup>2</sup>.

122. A madeira que Laerte usará custa R\$ 18,00 o metro quadrado. Quanto custará toda a madeira necessária para construir as paredes do galpão?

122. R\$ 7 164,00.

123. Laerte cobra R\$ 10,00 por metro quadrado de construção de galpões como esse. Quanto Laerte receberá pela construção das paredes do galpão?

123. R\$ 3 980,00.

124. Cada uma das duas partes do telhado do galpão mede 8 m por 15 m. Se, para fazer todo o telhado, o custo de material e de serviços é de R\$ 19,00 por metro quadrado, qual o custo total do telhado?

124. R\$ 4 560,00.

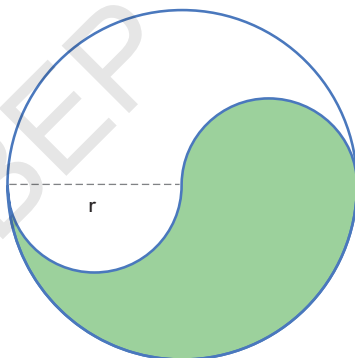
125. a)  $20\,096\text{ cm}^2$ ;  
 b)  $(3,14 \times 80^2) : 2$   
 (metade da área de um disco de raio  $80\text{ cm}$ ).

Explore mais o exercício 125. Por exemplo: (a) Custo da placa, dado o custo por centímetro quadrado (primeiro, desprezando as perdas e, depois, usando recortes em chapas de  $1,60\text{ m}$  de largura por  $3,2\text{ m}$  de comprimento); (b) Atividades análogas afirmando existirem no interior da escola certo número de placas indicativas de mesmo formato (de dimensões menores).

125. Ariadna é desenhista e projetou placas para uma escola de natação, todas com a forma da figura a seguir. Verifique que **todas as linhas são arcos de circunferência**.

Para a fachada da escola, uma placa vai ter um raio  $r = 80\text{ cm}$ .

- a) Calcule a área aproximada do material a ser gasto para fazer a placa.  
 b) Qual a conta que se faz para calcular, em  $\text{cm}^2$ , a área aproximada da parte da placa pintada de verde?



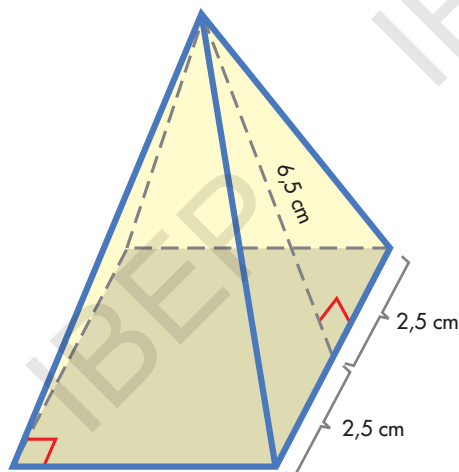
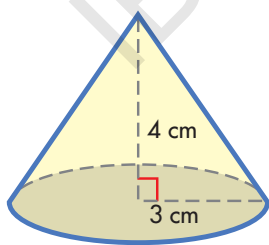
126. a)  $37,68\text{ cm}^3$ ;  
 b)  $134\,000$  mililitros.

Explore a resposta (b) pedindo a quantidade em litros.

Proponha pesquisas sobre os instrumentos de medida a seguir: altímetro, decímetro, fotômetro, frequencímetro, manômetro.

126. A fábrica de brinquedos “Castelinho” produz peças de madeira com as formas das figuras abaixo:

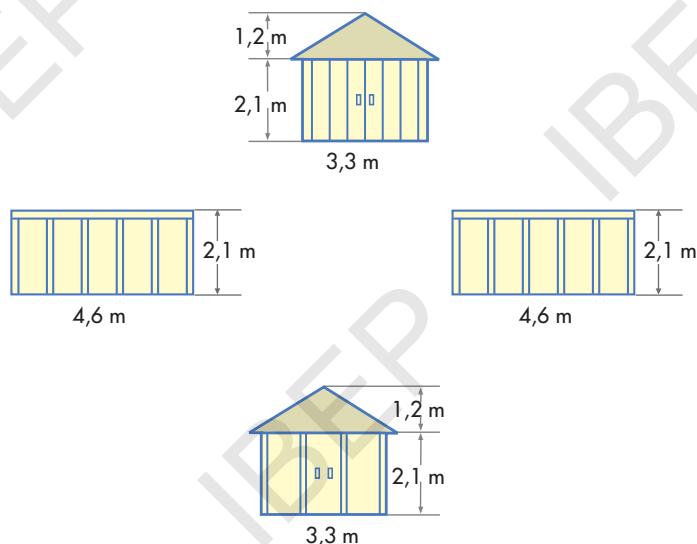
- a) Calcule o volume aproximado da peça representada pela figura em forma de cone.  
 b) Para cada centímetro quadrado de pintura dessas peças, são gastos  $2$  mililitros de tinta. Calcule a quantidade de tinta necessária para pintar  $1\,000$  peças iguais à representada pela segunda figura, uma pirâmide de base retangular.



127. Observe as figuras a seguir e **invente problemas**, baseando-se nelas:

127. Tarefa do aluno.

**Professor(a):** Destaque para os alunos que na figura são vistos a frente, duas laterais e a parte dos fundos de um galpão.

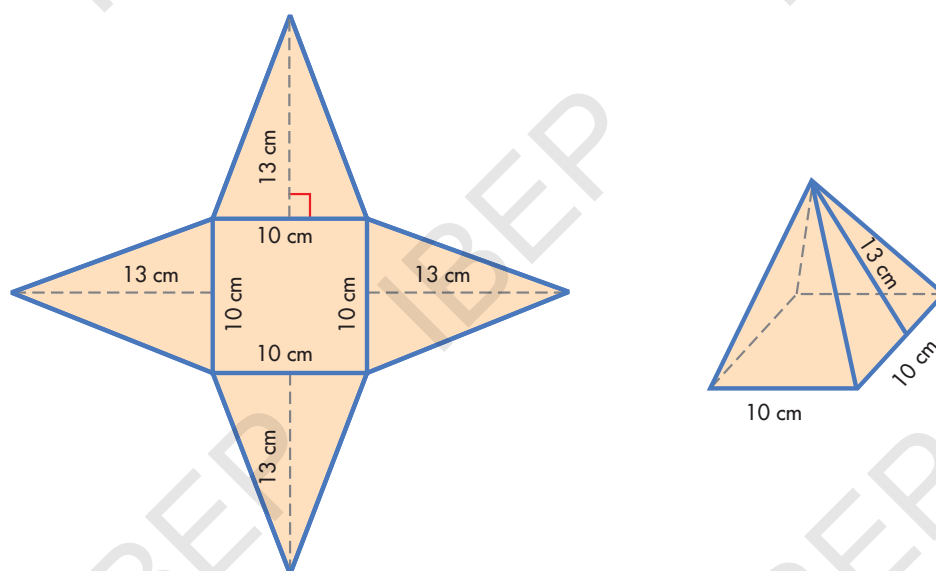


128. 360 cm<sup>2</sup>.

Peça aos alunos que inventem problemas relacionados com os dados do exercício 128.

128. Para mostrar na sala de aula um modelo de pirâmide, o professor de Matemática fez uma **planificação** e depois montou a pirâmide como se vê representada na figura abaixo:

Qual é a área total da pirâmide que o professor construiu?



Faça uma tabela de duas entradas contendo, na primeira entrada, o título **GRANDEZAS**, e, na segunda entrada, o título: **UMA UNIDADE DE MEDIDA**. Na primeira entrada, escreva os nomes das diversas grandezas: comprimento, massa, capacidade, área, volume, ângulo, tempo e temperatura, deixando vazios os espaços na segunda entrada para que os alunos os completem corretamente. Explore também, a identificação dos diversos instrumentos de medida com algumas dessas grandezas. Sugira também aos alunos que façam pesquisas sobre medidas relacionadas com computadores:

- Medidas de capacidade de armazenamento (discos ou memória): Bit, Byte, Kilobyte, Megabyte e Gigabytes.
- Medidas de velocidade de transmissão de dados (fax-modem): BPS, KBPS.
- Medidas de velocidade de processamento (Processador): MHz, GHz.
- Medidas de pontos de tela/monitor: dot pitch, pixel.

129. Monte, em casa, uma pirâmide como a da figura acima, usando cartolina ou outro material. Construa também uma pirâmide cuja base seja um triângulo equilátero.

129. Atividade dos alunos.

## Seção Olímpica

1. A caixa contém 90 bolas.

Representando o número de bolas pela inicial da cor, temos que, inicialmente,  $B = 2A$ . Nas condições do problema, teremos:  $A + 10 = B - 10 \Rightarrow A + 10 = 2A - 10 \Rightarrow A = 20, B = 40$ . Logo,  $20 + 10 = 30 = 40 - 10 \Rightarrow V = 30$ . Assim,  $A + V + B = 20 + 30 + 40 = 90$ .

2.  $10 \text{ cm}^2$

A soma das áreas dos quatro triângulos retângulos isósceles é igual à metade da área do quadrado maior; logo, o quadrado menor tem área  $20 \text{ cm}^2$ .

A mediatriz do triângulo relativa à base decompõe o quadrado menor em triângulos retângulos de áreas  $5 \text{ cm}^2$ . Como dois destes triângulos formam o triângulo colorido, este tem  $10 \text{ cm}^2$  de área.

3. A área colorida é a metade da área da figura.

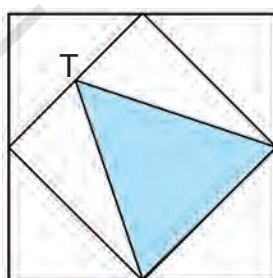
Sugestão: a área colorida é composta da metade da área de um paralelogramo com a metade do triângulo da direita.

4.  $3/4$ . Seja  $r$  o raio da pizza pequena. Então, sua área é  $\pi r^2$ . O raio da pizza grande é  $2r$  e sua área é  $4\pi r^2$ . Três fatias da pizza grande têm área  $(3/16)4\pi r^2$ , ou seja,  $3/4$  da área da pizza pequena.

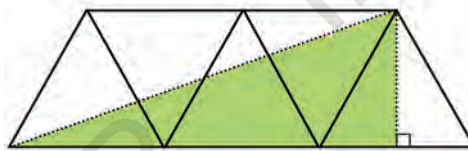
5.  $\pi/8$ . Se  $R$  e  $r$  são as medidas dos lados dos quadrados maior e menor, temos que a razão pedida é:  $\pi(R^2 - r^2)/4R^2$ . Mas, por Pitágoras, no quadrado menor,  $R^2 = 2r^2 \Rightarrow r^2 = R^2/2$ . Substituindo na expressão anterior, obtém-se, como razão,  $\pi/8$ .

1. (OMEP 2005) Uma caixa contém somente bolas azuis, verdes e brancas. O número de bolas brancas é o dobro do número de bolas azuis. Se colocarmos 10 bolas azuis e retirarmos 10 bolas brancas, a caixa passará a conter o mesmo número de bolas de cada cor. Quantas bolas a caixa contém?

2. (OBMEP 2009) Na figura, o quadrado maior tem área  $40 \text{ cm}^2$ . Nele, se vê inscrito outro quadrado cujos vértices são os pontos médios dos lados do quadrado maior e  $T$  é o ponto médio de um dos lados do quadrado inscrito. Qual é a área do triângulo colorido?

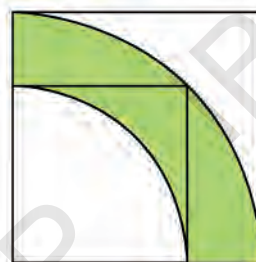


3. (OBMEP 2009) A figura mostra cinco triângulos equiláteros. A que fração da área da figura corresponde a área colorida?



4. (OBMEP 2009) O diâmetro de uma pizza grande é o dobro do diâmetro de uma pizza pequena. A pizza grande é cortada em 16 fatias iguais. A que fração de uma pizza pequena correspondem 3 fatias da pizza grande?

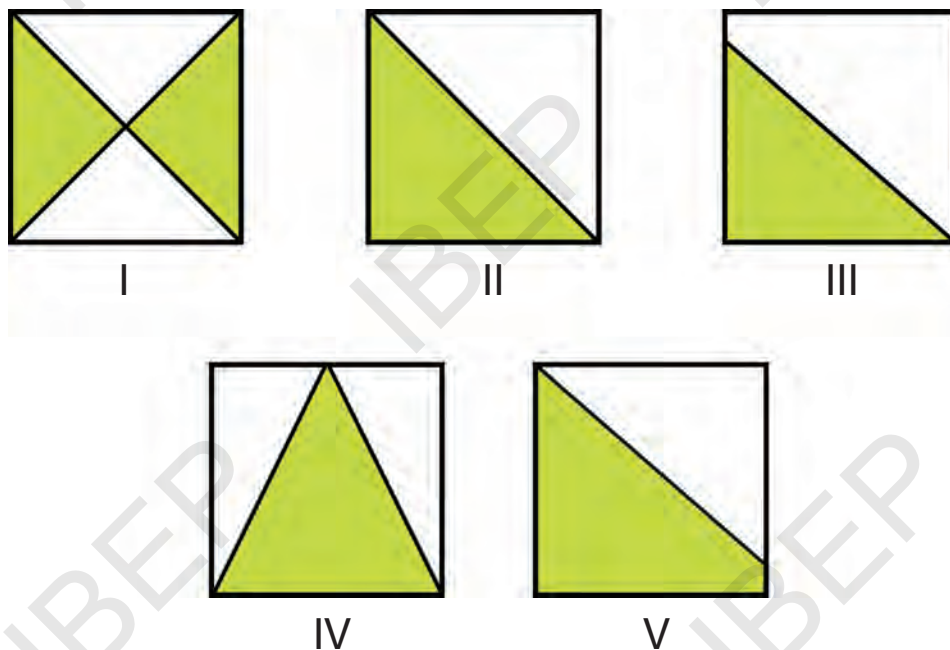
5. (OBMEP 2009) Na figura, você vê dois quadrados e dois arcos de círculo com centro no vértice inferior esquerdo dos quadrados e raios iguais aos lados dos dois quadrados. Qual é a razão entre a área colorida e a área do quadrado maior?





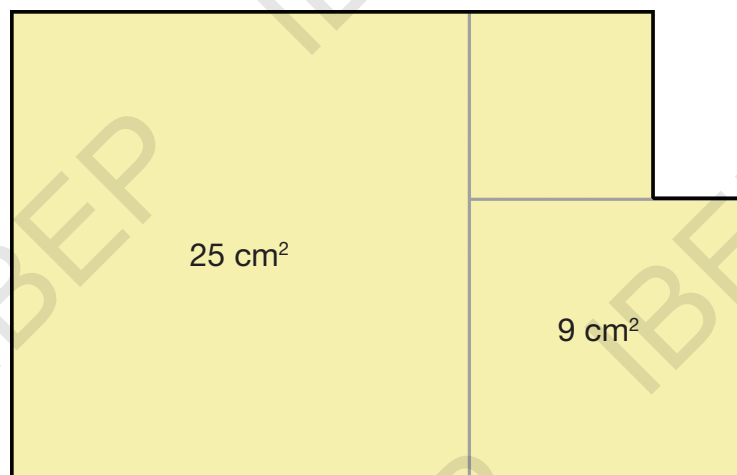
6. (OBMEP 2005) Uma folha de papel retangular, de 10 cm de largura por 24 cm de comprimento, foi dobrada de forma a obter uma folha dupla, de 10 cm de largura por 12 cm de comprimento. Em seguida, a folha dobrada foi cortada ao meio, paralelamente à dobra, obtendo-se assim três pedaços retangulares. Qual é a área do maior desses pedaços?

7. (OBMEP 2006) Os quadrados abaixo têm, todos, o mesmo tamanho.



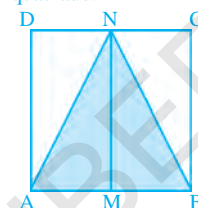
Em qual deles a região colorida tem a maior área?

8. (OBMEP 2006) A figura abaixo é formada por três quadrados, um deles com área de  $25 \text{ cm}^2$  e o outro com  $9 \text{ cm}^2$ . Qual é o perímetro da figura?



6.  $120 \text{ cm}^2$ . Sugestão: use um desenho para representar a situação descrita.

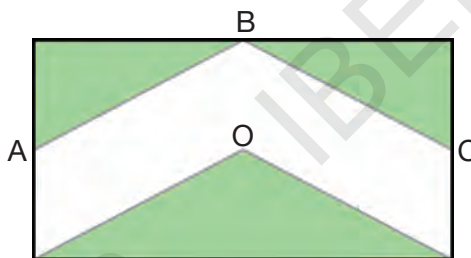
7. Na opção I, o quadrado está dividido em quatro triângulos iguais, de modo que a área da região colorida é a metade da área do quadrado. Na opção II, a diagonal divide o quadrado em dois triângulos iguais, e outra vez a área da região colorida é metade da área do quadrado. Na opção III, o triângulo colorido tem área menor do que o triângulo colorido da opção II, ou seja, menor que metade da área do quadrado. Na opção IV, observamos na figura abaixo que a perpendicular MN ao segmento AB divide o quadrado nos pares de triângulos iguais AMN, ADN e BMN, BCN; segue, mais uma vez, que a área da região colorida é metade da área do quadrado. Finalmente, a área do triângulo colorido na opção V é maior do que a área do triângulo colorido na opção II, ou seja, é maior do que metade da área do quadrado.



8. Os lados dos quadrados de  $25 \text{ cm}^2$  e  $9 \text{ cm}^2$  são, respectivamente, 5 cm e 3 cm. Logo, o lado do quadrado menor mede  $5 - 3 = 2 \text{ cm}$ . O segmento da figura no dente que não corresponde a um lado de quadrado mede  $3 - 2 = 1 \text{ cm}$ . Assim, o perímetro é  $3 \times 5 + 2 \times 3 + 1 + 2 \times 2 = 26 \text{ cm}$ .

9. Ao traçar o segmento AC, é fácil ver que passa por O e corta o retângulo ao meio. Assim, a razão é  $1/2$ .

9. (OBMEP 2006) No retângulo abaixo, A, B e C são pontos médios de seus lados e O é o ponto de encontro de suas diagonais. Qual é a razão entre a área da região colorida e a área do retângulo?



10. Como a cada sábado segue um domingo, para que o número de sábados num ano seja maior que o número de domingos, é necessário que o último dia desse ano seja sábado. Como  $366 = 52 \times 7 + 2$ , um ano bissexto consiste de 52 semanas e 2 dias. Logo, se 31 de dezembro foi um sábado, 2 de janeiro também foi um sábado. Contando de 7 em 7, vemos que 16 de janeiro foi um sábado, de onde 20 de janeiro foi uma quarta-feira.

10. (OBMEP 2008) Em certo ano bissexto (isto é, um ano que tem 366 dias), o número de sábados foi maior que o número de domingos. Em que dia da semana caiu o dia 20 de janeiro desse ano?

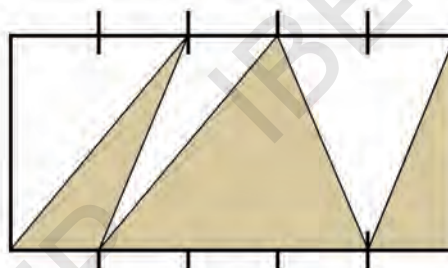
11. (OBMEP 2010) A estrada que passa pelas cidades de Quixajuba e Paraquari tem 350 quilômetros. No quilômetro 70 dessa estrada, há uma placa indicando Quixajuba a 92 km. No quilômetro 290, há uma placa indicando Paraquari a 87 km. Qual é a distância entre Quixajuba e Paraquari?

12. (OBMEP 2014) Os irmãos Luiz e Lúcio compraram um terreno cercado por um muro de 340 metros. Eles construíram um muro interno para dividir o terreno em duas partes. A parte de Luiz ficou cercada por um muro de 260 metros e a de Lúcio, por um muro de 240 metros. Qual é o comprimento do muro interno?



13.  $6 \text{ cm}^2$ . Os três triângulos coloridos têm altura igual à altura do retângulo. Como a soma de suas bases é igual à base do retângulo, a soma de suas áreas é igual à metade da área do retângulo.

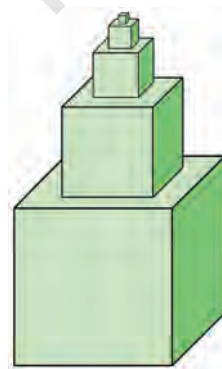
13. (OBM) A área do retângulo abaixo é de  $12 \text{ cm}^2$ , e as marcas separam segmentos de mesmo tamanho. Qual é a área da parte colorida?



14. (OBM) Uma fábrica embala 8 latas de palmito em caixas de papelão cúbicas de 20 cm de lado. Para que possam ser melhor transportadas, essas caixas são colocadas, da melhor maneira possível, em caixotes de madeira de 80 cm de largura por 120 cm de comprimento por 60 cm de altura. Qual o número de latas de palmito em cada caixote?

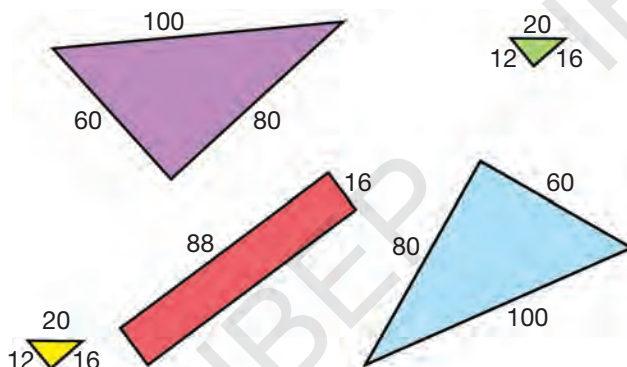
14. 576 latas. Como as dimensões das caixas são múltiplas de 20 cm, em cada caixote de madeira cabem  $3 \times 4 \times 6 = 72$  caixas de papelão cúbicas de 20 cm de lado. Logo, em cada caixote cabem  $72 \times 8 = 576$  latas de palmito.

15. (OBM) Um troféu formado por cinco recipientes cúbicos foi construído da seguinte maneira: sob o cubo de lado 10 cm foi soldado o cubo de lado 20 cm, sob este foi soldado o cubo de lado 30 cm, e assim por diante. Toda a superfície externa desse troféu deverá ser coberta com um certo tipo de revestimento. Quantos metros quadrados desse revestimento serão necessários?



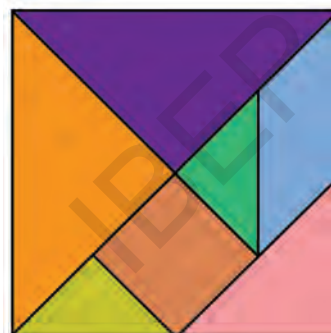
15.  $2,75 \text{ m}^2$ . Como as faces inferiores não serão revestidas, podemos somar a área de cinco faces do cubo inferior com as áreas de cinco faces dos outros quatro cubos, obtendo:  $5 \times 50^2 + 5(40^2 + 30^2 + 20^2 + 10^2) = 12\,500 + 15\,000 = 27\,500 \text{ cm}^2 = 2,75 \text{ m}^2$ .

16. (OBM) No desenho, estão representados quatro triângulos retângulos e um retângulo, bem como suas medidas. Juntando todas essas figuras, podemos construir um quadrado. Quanto irá medir o lado desse quadrado?



16. 80 cm. A soma das áreas das partes é 6 400. Portanto, o lado do quadrado mede 80 cm.

17. (OBM) As peças de um jogo chamado Tangram são construídas cortando-se um quadrado em sete partes, como mostra o desenho: dois triângulos retângulos grandes, um triângulo retângulo médio, dois triângulos retângulos pequenos, um quadrado e um paralelogramo. Se a área do quadrado grande é 1, qual é a área do paralelogramo?



17.  $1/8$ . Traçando a menor diagonal do paralelogramo, observamos que metade deste equivale a um triângulo retângulo pequeno, cuja área é  $1/4$  da área do triângulo retângulo grande, que, por sua vez, é  $1/4$  da área do quadrado. Logo, a área do paralelogramo é igual a  $2 \times 1/16 = 1/8$ .

Leia o texto A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS na margem da seção “Verifique se você aprendeu” do capítulo 2.

**REVISÃO:** A seu critério, proponha e verifique se os alunos utilizam com compreensão algumas ou todas as atividades a seguir:

Decidir qual o instrumento ou a unidade de medida mais adequados para medir grandezas dadas.

Interpretar os significados de prefixos como “quilo”, “mili” e outros.

Fazer estimativas de medidas.

Interpretar e representar medidas por decimais ou frações.

Resolver problemas relacionados com equivalências entre unidades de medidas.

Resolver problemas sobre comprimentos, perímetros, distâncias, áreas, volumes, capacidade e massa.

Resolver problemas sobre perímetros dos principais polígonos e sobre comprimento de circunferências e arcos de circunferência.

Resolver problemas sobre áreas dos principais polígonos e sobre a área do disco e de setores circulares.

Resolver problemas sobre perímetros de figuras compostas dos principais polígonos, da circunferência e de seus arcos.

Resolver problemas sobre áreas de figuras compostas cujos contornos são compostos dos principais polígonos, da circunferência e de seus arcos.

Calcular superfícies de sólidos utilizando a interpretação de suas planificações.

Calcular volumes de prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas e de sólidos compostos de partes com essas formas.

Resolver problemas relacionados com medidas de tempo: horas, minutos, segundos e frações de segundos



## Verifique se você aprendeu

Se ainda tem dúvidas sobre	Reveja os exercícios
Como fazer estimativas de medidas.	1, 2, 3, 4, 11 a 18, 42, 87.
Como resolver problemas relacionados com equivalências entre unidades de medidas e suas representações decimais.	4, 5, 6, 18, 22 a 26, 28 a 31, 34, 40, 41, 42.
Como resolver problemas sobre comprimentos, perímetros, distâncias, áreas, volumes, capacidade, massa e valores monetários.	7, 9, 10, 18 a 21, 32, 37, 38, 39, 43, 44, 45, 46, 51, 88, 89, 90, 91, 92, 93, 94.
Como resolver problemas sobre perímetros dos principais polígonos e sobre comprimento de circunferências e arcos de circunferência.	10, 27, 33, 34, 35, 83.
Como resolver problemas sobre áreas dos principais polígonos e sobre a área do disco e de setores circulares.	8, 36, 47, 48, 51, 52, 53 a 76.
Como resolver problemas sobre áreas de figuras compostas cujos contornos são compostos dos principais polígonos, da circunferência e de seus arcos.	77, 82, 84, 85, 123, 125, 128.
Como resolver problemas relacionados com medidas de capacidade e de massa (pesos).	87 a 94.
Como calcular superfícies de sólidos, utilizando a interpretação de suas planificações.	49, 50, 78 a 82, 86, 121 a 124, 127, 128.
Como calcular volumes de prismas, pirâmides, cilindros, cones, esferas e de sólidos compostos de partes com essas formas.	95 a 109, 126.
Como resolver problemas relacionados com medidas de tempo: horas, minutos, segundos e frações de segundos.	110 a 120.

### Atividades de verificação da aprendizagem:

Usar recíprocas de situações dadas. Exemplificando: Dadas as medidas dos lados de um quadrado, pedir para calcular a medida do lado do hexágono regular que tem o mesmo perímetro do quadrado. Verificação: Dadas as medidas dos lados de um hexágono regular, pedir para calcular as medidas dos lados de um quadrado que tem o mesmo perímetro do hexágono.

Trocar, em problemas, dados com incógnitas. Exemplo: De um problema que tem como dados a medida dos lados de um quadrado e como incógnita o cálculo de perímetro, transformar em um problema que tem como dado o perímetro e pede-se o cálculo da medida dos lados. Análogo procedimento com problemas envolvendo áreas e volumes: dadas as dimensões, pedem-se áreas ou volumes. Transformar em problemas cujas incógnitas sejam uma das dimensões, ou uma área da base de um sólido etc.



# CAPÍTULO 5

## Resolvendo problemas e equações



Aliced | Dreamstime.com

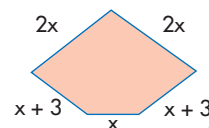
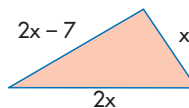
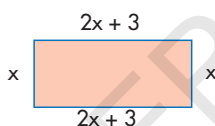
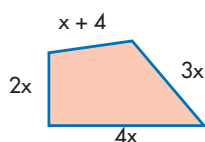


Ao lado, explicitamos os objetivos gerais do capítulo. Sugerimos um breve comentário sobre os mesmos, utilizando as ilustrações da página.

**Professor(a):** Neste e em outros capítulos, são exploradas diversas situações para que os alunos “descubram”, a partir de casos particulares, propriedades de números, de figuras, regras de cálculos etc. É extremamente importante que, após estas “descobertas”, sejam feitas observações afirmando que tais conclusões são verdadeiras (e, eventualmente, provar estes fatos) para que não fique a falsa ideia de que, a partir de poucos casos particulares, é possível generalizar. Sempre que possível, use expressões algébricas para expressar tais generalizações, bem como de algumas regularidades relacionadas com sequências numéricas.

## Você já resolveu diversos tipos de problemas usando números naturais, frações e decimais. Neste capítulo, você vai aprender como:

- Resolver problemas seguindo algumas etapas sugeridas:
  - a) Compreendendo o problema.
  - b) Planejando o que fazer para resolver o problema.
  - c) Fazendo os cálculos para resolver o problema.
  - d) Como verificar se está correto.
  - e) Como responder o problema.
- Resolver problemas cujos dados são apresentados em tabelas.
- Resolver problemas envolvendo as grandezas velocidade, tempo de percurso e distância percorrida.
- Representar múltiplos ou divisores de números, usando letras.
- Dadas expressões contendo adições, subtrações, multiplicações, divisões e potenciações com letras representando números, descrevê-las com frases na linguagem corrente.
- Representar expressões descritas na linguagem corrente por adições, subtrações, multiplicações, divisões e potenciações, com letras no lugar dos números.
- Interpretar o que sejam equações e suas raízes.
- Escrever equações relacionadas com igualdades descritas na linguagem corrente.
- Identificar as incógnitas de equações dadas.
- Verificar se um número dado é raiz de equações dadas.
- Caracterizar e identificar equações equivalentes.
- Decidir se equações dadas são ou não equivalentes.
- Resolver mentalmente algumas equações simples.
- Inventar problemas relacionados com equações dadas e resolvê-los, usando tais equações.
- Representar, usando letras, múltiplos de números, seja usando a notação do produto, seja como soma de parcelas iguais.
- Usar figuras representando números em expressões.
- Resolver problemas usando figuras para representar quantidades e expressando equações cujas incógnitas sejam representadas por essas figuras.
- Resolver problemas, associando a eles equações cujas raízes fornecem as respostas dos mesmos.
- Identificar os membros e termos de uma equação.
- Resolver equações usando propriedades das igualdades.
- Calcular perímetros de polígonos cujos lados têm suas medidas representadas por letras.
- Usar propriedades de ângulos, de triângulos e quadriláteros para resolver problemas relacionados com ângulos cujas medidas são representadas por letras.
- Resolver problemas sobre pares de ângulos cujas medidas estejam representadas por letras.



## Explorando o que você já sabe



Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

Leia o texto sobre ATIVIDADES COLETIVAS da página 11.

- Como as medidas dos lados.
- Multiplico as medidas da base e da altura.
- Como os preços.
- Subtraio, do valor pago, o valor da mercadoria.
- Multiplico  $25 \times 12$ .
- Divido a quantia pelo número de pessoas.
- Multiplico as medidas das 3 dimensões.
- Multiplico o tempo em minutos por 60.
- $4 \times 5$ .
- $7 \times$  o preço.
- Divido por 7 e multiplico o resultado por 4.
- Divido as medidas pela escala.
- Multiplico as medidas pela escala.
- Multiplico a importância por 0,07.
- Multiplico o número por  $\frac{3}{4}$ .

- Calcular o perímetro de um polígono?
- Calcular a área de um retângulo?
- Calcular a despesa total de alguém que comprou objetos cujos preços são conhecidos?
- Saber quanto vai receber de troco ao pagar uma mercadoria?
- Contar os quadriculados de um retângulo com 25 linhas e 12 colunas?
- Distribuir uma quantia em dinheiro em quantidades iguais para certo número de pessoas?
- Calcular o volume de um paralelepípedo retângulo?
- Saber quantos segundos tem certo intervalo de tempo, dado em minutos?
- Saber quantos tipos diferentes de lanches se pode fazer escolhendo entre 4 tipos de sanduíches e 5 tipos de refresco?
- Saber quanto pagar por 7 artigos do mesmo preço?
- Saber quanto custam 4 pães, sabendo o preço de 7 deles?
- Saber a medida de uma sala, conhecidas as medidas do desenho e a escala?
- Saber as medidas do desenho de uma sala, conhecidas as medidas da sala e a escala?
- Calcular 7% de certa importância em reais?
- Calcular  $\frac{3}{4}$  de um número?

## Aprendendo em sala de aula

Este é mais um exemplo do uso do método de redução à unidade.

1. (a) R\$ 92,00;  
(b) 8;  
(c) 13;  
(d) R\$ 92,00;  
(e) 8;  
(f) R\$ 11,50;  
(g) 13;  
(h) R\$ 11,50;  
(i) R\$ 11,50;  
(j) R\$ 149,50;  
(k) 13;  
(l) R\$ 92,00;  
(m) R\$ 149,50.

1. Antônio comprou 8 agendas de mesmo preço, pagando um total de R\$ 92,00. Quanto pagaria por 13 dessas agendas?  
Escreva, em seu caderno, os valores que substituem as letras corretamente em cada parte do texto a seguir:

### Compreendendo o problema

- O que se conhece no problema?  
Que Antônio pagou **a** por **b** agendas de mesmo preço.
- O que se quer conhecer no problema?  
O preço de **c** agendas.

### Planejando o que fazer para resolver o problema

- Se soubermos o preço de uma agenda, fica fácil resolver o problema...
- Como fazer para saber o preço de uma agenda?  
O preço de uma agenda se obtém dividindo **d** por **e**.  
Fazendo essa divisão, ficamos sabendo que cada agenda custa **f**.  
Depois, basta multiplicar **g** por **h** para saber o preço das 13 agendas.

### Fazendo os cálculos para resolver o problema

- Calculando o preço de uma agenda, obtemos: **i**.
- Calculando o preço das 13 agendas, temos: **j**.

### Como verificar se está correto

Basta seguir o caminho inverso, usando o mesmo raciocínio:

- Dividir o valor encontrado por **k**, para encontrar novamente o preço de uma agenda.
- Depois, multiplicar por 8. O resultado deve ser o preço de 8 agendas, isto é, **l**.

### Como responder o problema

Resposta do problema:

Antônio pagaria **m** por 13 agendas.

2. Disponha-se de 10 ℓ de suco, que foram diluídos em 50 ℓ de água. Com toda a solução resultante, encheram-se completamente 800 vidros de igual capacidade. **Calcule a capacidade** de cada um desses vidros, em *ml*.

Escreva, em seu caderno, os valores que substituem as letras corretamente em cada parte do texto a seguir:

## Compreendendo o problema

- O que se conhece no problema?  
Sabe-se que foram diluídos **a** litros de suco em **b** litros de água, e toda a solução foi distribuída em **c** vidros de igual capacidade.
- O que se quer conhecer no problema?  
Qual é a capacidade de cada vidro, **em d**.

## Planejando o que fazer para resolver o problema

- Como conhecer a capacidade de cada vidro, **em mililitros**?  
Se soubermos a capacidade total da solução **em mililitros**, basta dividi-la pelo total de **e**.
- Como obter a capacidade total da solução **em mililitros**?  
Se soubermos a capacidade total em litros, basta multiplicarmos o resultado por **f**, porque cada litro equivale a 1 000 mililitros.
- Como calcular a capacidade total da solução **em litros**?  
Basta somarmos os 10 litros de suco com os 50 litros de água, obtendo, assim, **g** litros de solução.
- Como calcular quantos mililitros tem a solução?  
Sabendo que cada litro equivale a 1 000 mililitros, e que a solução tem 60 litros, basta multiplicarmos **h**  $\times$  **i**; logo, a solução tem **j** mililitros.
- Como saber a capacidade de cada vidro em mililitros?  
Basta dividirmos: **k** : **l** = **m**; logo, cada vidro contém **n** ml.

## Fazendo os cálculos para resolver o problema

- Cálculo da capacidade total da solução em litros: **o**.
- Cálculo da capacidade total da solução em mililitros: **p**.
- Cálculo da capacidade de cada vidro: **q**.

## Como verificar se está correto

- Primeiro, se cada vidro contém **r** ml, os 800 vidros conterão, ao todo, **s**  $\times$  **t** ml da solução, ou seja, **u** ml da solução.
- Como 1 000 ml correspondem a um litro, **v** ml corresponderão a **X** litros da solução.

## Como responder o problema

Resposta do problema:

A capacidade de cada vidro é de **y** mililitros.

2. (a) 10 l;  
(b) 50 l;  
(c) 800;  
(d) ml;  
(e) 800 vidros;  
(f) 1 000;  
(g) 60 l;  
(h) 60;  
(i) 1 000;  
(j) 60 000;  
(k) 60 000;  
(l) 800;  
(m) 75;  
(n) 75 ml;  
(o) 60 l;  
(p) 60 000 ml;  
(q) 75 ml;  
(r) 75 ml;  
(s) 75;  
(t) 800;  
(u) 60 000 ml;  
(v) 60 000 ml;  
(x) 60 l;  
(y) 75 ml.

3. Dario vai colocar rodapé em uma sala retangular que tem 7,2 m de comprimento e 4,5 m de largura. Nessa sala, existem três portas de 0,8 m de largura. Sabendo que o rodapé custa R\$ 4,00 o metro, calcule **quanto Dario gastará** para comprar todo o rodapé necessário para colocar na sala.

Escreva, em seu caderno, os valores que substituem as letras corretamente em cada parte do texto a seguir:

### Compreendendo o problema

- O que se conhece no problema?  
O comprimento e a largura de uma sala e que nela existem **a** portas, de largura conhecida.
- O que se quer conhecer no problema?  
Quanto Dario gastará para comprar **b** para colocar nessa sala, conhecendo o preço por metro do rodapé.

### Planejando o que fazer para resolver o problema

- Faça um desenho da sala e escreva as medidas das paredes. Não desenhe as portas.
- Se fosse calcular todo o perímetro da sala, você deveria somar quatro medidas: **c**.
- Se a largura de uma porta é 0,8 m, o espaço ocupado pelas três portas da sala é: **d**.
- Para resolver o problema, além de calcular o perímetro da sala, temos que deste subtrair: **e**.
- O resultado dessa subtração representa: **f**.
- Sabendo quantos metros de rodapé Dario vai usar na sala. Para calcular quanto ele gastará para comprar todo o rodapé, devemos multiplicar a diferença encontrada por: **g**.

### Fazendo os cálculos para resolver o problema

- Calculando o perímetro da sala, obtemos **h**.
- Calculando o espaço que as portas ocupam, obtemos **i**.
- Subtraindo essas duas medidas, obtemos **j**, que representa **k**.
- Multiplicando a diferença obtida pelo preço do metro de rodapé, obtemos **l**.

### Como verificar se está correto

- Subtraindo do perímetro **m** da sala os 2,4 metros.
- Dividindo a importância encontrada como resposta pela diferença anterior. Se o quociente obtido for **n**, a solução do problema está correta.

### Escrevendo a resposta do problema

Para comprar todo o rodapé necessário para a sala, Dario gastará **o**.

3. a) 3;  
b) (rodapé);  
c)  $7,2 + 4,5 + 7,2 + 4,5$ ;  
d)  $3 \times 0,80 = 2,40$  m;  
e) 2,40 m;  
f) O total de metros dos rodapés;  
g) 4;  
h) 23,4 m;  
i) 2,4 m;  
j) 21 m;  
k) O quanto necessário de rodapé a ser comprado para colocar na sala;  
l) R\$ 84,00;  
m) 23,4 m;  
n) R\$ 4,00;  
o) R\$ 84,00.



4. César pagou R\$ 10 800,00 por um terreno retangular de 30 metros de comprimento por 12 metros de largura. Quanto custou cada metro quadrado desse terreno?

### Compreendendo o problema

- O que se conhece no problema?  
Que César comprou um terreno retangular de comprimento e largura conhecidos.  
A importância total paga por César.
- O que se quer conhecer no problema?  
Quanto custou cada metro quadrado do terreno.

### Planejando o que fazer para resolver o problema

- Faça um desenho do terreno com suas medidas.
- O preço de R\$ 10 800,00 corresponde a qual medida do terreno: ao seu comprimento, à sua largura ou à sua área?
- É necessário calcular a área do terreno para resolver o problema?
- Que conta se faz para calcular essa área?
- Se foram pagos R\$ 10 800,00 pelo total de metros quadrados do terreno (área), que conta devo fazer para saber qual é o preço de cada metro quadrado do terreno?

- 4.
- Desenho do aluno.
  - À área.
  - Sim.
  - $30 \times 12 = 360$ .
  - $10\ 800 : 360 = 30$ .

Escreva, em seu caderno, os valores que substituem as letras corretamente:

### Fazendo os cálculos para resolver o problema

- Calculando a área, obtemos: **a**.
- Dividindo o preço pago pela área, obtemos: **b**.

- (a)  $360\text{ m}^2$ ;  
(b) R\$ 30,00;  
(c) R\$ 10 800,00;  
(d) R\$ 30,00.

### Como verificar se está correto

- Multiplicando o valor obtido no último cálculo pela área, devemos encontrar, como resultado, **c**.

### Escrevendo a resposta do problema

Resposta:

César pagou **d** por metro quadrado do terreno que comprou.

5. Mércia disse que, andando 90 metros a cada minuto, faz o percurso da Praça Raul Soares à Praça Sete em 7 minutos e 12 segundos. Com base nestes dados, ela concluiu que a distância aproximada entre as duas praças é de 648 metros. Verifique se os cálculos de Mércia estão corretos.

Escreva, em seu caderno, os valores que substituem as letras corretamente em cada parte do texto a seguir:

5. (a) Praças;  
(b) Minuto;  
(c) Tempo;  
(d) 420;  
(e) 432;  
(f) 90;  
(g) 60;  
(h) 1,5;  
(i) 432;  
(j) 1,5;  
(k) 432 s;  
(l) 648 m;  
(m) Corretos.

### Compreendendo o problema

- O que se conhece no problema?  
A distância, em metros, entre duas **a**.  
Quantos metros Mércia anda a cada **b**.  
Quanto **c** Mércia gasta para ir de uma praça até outra.
- O que se quer conhecer?  
Se os cálculos feitos por Mércia estão corretos.



### Planejando o que fazer para resolver o problema

- Como cada minuto corresponde a 60 segundos, 7 minutos correspondem a **d** segundos. Logo, 7 minutos e 12 segundos totalizam **e** segundos.
- Mércia anda 90 metros a cada 60 segundos. Para saber quanto ela anda em um segundo, devo dividir **f** por **g**.
- Sabendo quanto ela anda em um segundo, devo multiplicar **h** por **i** para saber quantos metros ela anda em 7 minutos e 12 segundos.

### Fazendo os cálculos para resolver o problema

- Calculando quanto Mércia anda em um segundo, obtenho **j**.
- Calculando quantos segundos equivalem a 7 minutos e 12 segundos, obtenho **k**.
- Multiplicando os dois resultados obtidos, devo encontrar **l** metros.

### Como verificar se está correto

- Se o último resultado obtido nos cálculos coincidir com o que Mércia disse.

### Como responder o problema

Resposta do problema:

Os cálculos de Mércia estão **m**.

6. A fábrica de blocos de cimento “Primavera” produz blocos de um único tipo, em forma de paralelepípedo, cujas medidas são: comprimento 0,40 m, largura 0,15 m e altura 0,30 m. Se, na semana passada, fabricou 1 800 metros cúbicos de blocos, **quantos blocos ela produziu?**

### Compreendendo o problema

- O que se conhece no problema?

As dimensões de blocos de cimento produzidos pela fábrica.

Quantos metros cúbicos de bloco foram fabricados na semana passada.

- O que se quer conhecer no problema?

Quantos blocos de cimento foram fabricados na semana passada.

### Planejando o que fazer para resolver o problema

- Faça um desenho de um dos blocos de cimento com as suas medidas.
- Se multiplicar as três medidas de um bloco, o que você encontrará dele: sua área ou seu volume?
- É necessário calcular o volume de um bloco para resolver o problema?
- Se todos os blocos formam um volume de 1 800 metros cúbicos e se conheço o volume de cada um deles, o que devo fazer para saber quantos são os blocos?

Escreva, em seu caderno, os valores que substituem as letras corretamente:

### Fazendo os cálculos para resolver o problema

- Calculando o volume de cada bloco, obtém-se: **a**.
- Dividindo o volume total dos blocos produzidos **b** pelo volume de cada bloco **c**, encontro **d**.

### Como verificar se está correto

- Multiplicando o número de blocos **e** obtido pelo volume de cada um, devo encontrar como produto **f**.

### Como responder o problema

Resposta:

Na semana passada, a fábrica “Primavera” produziu **g** blocos.

- 6.
- Desenho do aluno.
  - O volume.
  - Sim.
  - Dividir 1 800 pelo volume de cada bloco.

- (a) 0,018 m<sup>3</sup>;
- (b) 1 800;
- (c) 0,018 m<sup>3</sup>;
- (d) 100 000 blocos;
- (e) 100 000;
- (f) 1 800;
- (g) 100 000 blocos.

Explore os exercícios de 1 a 6 para formular novos problemas, trocando dados com incógnitas.

Sugestões: 1ª) No problema 1, informar o preço de 13 agendas e perguntar o preço de 8. 2ª) No problema 2, informar a capacidade de cada vidro, em mililitros, e perguntar quantos deles foram necessários para conter toda a solução. 3ª) No problema 3, informar o total gasto na compra de rodapé e perguntar o preço pago, por metro. 4ª) No problema 4, informar o preço pago por metro quadrado e perguntar por quanto César comprou o terreno. 5ª) No problema 5, informar a distância aproximada entre as praças e o tempo de percurso e perguntar quantos metros, em média, ela andou a cada minuto. 6ª) No problema 6, informar a quantidade de blocos fabricados e perguntar quantos metros cúbicos de blocos correspondem a esta quantidade.

Use o método de redução à unidade, sempre que possível.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

Professor, eu notei que, ao resolver os problemas anteriores, foi obedecido o roteiro do quadro abaixo. É obrigatório seguir esse roteiro?

É claro que não! O objetivo do roteiro é ajudar, nunca se tornar uma obrigação.



### Compreendendo e resolvendo o problema

- O que se conhece?
- O que se quer conhecer?
  - Planejar o que fazer para resolver o problema
  - Fazer os cálculos para resolver o problema
  - Verificar se está correto
  - Responder o problema

Caro aluno: o roteiro do quadro anterior foi feito apenas para dar orientação de algumas fases a serem seguidas ao se resolver um problema. Mas, desde que você desenvolva raciocínio e estratégia que o leve a resolver o problema corretamente, não é necessário nem obrigatório seguir esse roteiro.

## Aprendendo em casa

7. (a) R\$ 54,00;  
 (b) 85;  
 (c) 85;  
 (d) R\$ 54,00;  
 (e) 18;  
 (f) R\$ 3,00;  
 (g) R\$ 3,00;  
 (h) 85;  
 (i) R\$ 255,00;  
 (j) R\$ 3,00;  
 (k) R\$ 255,00;  
 (l) R\$ 255,00;  
 (m) 85;  
 (n) R\$ 3,00;  
 (o) R\$ 3,00;  
 (p) R\$ 54,00;  
 (q) R\$ 255,00.

7. Para digitar 18 páginas, Pedro recebeu R\$ 54,00. Se Pedro digitar 85 páginas cobrando o mesmo preço por página, **quanto ele receberá?** Escreva, em seu caderno, os valores que substituem as letras corretamente:

### Compreendendo o problema

- O que se conhece no problema?  
 Sabe-se que Pedro recebeu (a) para digitar 18 páginas.
- O que se quer conhecer?  
 Quanto Pedro ganhará se digitar (b) páginas, **cobrando o mesmo preço por página.**

### Planejando o que fazer para resolver o problema

- Se soubermos o preço cobrado para digitar **uma página**, fica fácil resolver o problema?  
Sim, porque sabendo o preço de uma página, basta multiplicá-lo por **c** para se chegar à resposta.
- Como calcular o “preço por página”?  
Basta dividir **d** por **e**.
- Se ele ganha **f** reais por página, quando receberá por 85 páginas?  
Basta multiplicar **g** por **h**; logo, receberá **i**.

### Fazendo os cálculos para resolver o problema

- Calculando o preço por página, obtemos: **j**.
- Calculando o preço das 85 páginas, temos: **k**.

### Como verificar se está correto

Basta seguir o caminho inverso, usando o mesmo raciocínio:

- Primeiro, se dividirmos **l**, preço **em reais** encontrado para 85 páginas, por **m**, obteremos o preço **em reais** de uma página: **n**.
- Depois, se multiplicarmos o preço de uma página **o** por 18, obteremos **p**, que é o preço em reais que Pedro recebeu para digitar as 18 páginas.

### Como responder o problema

Resposta do problema:

Se Pedro digitar 85 páginas ao mesmo preço por página, receberá (q).

8. Resolva:

- Edson vai cercar, com arame farpado, um terreno retangular de 36 metros de comprimento por 15 metros de largura. Ele vai deixar aberto um espaço de 3 metros para colocar um portão. **Quantos metros de arame ele precisará comprar se pretende dar 5 voltas de arame no terreno?**
- Frederico viu o seguinte anúncio em um jornal: “Vendo um terreno de forma retangular, tendo 16 metros de largura por 32 metros de comprimento, ao preço de R\$ 50,00 o metro quadrado”. **Calcule o preço desse terreno para o Frederico.**

Sugira o uso de figuras ao resolver o exercício 8.

8. a) 495 m;  
b) R\$ 25 600,00.

9. Resolva:

- Nilton anda 72 metros a cada minuto. **Calcule a distância** que ele percorre depois de 8 minutos e 25 segundos com o mesmo rendimento anterior.
- Olga percorreu 6 630 m caminhando 78 metros a cada minuto. **Calcule quanto tempo ela gastou nesse percurso.**
- Pedro caminhou 6 300 m em 1 h 15 min. **Calcule a velocidade média** com que Pedro fez esse percurso.

9. a) 606 m;  
b) 85 min;  
c) 84 m/min.

Observe a **tabela** a seguir:



Antes de resolver os exercícios que seguem, explore situações que envolvam os conceitos de velocidade e velocidade média.

Sugestões:

- O que é mais provável: um automóvel percorrer longas distâncias mantendo sempre a mesma velocidade ou a velocidade dele variar nesse percurso?
- Se for possível um automóvel passar pelo marco do km 20 de uma estrada com a velocidade de 50 km por hora e manter essa velocidade durante uma hora, por qual marco ele estará passando ao fim desta hora?
- Durante exatamente uma hora, um automóvel percorre, sem parar, 70 km com a velocidade variando. É possível dizer que a “velocidade média” desse automóvel foi de 70 quilômetros por hora (70 km/h) durante esse percurso?
- Se uma notícia de jornal citar que a velocidade média de um piloto de Fórmula 1, em determinado circuito, foi de 204 km/h, como você calcularia o espaço total percorrido por ele, sabendo que o tempo necessário para o percurso foi de exatamente 1 h 30 min? Qual seria o resultado desse cálculo?

10. 14 dias.

11. 84 dias.

12. a) 312 818 m;  
b) 309 024 m;  
c) 305 049 m.

13. a) 309,024 km;  
b) 305,049 km.

14. 80 s.

15. a) 5 520 s;  
b) 92 min;  
c) 1 h 32 min.

16. a) 90 s;  
b) 78 s.

17. Sim. 1 min 30 s equivale a 1,5 min.

18. 1,3 min (cada segundo é 1/60 minuto); logo, 18 segundos =  $18/60 = 3/10$  do minuto.

Use os dados da tabela para resolver os exercícios a seguir:

Local e data	Três grandes prêmios da Fórmula 1			
	Tamanho da pista	Total de voltas	Tempo da volta mais rápida	Tempo de duração
AUSTRÁLIA 12/03/1999	5 302 m	59	1 min 30 s	1 h 35 min
BRASIL 26/03/1999	4 292 m	72	1 min 18 s	1 h 36 min
CANADÁ 18/06/1999	4 421 m	69	1 min 20 s	1 h 40 min

- Quantos dias decorreram entre o grande prêmio da Austrália e o do Brasil?
- Quantos dias decorreram entre o grande prêmio do Brasil e o do Canadá?
- Calcule quantos metros foram percorridos, ao todo, pelo vencedor:
  - No grande prêmio da Austrália.
  - No grande prêmio do Brasil.
  - No grande prêmio do Canadá.
- Escreva, em quilômetros, as distâncias totais percorridas pelo vencedor:
  - No grande prêmio do Brasil.
  - No grande prêmio do Canadá.
- A volta mais rápida no grande prêmio do Canadá foi feita em 1 min 20 s. Calcule esse tempo em segundos.
- Se um dos concorrentes tivesse percorrido cada uma das 69 voltas no tempo calculado no item anterior, quanto tempo ele teria gasto ao completar a corrida:
  - Em segundos?
  - Em minutos?
  - Em horas e minutos?
- Transforme em segundos o tempo da volta mais rápida:
  - No grande prêmio da Austrália.
  - No grande prêmio do Brasil.
- Certo jornal publicou que o tempo da volta mais rápida no grande prêmio da Austrália foi de 1,5 min. Essa informação está correta? Justifique sua resposta.
- Escreva o tempo da volta mais rápida no grande prêmio do Brasil em quantidade decimal de minutos.

## Usando letras ou figuras para resolver problemas

### Explorando o que você já sabe

Observe as expressões à esquerda e diga quais delas melhor correspondem aos itens da direita:

- Quadrado da soma de dois números.
- Quarta parte de um número.
- Soma do dobro de um número com o triplo de outro.
- Soma de dois números.
- Quádruplo de um número.
- Diferença de dois números.
- Cubo da diferença de dois números.
- Soma do produto de dois números com a soma de ambos.
- Produto da soma pela diferença de dois números.

- $7 + 9$
- $9 - 5$
- $(13 \times 8) + (13 + 8)$
- $(7 + 5)(7 - 5)$
- $(9 + 13)^2$
- $(18 - 4)^3$
- $\frac{13}{4}$
- $4 \times 21$
- $2 \times 8 + 3 \times 6$

Ver na página 11 observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

Explore exemplos que esclareçam para os alunos os fatos a seguir.

Como se sabe, a subtração e a divisão entre números naturais não são comutativas. Por essa razão, ao enunciar problemas relacionados com tais operações, deve-se explicitar a ordem dos termos. Assim, dizer: a diferença entre a e b, nesta ordem, significa  $a - b$ . Já dizer: “a diferença entre b e a, nesta ordem” significa  $b - a$ . O mesmo ocorre quando se diz: o quociente entre a e b, nesta ordem ( $a : b$ ), ou o quociente entre b e a, nesta ordem ( $b : a$ ).

- $(9 + 13)^2$ .
- $13/4$ .
- $2 \times 8 + 3 \times 6$ .
- $7 + 9$ .
- $4 \times 21$ .
- $9 - 5$ .
- $(18 - 4)^3$ .
- $(13 \times 8) + (13 + 8)$ .
- $(7 + 5)(7 - 5)$ .

### Aprendendo em sala de aula

#### 19. Represente:

- a) O dobro da soma de 5 e 9.
- b) A quinta parte de 16.
- c) O cubo da diferença de 17 e 8, nesta ordem.
- d) A diferença dos cubos de 17 e 8, nesta ordem.
- e) O produto da soma de 15 e 9 pela diferença dos mesmos números, nesta ordem.
- f) O quadrado da soma de 3 e 17.
- g) A soma dos quadrados de 3 e 17.

#### 20. Escreva em linguagem corrente:

- a)  $13 - 3$
- b)  $13^2 - 3$
- c)  $(13 - 3)^2$
- d)  $13 - 3^2$

Professor, se eu representar dois números, um pela letra a e outro pela letra b, posso dizer que  $a + b$  representa a soma desses dois números?

Perfeitamente!



Comente: expressão numérica é toda sequência de operações com números (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação), podendo ou não apresentar os sinais  $( )$ ,  $[ ]$  e  $\{ \}$  (parênteses, colchetes e chaves), chamados sinais de associação.

Explique, através de exemplos, a função dos sinais de associação: indicar a ordem na qual os cálculos devem ser efetuados. Mas não exagere!

- 19. a)  $2 \times (5 + 9)$ ;
- b)  $16/5$ ;
- c)  $(17 - 8)^3$ ;
- d)  $(17)^3 - (8)^3$ ;
- e)  $(15 + 9)(15 - 9)$ ;
- f)  $(3 + 17)^2$ ;
- g)  $(3)^2 + (17)^2$ .

- 20. a) Diferença de 13 e 3, nesta ordem;
- b) A diferença do quadrado de 13 e 3, nesta ordem;
- c) O quadrado da diferença de 13 e 3, nesta ordem;
- d) A diferença de 13 e o quadrado de 3, nesta ordem.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os textos do diálogo do exercício 20.

**Professor(a):** Como complemento da primeira frase do primeiro quadro desta página, explore no quadro as soluções usando quadradinhos, dos exercícios 37 (g) do capítulo 4 e 29 e 30 (b) do capítulo 2, mostrando para os alunos que a substituição dos quadradinhos por letras em nada modifica a resolução das igualdades, denominadas “equações”.

Lembre aos alunos que  $3 \times a$ ,  $3 \cdot a$ ,  $3a$  e  $3(a)$  são quatro maneiras diferentes de representar o triplo de um número representado pela letra  $a$ , bem como a equivalência de  $3a$  com  $a + a + a$ .

Lembre também que  $a/3$  ou  $a : 3$  representa a terça parte de um número representado pela letra  $a$ , o que equivale a dividi-lo por 3.

Comente: expressão literal (ou algébrica) é toda sequência de operações com números ou letras representando números (adição, subtração, multiplicação, divisão, potenciação ou radiciação), podendo ou não apresentar os sinais  $()$ ,  $[\ ]$  e  $\{ \}$ , chamados sinais de associação.

No momento, não achamos conveniente falar para os alunos que existem equações sem raízes.

Explore as atividades relacionadas com a propriedade do anulamento da multiplicação e com o conceito de função nas seguintes atividades:

1ª atividade: a) Sabe-se que o produto de dois números é zero. O que se pode dizer de, pelo menos, um deles? b) Se  $n$  representa um número natural, a que é igual o produto de  $n$  por zero? c) O que se pode dizer do produto de vários números se algum deles é o zero?

2ª atividade: Considere a expressão  $E = (x - 3)(x - 6)$ . Complete:

a) Se  $x = 10$ ,  $E = \dots$

b) Se  $x = 8$ ,  $E = \dots$

c) Se  $x = 6$ ,  $E = \dots$

Informe aos alunos que existem equações com mais de uma raiz. Exemplos fáceis de entender são do tipo  $(x - 4)(x - 6) = 0$  ou  $(x - 3)(x - 7)(x - 12) = 0$ , que têm duas e três raízes, respectivamente. (A primeira tem as raízes 4 e 6, e a segunda, as raízes 3, 7 e 12.) Argumente que essas raízes são evidentes como uma mera aplicação da propriedade da multiplicação: “ $a \times b = 0$ , se e somente se  $a = 0$  ou  $b = 0$ ”.

Gradativamente, iremos abordar outros aspectos das equações, como, por exemplo, o conjunto numérico ao qual devam pertencer suas raízes.

Você verá que representar números por letras traz enormes vantagens na resolução de diversos problemas, usando certo tipo de igualdades chamadas **equações**.

Mas, para que você domine bem a representação de números com letras e as diversas contas com eles, faça os exercícios a seguir.

## 21. Responda:

- a) Pensei em um número, somei 5 e obtive 12 como resposta. Qual foi o número em que pensei? R. 7
- b) A letra  $x$  representa um número tal que  $x + 5 = 12$ . Qual é o número que a letra  $x$  representa? R. 7
- c) Pensei em um número, subtraí 4 e obtive 6 como diferença. Qual foi o número em que pensei? R. 10
- d) A letra  $y$  representa um número tal que  $y - 4 = 6$ . Qual é o número que a letra  $y$  representa? R. 10
- e) Pensei em um número, multipliquei por 3 e obtive 15 como produto. Qual foi o número em que pensei? R. 5
- f) A letra  $z$  representa um número tal que  $3z = 15$ . Qual é o número que a letra  $z$  representa? R. 5
- g) Pensei em um número, dividi por 2 e encontrei 10 como quociente. Qual foi o número em que pensei? R. 20
- h) A letra  $w$  representa um número tal que  $\frac{w}{2} = 10$ . Qual é o número que a letra  $w$  representa? R. 20

## As igualdades:

$$x + 5 = 12$$

$$y - 4 = 6$$

$$3z = 15$$

$$\frac{w}{2} = 10$$

chamam-se “**equações**”, e as letras  $x$ ,  $y$ ,  $z$ ,  $w$  que nelas aparecem representando números chamam-se “**incógnitas**” das equações.

No caso dessas equações, o número que, substituindo a incógnita, transforma a equação em uma expressão verdadeira chama-se “**raiz**” ou **solução da equação**.

Como você viu, as raízes dessas equações são: 7, 10, 5 e 20, respectivamente.

Você verá mais tarde que existem equações com mais de uma raiz.

Você vai, também, aprender técnicas que permitem resolver equações, isto é, como efetuar cálculos que permitam encontrar suas raízes.

22. Escolha as **letras** que quiser **para representar números** e escreva as equações relacionadas com as seguintes frases:

- a) Somei 7 a um número e obtive 20 como soma.
- b) Subtraí 9 de um número e obtive 11 como diferença.
- c) Multipliquei um número por 4 e obtive 44 como produto.
- d) Dividi um número por 5 e obtive 8 como quociente.

22. a)  $a + 7 = 20$ ;  
b)  $b - 9 = 11$ ;  
c)  $4c = 44$ ;  
d)  $d/5 = 8$ .

23. Responda, com base no exercício anterior. **Qual é a raiz** da equação que corresponde:

- a) À frase **a)**?
- b) À frase **b)**?
- c) À frase **c)**?
- d) À frase **d)**?

23. a) 13;  
b) 20;  
c) 11;  
d) 40.

24. Ainda com relação às equações que você escreveu, **quais são as letras que você escolheu para representar as incógnitas?**

24. Resposta do aluno.

25. Escreva **frases** que **correspondam** às seguintes **equações**:

- a)  $z + 9 = 16$
- b)  $x - 7 = 15$
- c)  $7z = 28$
- d)  $\frac{w}{8} = 4$

25. a) Somei 9 a um número e obtive 16 como soma;  
b) Subtraí 7 de um número e obtive 15 como diferença;  
c) Multipliquei um número por 7 e obtive 28 como produto;  
d) Dividi um número por 8 e obtive 4 como quociente.

26. **Calcule mentalmente as raízes** das quatro equações anteriores:

26. a) 7;  
b) 22;  
c) 4;  
d) 32.

Professor, resolver essas equações, mentalmente, foi fácil. Mas toda equação pode ser resolvida mentalmente?

É claro que não. Imagine se eu pedisse a você que resolvesse mentalmente a equação:

$$3x + \frac{x}{3} - 84 = \frac{x+2}{2}$$

Você verá, mais adiante, como responder a essa pergunta.

Então, como posso resolver as equações?

Do mesmo modo que para subir uma escada devemos ir de degrau em degrau, para que você descubra a técnica de resolução de equações, daremos diversos exercícios que, pouco a pouco, irão auxiliá-lo a construir o seu conhecimento.

27. Você sabe que:

- Duas vezes um número chama-se **dobro** do número.
- Três vezes um número chama-se **triplo** do número.
- Quatro vezes um número chama-se **quádruplo** do número.
- Cinco vezes um número chama-se **quíntuplo** do número.
- O **quociente** de um número **por dois** chama-se **metade** do número.
- O **quociente** de um número **por três** chama-se **terça parte** do número.
- O **quociente** de um número **por quatro** chama-se **quarta parte** do número.

Agora, use a letra **z** para representar um número e, em seguida, represente:

27. a)  $2z$ ;  
b)  $5z$ ;  
c)  $3z + 4z$ ;  
d)  $2z + 4$ ;  
e)  $2(z + 4)$ ;  
f)  $z/2$ ;  
g)  $z/5$ ;  
h)  $2z - z/2$ ;  
i)  $2(3z)$ ;  
j)  $z$  e  $z + 4$ ;  
k)  $z$  e  $3z$ ;  
l)  $z + 4z$ ;  
m)  $5z - 13$ .

Em casa, os alunos devem anotar no caderno o quadro em destaque do exercício 27.

28.  $3z$ ;  $3 \times z$ ;  
 $3(z)$ ;  $z + z + z$ .

29. a)  $4p$ : o quádruplo de um número;  
b)  $6x$ : o sêxtuplo de um número.

30. a)  $z + z + z + z + z + z + z$ ;  
b)  $w + w + w + w + w$ .

31.  $x/3$ ;  $(1/3)x$ ;  $x : 3$ .

- a) O dobro deste número.  
b) O quántuplo deste número.  
c) A soma do triplo deste número com seu quádruplo.  
d) O dobro deste número somado com 4.  
e) O dobro da soma deste número com 4 (use parênteses).  
f) A metade deste número.  
g) A quinta parte deste número.  
h) A diferença entre o dobro deste número e a sua metade, nesta ordem.  
i) O dobro do triplo deste número (use parênteses).  
j) O número e outro 4 unidades maior que ele.  
k) O número e outro que seja o triplo dele.  
l) A soma deste número com seu quádruplo.  
m) A diferença entre o quántuplo deste número e 13, nesta ordem.

28. Use a letra **z** para representar, de 4 maneiras diferentes, o triplo de um número.

29. Você sabe que, se **n** representa um número,  $n + n + n = 3n$  ( $3n$  representa 3 vezes o número **n**, isto é, o triplo de **n**).

Agora, escreva na forma de produto as seguintes somas, nas quais as letras representam números, e o que elas representam.

- a)  $p + p + p + p$       b)  $x + x + x + x + x + x$

30. Nos produtos a seguir, as letras representam números. Escreva-os como soma de parcelas iguais:

- a)  $7z$       b)  $5w$

31. Use a letra **x** para representar, de três maneiras diferentes, a terça parte de um número.



32. Use as letras **z** e **w** para representar:

- a) A soma do dobro de um número com o triplo de outro.
- b) A diferença entre o quadrado de um número e a metade de outro, nesta ordem.
- c) A diferença entre a metade de um número e o quadrado de outro, nesta ordem.
- d) O quadrado da soma de dois números (use parênteses).
- e) A diferença dos quadrados de dois números.

33. Se cada uma das letras **y** e **w** representa um número, escreva as frases correspondentes a:

- a)  $3y + 4w$
- b)  $y^3 - \frac{w}{4}$
- c)  $2(y + w)$
- d)  $2y = w + 4$

34. Imagine que ■ representa um número. Escreva a frase correspondente a:

- a)  $3 \blacksquare$
- b)  $\blacksquare / 3$
- c)  $\blacksquare^2 + 7$
- d)  $4 \blacksquare + 5 \blacksquare$

Você verá como as equações facilitam a resolução de problemas. Mas vamos começar representando as incógnitas por figuras, e não por letras.

Depois de alguns exemplos com figuras é que passaremos a usar letras como incógnitas.

35. Ana, Beatriz e Cláudia têm juntas R\$ 720,00. Ana tem o triplo de Beatriz e esta, o dobro do que tem Cláudia. Quanto tem cada uma?

Na figura a seguir, utilizamos maços de cédulas para representar as quantias que elas possuem.

Cláudia	Beatriz	Ana	Total
			R\$ 720,00

- a) Qual delas possui menor quantia?
- b) Quantos maços de cédulas estão representando a quantia que ela possui?
- c) Por que a quantia que Beatriz possui está representada por dois maços de cédulas?
- d) O triplo do dobro de um número equivale a quantas vezes esse número?
- e) Por que a quantia que Ana possui está representada por seis maços de cédulas?
- f) Quantos maços de cédulas representam a quantia que as três possuem juntas?
- g) Se nove maços representam R\$ 720,00, que conta faço para saber a quantia representada por um maço? Qual é o resultado dessa conta?
- h) Agora, calcule o valor das quantias representadas por 2 maços e 6 maços.
- i) Se você somar os valores encontrados nos itens (g) e (h), quanto deverá encontrar?
- j) Escreva a resposta do problema.








- 32. a)  $2z + 3w$  ou  $2w + 3z$ ;
- b)  $z^2 - w/2$ ;
- c)  $z/2 - w^2$ ;
- d)  $(z + w)^2$  ou  $(w + z)^2$ ;
- e)  $z^2 - w^2$ .

- 33. a) A soma do triplo de um número com o quádruplo do outro;
- b) A diferença do cubo de um número e a quarta parte de outro, nesta ordem;
- c) O dobro da soma de dois números;
- d) A igualdade do dobro de um número com a soma de outro número com 4.

- 34. a) O triplo de um número.
- b) A terça parte de um número.
- c) A soma do quadrado de um número com 7.
- d) A soma do quádruplo e do quádruplo de um número.

- 35. a) Cláudia;
- b) 1;
- c) Porque ela possui o dobro do que possui Cláudia;
- d) 6 vezes;
- e) Porque ela possui o triplo do que possui Beatriz;
- f) 9;
- g) Divido R\$ 720,00 por 9. O resultado é R\$ 80,00;
- h) 2 maços, R\$ 160,00, 6 maços, R\$ 480,00;
- i) R\$ 720,00;
- j) Cláudia tem R\$ 80,00, Beatriz tem R\$ 160,00 e Ana tem R\$ 480,00.

36. Carlos, Maria e Ângela receberam 21 revistas de presente. Cada uma delas recebeu o triplo da quantidade recebida por Carlos. **Quantas revistas recebeu cada um?**

 CARLOS	
 MARIA	
 ÂNGELA	
<b>Total recebido</b>	 = 21

Julia Bianchi, 2006

Considere que, na figura, cada pacote de presentes contém a mesma quantidade de revistas. Agora, responda:

36. a) Carlos;

b) 1;

c) 3;

d) 7;

e) 3;

f) Carlos: 3 revistas, Ângela: 9 revistas, Maria: 9 revistas;

g) Carlos recebeu três revistas. Ângela e Maria receberam 9 revistas cada uma.

a) Qual dos três recebeu menor quantidade de revistas?

b) Quantos pacotes de revistas representam essa quantidade recebida?

c) Quantos pacotes representam as quantidades de revistas recebidas pela Ângela?

d) Quantos pacotes representam a quantidade recebida pelos três?

e) Se nos sete pacotes existem, ao todo, 21 revistas, quantas revistas existem em cada pacote?

f) Calcule quantas revistas cada um deles recebeu.

g) Escreva a resposta do problema.

37. Evair tem R\$ 150,00 a mais do que Jorge, e Délio tem R\$ 200,00 a mais do que Evair. Os três juntos possuem R\$ 2 750,00. **Quanto tem cada um?**

 Jorge	
 Evair	 + 150,00
 Délio	 + 150,00 + 200,00
JUNTOS POSSUEM	 +  + 150,00 +  + 150 = 2 750,00
Trocando parcelas de ordem	 +  +  + (150 + 150 + 200) = 2 750,00
Somando parcelas	3  + 500 = 2 750,00
Subtraindo 500 dos dois lados da igualdade	3  + 500 - 500 = 2 750,00 - 500
Calculando as diferenças	3  = 2 250,00
Calculando	 = 2 250,00 / 3 = 750,00

Julia Bianchi, 2006

Pergunte aos alunos: Se 3 maços de cédulas mais 500 reais equivalem a 2 750 reais, quantos reais valem os 3 maços?

Obs.: Em um abuso de linguagem, estamos denominando os membros da equação com o termo "lados".

- a) Qual dos três tem menor quantia?
- b) Quantos maços de cédulas representam a quantia que ele tem?
- c) Que soma representa o quanto Evair possui?
- d) Que soma representa o quanto Délio possui?
- e) Que soma representa o quanto os três possuem?
- f) Ao trocar as parcelas de ordem, quantas figuras representando maços de cédulas ficaram juntas?
- g) Calcule:  $R\$ 150,00 + R\$ 150,00 + R\$ 200,00$ .
- h) Calcule  $R\$ 2 750,00 - R\$ 500,00$ .
- i) Se o triplo de uma quantia equivale a  $R\$ 2 250,00$ , que conta devemos fazer para calcular o valor dessa quantia?
- j) Fazendo essa conta, você encontra a quantia de um dos três. De quem?
- k) Calcule quanto Evair possui.
- l) Calcule quanto Délio possui.
- m) Somando as três quantias encontradas nos itens j), k), l), quanto devemos encontrar?
- n) Escreva a resposta do problema.

37. a) Jorge;  
b) 1;  
c) 1 maço +  $R\$ 150,00$ ;  
d) 1 maço +  $R\$ 350,00$ ;  
e)  $3 \square + 500$ ;  
f) 3;  
g)  $R\$ 500,00$ ;  
h)  $R\$ 2 250,00$ ;  
i) Devemos dividir  $R\$ 2 250,00$  por 3;  
j) Jorge,  $R\$ 750,00$ ;  
k)  $R\$ 900,00$ ;  
l)  $R\$ 1 100,00$ ;  
m)  $R\$ 2 750,00$ ;  
n) Jorge tem  $R\$ 750,00$ ,  
Evair tem  $R\$ 900,00$  e  
Délio tem  $R\$ 1 100,00$ .

Observe que começar as representações pelas grandezas menores evita o aparecimento de frações e/ou expressões com parcelas positivas e negativas, o que nos obrigaria a “eliminar denominadores” ou efetuar adições algébricas em detrimento de somas de positivos.

Observe que, nos três problemas, **começamos as representações pelas grandezas menores**:

- ◆ No primeiro problema, pela **menor quantia** (a de Cláudia).
- ◆ No segundo problema, pela **menor quantidade de revistas recebidas** (por Carlos).
- ◆ No terceiro problema, por quem **tem a menor quantidade de dinheiro** (Jorge).

Quer dizer, então, que sempre devo começar pela menor quantidade em cada problema?

Sim. É mais conveniente representar as grandezas em ordem crescente de valor.



Son Salvador

Agora, você irá rever os mesmos problemas que foram resolvidos, usando figuras. Apenas, no lugar das figuras, usaremos letras representando as quantidades.

Recomende ou explore a leitura de: Usando letras para resolver problemas.

Livro: “Brincando com números”.




Luiz Márcio Imenes.  
Coleção Vivendo a Matemática.

Editora Scipione.

38. Destaque que, ao usar equações para resolver problemas, também começamos usando a incógnita para representar a menor quantidade. Depois, relacionamos as demais quantidades, em ordem crescente de valor.

38. Ana, Beatriz e Cláudia têm juntas R\$ 720,00. Ana tem o triplo de Beatriz, e esta, o dobro do que tem Cláudia. **Quanto tem cada uma?**

Na figura a seguir, utilizamos letras para representar as quantias que elas possuem:

	Cláudia	$x$
	Beatriz	$2x$
	Ana	$3(2x)$

Julia Bianchi, 2006

Cláudia + Beatriz + Ana
$x + 2x + 3(2x) = 720,00$

Resolvendo:





$x + 2x + 6x = 720,00$
$9x = 720,00$
$x = 720,00 : 9$
$x = 80,00$

- a) Cláudia;
- b)  $x$ ;
- c) Porque ela possui o dobro do que tem Cláudia;
- d) Porque ela possui o triplo do que tem Beatriz;
- e) Sim;
- f) 9 vezes;
- g) Dividir 720 por 9. O resultado é 80;
- h)  $2x = \text{R\$ } 160,00$ ;  
 $3(2x) = \text{R\$ } 480,00$ ;
- i)  $\text{R\$ } 720,00$ ;
- j) Cláudia tem  $\text{R\$ } 80,00$ ,  
Beatriz tem  $\text{R\$ } 160,00$   
e Ana tem  $\text{R\$ } 480,00$ .

- a) Qual delas possui menor quantia?
- b) Qual letra está representando a quantia que ela possui?
- c) Por que a quantia que Beatriz possui está representada por  $2x$ ?
- d) Por que a quantia que Ana possui está representada por  $3(2x)$ ?
- e)  $3(2x)$  representa o mesmo que  $6x$ ?
- f) A soma  $x + 2x + 6x$  representa quantas vezes a quantia de Cláudia?
- g) Se sei que  $9x = 720$ , que conta devo fazer para calcular  $x$ ? Qual é o resultado dessa conta?
- h) Agora, calcule o valor das quantias representadas por  $2x$  e  $3(2x) = 6x$ .
- i) Se você somar os valores encontrados nos itens (g) e (h), quanto deverá encontrar?
- j) Escreva a resposta do problema.



39. Carlos, Maria e Ângela receberam 21 revistas de presente. Cada uma delas recebeu o triplo da quantidade recebida por Carlos. **Quantas revistas recebeu cada um?**

 <b>Carlos</b>	$y$
 <b>Ângela</b>	$3y$
 <b>Maria</b>	$3y$
	$y + 3y + 3y = 21$ $7y = 21$ $y = 3$

Mília Bianchi, 2006

39. Chame a atenção dos alunos para o fato de que se usará no problema a letra  $y$  para representar a menor quantidade. É importante que eles percebam, gradativamente, que a letra usada para representar incógnitas pode ser qualquer uma. Entretanto, destaque que é muito comum serem usadas as últimas letras do alfabeto ( $x, y, z, w, \dots$ ) para representar incógnitas, reservando as primeiras letras ( $a, b, c, \dots$ ) para representar números conhecidos.




- Qual dos três recebeu menor quantidade de revistas?
- Que letra representa essa quantidade recebida?
- Qual expressão, contendo a letra  $y$ , representa a quantidade de revistas recebidas pela Ângela?
- Qual expressão, contendo a letra  $y$ , representa a quantidade recebida pelos três?
- Se  $7y = 21$ , que conta devo fazer para calcular o valor que  $y$  representa?
- Calcule quantos pacotes cada um deles recebeu.
- Escreva as respostas.

- Carlos;
- $y$ ;
- $3y$ ;
- $7y$ ;
- Dividir 21 por 7;
- Carlos: 1 pacote;  
Ângela: 3 pacotes;  
Maria: 3 pacotes;
- Carlos recebeu 3 revistas. Ângela e Maria receberam, cada uma, nove revistas.



40. Evair tem R\$ 150,00 a mais que Jorge, e Délio tem R\$ 200,00 a mais que Evair. Os três juntos possuem R\$ 2 750,00. Quanto tem cada um?

Neste problema, usaremos a letra **z** para representar a menor quantidade:

 <p><b>Jorge</b></p>	$z$
 <p><b>Evair</b></p>	$z + 150$
 <p><b>Délio</b></p>	$(z + 150) + 200$
 <p><b>Jorge Evair Délio</b></p>	$z + (z + 150) + [(z + 150) + 200] = 2\,750$
<p>Trocando parcelas de ordem</p>	$(z + z + z) + (150 + 150 + 200) = 2\,750$
<p>Somando parcelas</p>	$3z + 500 = 2\,750$
<p>Calculando <math>3z</math></p>	$3z = 2\,250$
<p>Calculando <math>z</math></p>	$z = 2\,250 : 3$ logo, $z = 750$

Júlia Bianchi, 2006

- a) Qual dos três tem menor quantia?
- b) Qual expressão, contendo a letra **z**, representa a quantia que ele tem?
- c) Que soma representa o quanto Evair possui?
- d) Que soma representa o quanto Délio possui?
- e) Que soma representa o quanto os três possuem?
- f) Ao trocar as parcelas de ordem, quantas expressões contendo a letra **z** ficaram juntas?
- g) Calcule:  $R\$ 150,00 + R\$ 150,00 + R\$ 200,00$ .
- h) Calcule:  $R\$ 2 750,00 - R\$ 500,00$ .
- i) Se o triplo de uma quantia equivale a  $R\$ 2 250,00$ , que conta devemos fazer para calcular o valor dessa quantia?
- j) Fazendo essa conta, você encontra a quantia de um dos três. Quem é ele?
- k) Calcule quanto Evair possui.
- l) Calcule quanto Délio possui.
- m) Somando as três quantias encontradas no itens (j), (k), (l), quanto devemos encontrar?
- n) Escreva a resposta do problema.

40. a) Jorge;  
 b)  $z$ ;  
 c)  $z + R\$ 150,00$ ;  
 d)  $(z + R\$ 150,00) + R\$ 200,00$ ;  
 e)  $z + (z + R\$ 150,00) + [(z + R\$ 150,00) + R\$ 200,00]$ ;  
 f) 3;  
 g)  $R\$ 500,00$ ;  
 h)  $R\$ 2 250,00$ ;  
 i) Dividir  $R\$ 2 250$  por 3;  
 j) Jorge;  
 k)  $R\$ 900,00$ ;  
 l)  $R\$ 1 100,00$ ;  
 m)  $R\$ 2 750,00$ ;  
 n) Jorge:  $R\$ 750,00$ ;  
 Evair:  $R\$ 900,00$ ;  
 Délio:  $R\$ 1 100,00$ .

Você viu alguns exemplos de como as equações tornam a resolução de problemas uma tarefa bem mais fácil, quando sabemos resolvê-las.

Saber a técnica de resolução de equações é muito importante, pois é com ela que podemos resolver problemas que, aparentemente, são difíceis.

Nos exercícios a seguir, vamos detalhar alguns passos a serem seguidos na resolução de equações para que você domine, pouco a pouco, a técnica de resolução.

Antes, porém, duas observações:

1ª) Em uma igualdade como  $a = b$ ,

- ◆ a expressão antes do sinal = chama-se “primeiro membro” e
- ◆ a expressão depois do sinal = chama-se “segundo membro”.

2ª) Dada uma equação com uma incógnita, se, ao substituirmos a incógnita por um número, obtivermos uma expressão verdadeira, então esse número chama-se “raiz” (ou solução) da equação.

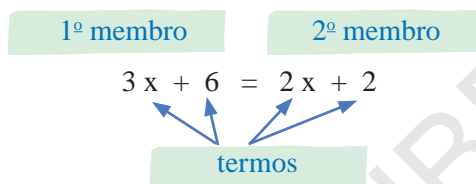
Exemplificando o que se disse:

A equação  $7x + 3 = 4x + 9$  tem uma única incógnita: **x**. Seu primeiro membro é  $7x + 3$  e seu segundo membro é  $4x + 9$ . Ao substituir, na equação, **x** por 2, encontramos a expressão verdadeira:  $14 + 3 = 8 + 9$ . Por isso, dizemos que 2 é raiz dessa equação.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, os dois últimos quadros em destaque desta página.

41. a) Primeiro membro:  
 $5x + 4$ ; termos:  $5x$  e  $4$ ;  
 b) Segundo membro:  
 $7x + 9$ ; termos:  $7x$  e  $9$ .

41. Observe:



42. a) Segundo membro:  
 $3x + 8$ ; termos:  $3x$  e  $8$ ;  
 b) Segundo membro:  
 $6x + 13$ ; termos:  
 $6x$  e  $13$ .

43. Porque, substituindo a incógnita pelo número 5, a equação torna-se uma frase verdadeira.

O conceito de equações equivalentes é um pouco mais rigoroso que o enunciado. Aqui, estamos assumindo implicitamente que as suas incógnitas pertencem a um mesmo conjunto numérico.

44. Resposta do aluno.  
 Exemplo:  
 $4x = 28$  e  $x + 13 = 20$ .

45. Exemplo: 7.

Lembre aos alunos que  $18 - 5 = 18 + (-5)$ . Assim, podemos interpretar  $18 - 5$  como soma de duas parcelas:  $18$  e  $(-5)$ .

Logo, em uma equação como  $7x - 5 = 3x + 15$ , podemos dizer que os termos do primeiro membro (vistos como parcelas) são  $7x$  e  $-5$ .

46. 6 é raiz de todas as equações.

47. As quatro equações do exercício anterior são equivalentes porque 6 é raiz de todas elas.

48. a) Sim;  
 b) Sim;  
 c) Sim;  
 d) Sim.

É extremamente útil exercer atividades análogas às dos exercícios 48 e 52, usando uma balança em sala de aula. Esta balança pode ser feita com material caseiro.

Solicite que os alunos escrevam, em seus cadernos, a frase em destaque no final da página.

As **parcelas** que formam cada um dos membros de uma equação chamam-se **termos** desses membros.

Em cada uma das equações a seguir, dê o primeiro membro e seus termos:

a)  $5x + 4 = 3x + 8$

b)  $7x + 9 = 6x + 13$

42. Em cada uma das duas equações do exercício anterior, identifique o segundo membro e seus termos.

43. As equações  $3x = 15$  e  $x + 7 = 12$  **têm a mesma raiz**: 5. Por isso, **chamam-se equações equivalentes**. Agora, responda: por que 5 é raiz das equações  $3x = 15$  e  $x + 7 = 12$ ?

44. As expressões  $4 \times 7 = 28$  e  $7 + 13 = 20$  são verdadeiras. **Invente duas equações equivalentes**, com base nessas expressões.

45. Qual é a raiz das equações que você inventou?

46. Verifique se 6 é raiz das equações a seguir:

a)  $x + 12 = 18$

b)  $x + 12 - 12 = 18 - 12$

c)  $x + 0 = 6$

d)  $x = 6$

47. As quatro equações do exercício anterior são **equivalentes** ou não? Justifique sua resposta.

48. Responda:

- a) Se uma balança de dois pratos estiver equilibrada e retirarmos o mesmo peso de cada um dos pratos, ela continuará equilibrada ou não?

- b) Se subtrairmos um mesmo número dos dois membros de uma equação, obteremos ou não outra equação equivalente?

- c) Se uma balança de dois pratos estiver equilibrada e colocarmos o mesmo peso em cada um dos pratos, ela continuará equilibrada ou não?

- d) Se somarmos um mesmo número dos dois membros de uma equação, obteremos ou não outra equação equivalente?

Você acabou de descobrir uma importante **propriedade das equações**:

**Somando ou subtraindo um mesmo número aos dois membros de uma equação, obtém-se outra equação equivalente.**

Vamos usar essa propriedade para resolver algumas equações nos exercícios que seguem:

49. Faça o que se recomenda para resolver cada uma das equações a seguir:

- a) Some 4 aos dois membros.
- b) Some 9 aos dois membros.
- c) Subtraia 11 dos dois membros.
- d) Subtraia 13 dos dois membros.

$$x - 4 = 17$$

$$x - 9 = 25$$

$$x + 11 = 26$$

$$x + 13 = 34$$

49. a)  $x - 4 + 4 = 17 + 4$ ;  
 b)  $x - 9 + 9 = 25 + 9$ ;  
 c)  $x + 11 - 11 = 26 - 11$ ;  
 d)  $x + 13 - 13 = 34 - 13$ .

50. Copie a coluna da direita da tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Equação dada:	$x + 12 = 20$
Subtraia 12 dos dois membros.	$x + 12 - 12 = \mathbf{a} - 12$
Calcule o novo valor dos dois membros.	$x + 0 = \mathbf{b}$
Efetue a soma do primeiro membro.	$\mathbf{c} = 8$
Equação equivalente à equação dada:	$x = 8$

Equação dada:	$x - 13 = 27$
Some 13 aos dois membros.	$x - 13 + 13 = 27 + \mathbf{d}$
Calcule o novo valor dos dois membros.	$x = \mathbf{e}$
Equação equivalente à equação dada:	$x = 40$

50. (a) 20;  
 (b) 8;  
 (c) x;  
 (d) 13;  
 (e) 40.

51. a)  $y = 13$ ;  
 b)  $z = 40$ .

Antes de resolver o exercício 52, particularize o item (a) usando os termos dobro, triplo etc. Idem item (c), usando os termos metade, terça parte etc.

51. Resolva as equações a seguir, somando ou subtraindo dos dois membros o número conveniente:

- a)  $y + 12 = 25$
- b)  $z - 19 = 21$

52. Responda:

- a) Uma balança de dois pratos está equilibrada. O que se pode dizer de outra balança que tem nos dois pratos um mesmo múltiplo dos pesos da primeira balança?
- b) Se multiplicarmos os dois membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obteremos ou não outra equação equivalente?
- c) Uma balança de dois pratos está equilibrada. O que se pode dizer de outra balança que tem nos dois pratos um mesmo divisor dos pesos da primeira balança?
- d) Se dividirmos os dois membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obteremos ou não outra equação equivalente?

52. a) Ela também está equilibrada;  
 b) Obteremos uma equação equivalente;  
 c) Ela também está equilibrada;  
 d) Obteremos uma equação equivalente.

Em casa, os alunos devem anotar no caderno os quadros em destaque dos exercícios 41, 48 e 52 e, também, o enunciado do exercício 43.

Chame a atenção dos alunos para o fato de que evidentemente, no item (d) do exercício 52 e na segunda frase do quadro ao lado, o número mencionado não pode ser o zero.

Você acabou de descobrir outras duas importantes propriedades das equações:

Multiplicando os dois membros de uma equação por um mesmo número diferente de zero, obtém-se outra equação equivalente.

Dividindo os dois membros de uma equação por um mesmo número, diferente de zero, obtém-se outra equação equivalente.

Recordar:

$$7 \times (2/3) = (7 \times 2)/3 = 14/3.$$

$$7 \times (1/7) = 7/7 = 1.$$

$$45 : 5 = 45/5 = 9.$$

53. a)  $5x/5 = 9$ ;  $x = 9$ ;

b)  $3x/3 = 9$ ;  $x = 9$ ;

c)  $4x/4 = 36$ ;  $x = 36$ ;

d)  $6x/6 = 72$ ;  $x = 72$ .

53. Faça o que se recomenda para resolver cada uma das equações a seguir:

a) Divida os dois membros por 5.

$$5x = 45$$

b) Divida os dois membros por 3.

$$3x = 27$$

c) Multiplique os dois membros por 4.

$$\frac{x}{4} = 9$$

d) Multiplique os dois membros por 6.

$$\frac{x}{6} = 12$$

54. a) 12;

b) 4;

c) 4 x 7;

d) 28.

**Professor(a):** Explorar o significado de fração como operador.

Exemplificando, através de um problema:

Qual o número que devo multiplicar 5 para obter como produto o número 3?

Representando o número procurado por  $x$ , temos a equação:  $5x = 3$ . Resolvendo-a, obteremos  $x = 3/5$ .

Proponha aos alunos a verificação, bem como outros problemas envolvendo frações ou decimais como coeficientes da incógnita ou como segundos membros das equações correspondentes.

54. Copie a coluna da direita da tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras **a** a **d**:

Equação dada:	$3x = 12$
Divida os dois membros por 3.	$\frac{3x}{3} = \frac{\mathbf{a}}{3}$
Calcule o novo valor dos dois membros.	$x = \mathbf{b}$
Equação equivalente à equação dada:	$x = 4$

Equação dada:	$\frac{x}{7} = 4$
Multiplique os dois membros por 7.	$\frac{7x}{7} = \mathbf{c}$
Calcule o novo valor dos dois membros.	$x = \mathbf{d}$
Equação equivalente à equação dada:	$x = 28$

55. a)  $y = 72/9 = 8$ ;

b)  $z = 77$ .

55. Resolva as equações a seguir, multiplicando ou dividindo os dois membros pelo número conveniente:

a)  $9y = 72$

b)  $\frac{z}{11} = 7$

56. Você se lembra? Você viu no capítulo 1 que:

56. a)  $14x$ ;

b)  $12y$ ;

c)  $11x$ .

$$4x + 7x = (4 + 7)x = 11x$$

$$3y + 4y + 6y = (3 + 4 + 6)y = 13y$$

Calcule:

a)  $5x + 9x$

b)  $2y + 3y + 7y$

c)  $8x + 7x - 4x$



57. Observe:

$$8x - 3x + 5x - 4x = 8x + 5x - 3x - 4x = 13x - 7x = 6x$$

Calcule:

a)  $7x - 2x + 9x - x$

b)  $12y - 5y + 4y - 7y$

Em casa, os alunos devem anotar no caderno os quadros em destaque dos exercícios 56 e 57.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

57. a)  $13x$ ;  
b)  $4y$ .

## Aprendendo em casa

58. Responda:

- a) Pensei em um número, somei 4 e obtive 16 como soma. Qual foi o número em que pensei?
- b) A letra  $x$  representa um número tal que  $x + 4 = 16$ . Qual é o número que a letra  $x$  representa?
- c) Pensei em um número, subtraí 5 e obtive 13 como diferença. Qual foi o número em que pensei?
- d) A letra  $y$  representa um número tal que  $y - 5 = 13$ . Qual é o número que a letra  $y$  representa?
- e) Pensei em um número, multipliquei por 4 e obtive 32 como produto. Qual foi o número em que pensei?
- f) A letra  $z$  representa um número tal que  $4z = 32$ . Qual é o número que a letra  $z$  representa?
- g) Pensei em um número, dividi por 3 e encontrei 8 como quociente. Qual foi o número em que pensei?
- h) A letra  $w$  representa um número tal que  $\frac{w}{3} = 8$ . Qual é o número que a letra  $w$  representa?

58. a) 12;  
b) 12;  
c) 18;  
d) 18;  
e) 8;  
f) 8;  
g) 24;  
h) 24.

59. Escolha as letras que quiser para representar números e escreva as equações relacionadas com as seguintes frases:

- a) Somei 10 a um número e obtive 27 como soma.
- b) Subtraí 6 de um número e obtive 14 como diferença.
- c) Multipliquei um número por 3 e obtive 27 como produto.
- d) Dividi um número por 4 e obtive 8 como quociente.

59. a)  $x + 10 = 27$ ;  
b)  $x - 6 = 14$ ;  
c)  $3x = 27$ ;  
d)  $x/4 = 8$ .

60. Responda, com base no exercício anterior. Qual é a raiz da equação que corresponde:

- a) À frase **a**?                      c) À frase **c**?
- b) À frase **b**?                      d) À frase **d**?

60. a) 17;  
b) 20;  
c) 9;  
d) 32.

61. Ainda com relação às equações que você escreveu, quais foram as letras que você escolheu para representar as incógnitas?

61. Resposta do aluno.

62. a) Somei 5 a um número e obtive 28 como soma;  
 b) Subtraí 9 de um número e obtive 39 como diferença;  
 c) Multipliquei um número por 6 e obtive 54 como produto;  
 d) Dividi um número por 5 e obtive 35 como quociente.

62. Escreva frases que correspondam às seguintes equações:

a)  $z + 5 = 28$

b)  $x - 9 = 39$

c)  $6z = 54$

d)  $\frac{w}{5} = 35$

63. Calcule mentalmente as raízes das quatro equações anteriores.

64. Use a letra  $x$  para representar:

63. a) 23;  
 b) 48;  
 c) 9;  
 d) 175.

Verifique, nos exercícios 64 (e), (i) e 69 (d), se os alunos perceberam a necessidade do uso dos parênteses.

64. a)  $3x$ ;  
 b)  $4x$ ;  
 c)  $2x + x/2$ ;  
 d)  $3x + 16$ ;  
 e)  $3(x + 7)$ ;  
 f)  $x/5$ ;  
 g)  $x/10$ ;  
 h)  $3x - x/4$ ;  
 i)  $3(2x)$ ;  
 j)  $x; x + 7$ ;  
 k)  $x + x/3$ ;  
 l)  $4x - 10$ .

a) O triplo de um número.

b) O quádruplo de um número.

c) A soma do dobro de um número com sua metade.

d) O triplo de um número somado com 16.

e) O triplo da soma de um número com 7.

f) A quinta parte de um número.

g) A décima parte de um número.

h) A diferença entre o triplo de um número e a sua quarta parte, nesta ordem.

i) O triplo do dobro de um número.

j) Um número e outro 7 unidades maior que ele.

k) A soma de um número com sua terça parte.

l) A diferença entre o quádruplo de um número e 10, nesta ordem.

65.  $5y$ ;  $5 \cdot y$ ;  
 $y + y + y + y + y$ ;  
 $5 \times y$ .

65. Use a letra  $y$  para representar, de 4 maneiras diferentes, o quádruplo de um número.

66. a)  $3x$ ;  
 b)  $7z$ .

66. Escreva na forma de produto as seguintes somas nas quais as letras representam números:

a)  $x + x + x$

b)  $z + z + z + z + z + z + z + z$

67. a)  $z + z + z + z$ ;  
 b)  $p + p + p + p + p + p$ .

67. Nos produtos a seguir, as letras representam números. Escreva-os como soma de parcelas iguais:

a)  $4z$

b)  $6p$

68.  $(1/3)y$ ;  $y/3$ ;  $y : 3$ .

68. Use a letra  $y$  para representar, de três maneiras diferentes, a terça parte de um número.

69. Use as letras  $z$  e  $w$  para representar:

69. a)  $z + 4w$ ;  
 b)  $z^3 - w/3$ ;  
 c)  $z^2 - w/2$ ;  
 d)  $(z - w)^2$ ;  
 e)  $z^2 + w^2$ .

a) A soma de um número com o quádruplo de outro.

b) A diferença entre o cubo de um número e a terça parte de outro, nesta ordem.

c) A diferença entre o quadrado de um número e a metade de outro, nesta ordem.

d) O quadrado da diferença de dois números.

e) A soma dos quadrados de dois números.

70. Se as letras **z** e **x** representam dois números diferentes, escreva as frases correspondentes a:

a)  $4z + 5x$

c)  $3(z + x)^2$

b)  $z - \frac{w}{5}$

d)  $5z = x + 9$

71. Imagine que  $\square$  representa um número. Escreva a frase correspondente a:

a)  $5\square$

c)  $\square + 9$

b)  $\square/2$

d)  $3\square + 2\square$

72. Em cada uma das equações a seguir, dê o primeiro membro e os seus termos:

a)  $3x + 9 = x + 2$

b)  $9x - 9 = 7x + 11$

73. Dê o segundo membro e os termos das duas equações do exercício anterior.

74. As expressões  $9 \times 5 = 45$  e  $5 + 19 = 24$  são verdadeiras.

Invente duas equações equivalentes, baseando-se nessas expressões.

75. Qual é a raiz das equações que você inventou?

76. Verifique se 10 é raiz das equações a seguir:

a)  $x + 9 = 19$

c)  $x + 0 = 10$

b)  $x + 9 - 9 = 19 - 9$

d)  $x = 10$

77. As quatro equações do exercício anterior são equivalentes ou não? Justifique sua resposta.

78. Resolva as equações a seguir, somando ou subtraindo dos dois membros o número conveniente:

a)  $y + 21 = 33$

b)  $z - 19 = 21$

79. Resolva as equações a seguir, multiplicando ou dividindo os dois membros pelo número conveniente:

a)  $5y = 75$

b)  $\frac{z}{8} = 6$

80. Calcule:

a)  $3x + 4x$

b)  $y + 4y + 3y$

c)  $5x + 6x - 2x$

81. Calcule:

a)  $9x - 3x + 8x - 4x$

b)  $15y - 6y + 5y - 3y$

70. a) A soma do quádruplo de um número com o quádruplo do outro;  
b) A diferença entre um número e a quinta parte do outro;  
c) O triplo do quadrado da soma de dois números;  
d) A igualdade entre o quádruplo de um número e outro, somado com 9.

71. a) O quádruplo de um número;  
b) A metade de um número;  
c) A soma de um número com 9;  
d) A soma do triplo de um número com o dobro dele.

72. a) Primeiro membro:  $3x + 9$ ; termos:  $3x$  e  $9$ ;  
b) Primeiro membro:  $9x - 9$ ; termos:  $9x$  e  $-9$ .

73. a) Segundo membro:  $x + 2$ ; termos:  $x$  e  $2$ ;  
b) Segundo membro:  $7x + 11$ ; termos:  $7x$  e  $11$ .

74. Resposta do aluno.  
Exemplo:  
 $9x = 45$  e  $x + 19 = 24$ .

75. 5.

76. Sim.

77. São equivalentes porque em todas elas 10 é raiz da equação. (Ou porque cada uma delas foi obtida da outra, aplicando propriedades das equações.)

78. a)  $y + 21 - 21 = 33 - 21$ ;  
logo,  $y = 12$ ;  
b)  $z - 19 + 19 = 21 + 19$ ;  
logo,  $z = 40$ .

79. a)  $(5y) : 5 = 75 : 5$ ;  
logo,  $y = 15$ ;  
b)  $z/8 \times 8 = 6 \times 8$ ;  
logo,  $z = 48$ .

80. a)  $7x$ ;  
b)  $8y$ ;  
c)  $9x$ .

81. a)  $10x$ ;  
b)  $11y$ .

## Usando novamente equações para resolver problemas

### Explorando o que você já sabe

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

- Para resolver problemas.
  - Um número cuja soma com 10 é = 32.
  - Incógnita.
  - 3.
  - Porque  $22 + 10 = 32$ .
  - Porque têm a mesma raiz: 8.
  - A soma do triplo com o dobro do número.
  - A soma do número com 13.
  - O triplo da soma do número com 4.
  - $7x$ .
  - $6x$ .
  - O triplo de  $s$ .
- Para que servem as equações?
  - Na equação  $y + 10 = 32$ , o que a letra  $y$  representa?
  - Na equação  $x + 9 = 12$ , que nome se dá à letra  $x$ ?
  - Qual é a raiz da equação  $x + 9 = 12$ ?
  - Por que 22 é raiz da equação  $y + 10 = 32$ ?
  - Por que as equações  $2x - 4 = 12$  e  $x = 8$  são equivalentes?
  - Se  $x$  representa um número, o que representa  $3x + 2x$ ?
  - Se  $y$  representa um número, o que representa  $y + 13$ ?
  - Se  $z$  representa um número, o que representa  $3(z + 4)$ ?
  - A quanto equivale a expressão  $3x + 4x$ ?
  - A quanto equivale a expressão  $x + 4x + x$ ?
  - A quanto equivale a expressão  $s + s + s$ ?

### Aprendendo em sala de aula

Agora, você vai usar equações para resolver outros problemas. Você verá que os cálculos que aprendeu até aqui vão facilitar resolver as equações relacionadas com esses problemas.

82. a) Que Ana e Carla têm, juntas, R\$ 72,00;  
b) Quanto possui cada uma delas;  
c) Multiplica-se o número por 5;  
d) Carla;  
e)  $5x$ ;  
f) O que Ana e Carla têm juntas, ou seja, R\$ 72,00;  
g)  $x + 5x = \text{R\$ } 72,00$ ;  
 $6x = \text{R\$ } 72,00$ ;  
 $x = \text{R\$ } 12,00$ ;  
h) A de Carla;  
i) Ana possui R\$ 60,00 e Carla, R\$ 12,00.

83. Resposta do aluno.

84. a) O quanto Francisco, Geraldo e Helvécio têm juntos, que é R\$ 153,00;  
b) O quanto possui cada um;

82. Ana e Carla têm, juntas, R\$ 72,00. Ana tem o quádruplo do que Carla possui. Quanto possui cada uma?

- a) O que se conhece no problema?
- b) O que se quer conhecer no problema?
- c) Que conta se faz para calcular o quádruplo de um número?
- d) Quem possui menor quantia?
- e) Se representarmos o que Carla possui pela letra  $x$ , qual expressão representa a quantia que Ana possui?
- f) O que representa a soma  $x + 5x$ ?
- g) Escreva a equação relacionada com o problema e resolva.
- h) A raiz da equação representa qual das duas importâncias: a de Ana ou a de Carla?
- i) Escreva a resposta do problema.

83. Invente um problema relacionado com a equação  $x + 4x = 35$ .

84. Francisco, Geraldo e Helvécio têm, juntos, R\$ 153,00. Francisco tem o triplo do que tem Geraldo, e este, o dobro do que possui Helvécio. Quanto possui cada um?

- a) O que se conhece no problema?
- b) O que se quer conhecer no problema?

- c) Que conta se faz para calcular o triplo de um número? E o dobro?
- d) O triplo do dobro de um número equivale a quantas vezes o número?
- e) Quem possui menor quantia?
- f) Se representarmos o que Helvécio possui pela letra  $x$ , qual expressão representa a quantia que Geraldo possui?
- g) O que representa a expressão  $3(2x)$ ?
- h) Calculando  $3(2x)$ , qual expressão se obtém?
- i) O que representa a expressão  $3(2x) + 2x + x$ ?
- j) Escreva a equação relacionada com o problema e a resolva.
- k) A raiz da equação representa a importância que um deles possui. Quem é ele?
- l) Calcule quanto possuem os outros dois.
- m) Escreva a resposta do problema.

**85.** Três peças de tecido medem, juntas, 300 metros. Os comprimentos da segunda e da terceira peças são, respectivamente, o dobro e o triplo do comprimento da primeira. Se cada metro dos três tecidos custa R\$ 8,40, **calcule o valor de cada peça.**

- a) O que se conhece no problema?
- b) O que se quer conhecer no problema?
- c) Qual é a peça de menor comprimento?
- d) Se representarmos o comprimento da menor peça por  $x$ , que expressões representarão os comprimentos das outras duas peças?
- e) O que representa a expressão  $x + 2x + 3x$ ?
- f) Escreva a equação relacionada com a soma dos comprimentos das peças de tecido e resolva.
- g) A raiz da equação representa o comprimento, em metros, de qual das peças?
- h) Calcule quanto medem as outras peças.
- i) Agora, calcule o preço de cada uma.
- j) Escreva a resposta do problema.

**86.** Antônio comprou um televisor e um computador por R\$ 3 100,00. O computador custou R\$ 500,00 a mais que o televisor. **Quanto Antônio pagou por cada aparelho?**

- a) O que se conhece no problema?
- b) O que se quer conhecer no problema?
- c) Qual aparelho tem preço menor?
- d) Se representarmos o preço do televisor por  $x$ , como representar o preço do computador?
- e) O que representa a expressão  $x + (x + 500)$ ?
- f) Escreva a equação relacionada com o problema e resolva.
- g) A raiz da equação representa o preço, em reais, de um dos aparelhos. Qual aparelho?
- h) Calcule o preço do outro aparelho.
- i) Escreva a resposta do problema.

- c) Multiplicando um número por 2 e por 3, temos o dobro e o triplo dele, respectivamente;
- d) 6 vezes;
- e) Helvécio;
- f)  $2x$ ;
- g) O quanto Francisco tem;
- h)  $6x$ ;
- i) O que todos têm juntos;
- j)  $6x + 2x + x = 153$ ;  
 $9x = 153$ ;  
 $x = 153 : 9$ ;  $x = 17$ ;
- k) Helvécio;
- l) Se  $x = \text{R\$ } 17,00$ ,  
 $2x = \text{R\$ } 34,00$  e  
 $6x = \text{R\$ } 102,00$ ;
- m) Geraldo possui  
R\$ 34,00, Francisco  
R\$ 102,00 e Helvécio  
R\$ 17,00.

- 85. a) Que as três peças de tecido medem, juntas, 300 metros e o custo de cada metro de tecido, que é R\$ 8,40;
- b) O valor de cada peça;
- c) A primeira peça;
- d) A segunda peça é representada por  $2x$ , e a terceira, por  $3x$ ;
- e)  $6x$ , o comprimento das três peças juntas;
- f)  $x + 2x + 3x = 300$ ;  
 $6x = 300$ ;  
 $x = 50$ ;
- g) Da primeira peça;
- h) A segunda peça mede 100 metros e a terceira, 150 metros;
- i) Se  $1 \text{ m} = \text{R\$ } 8,40$ ,  
 $50 \text{ m} = \text{R\$ } 420,00$ ,  
 $100 \text{ m} = \text{R\$ } 840,00$  e  
 $150 \text{ m} = \text{R\$ } 1 260,00$ ;
- j) A primeira peça custa R\$ 420,00, a segunda, R\$ 840,00, e a terceira, R\$ 1 260,00.
- 86. a) Que o custo do televisor e do computador é de R\$ 3 100,00;
- b) O custo de cada aparelho;
- c) O televisor;
- d)  $x + \text{R\$ } 500,00$ ;
- e) O custo dos dois aparelhos;
- f)  $2x + 500 = 3 100$   
 $x = 1 300,00$ ;
- g) O televisor;
- h) Se  $x = \text{R\$ } 1 300,00$   
 $x + \text{R\$ } 500,00 =$   
 $\text{R\$ } 1 800,00$ ;
- i) O televisor custou R\$ 1 300,00 e o computador, R\$ 1 800,00.



Escreva, no quadro, equações semelhantes às correspondentes aos exercícios de 84 a 86 e peça aos alunos que inventem problemas relacionados com elas.

87. a) Que os três depósitos que Maria fez totalizaram R\$ 4 317,00;  
b) O quanto Maria depositou de cada vez;  
c) No primeiro depósito;  
d) O segundo depósito;  
e) O terceiro depósito;  
f) Os três depósitos bancários, ou seja, R\$ 4 317,00;  
g)  $3x + 1\,371 = 4\,317$   
 $3x = 2\,946,00$ ;  
 $x = 982,00$ ;  
h) O primeiro depósito;  
i) Se  $x = 982,00$ , então  
 $x + 528 =$   
 $982 + 528 = 1\,510$ ,  
 $x + 528 + 315 =$   
 $1\,510 + 315 = 1\,825$ ;  
j) O primeiro depósito foi de R\$ 982,00; o segundo, de R\$ 1 510,00; e o terceiro, de R\$ 1 825,00.

87. Maria fez três depósitos bancários totalizando R\$ 4 317,00. O segundo foi R\$ 528,00 maior que o primeiro, e o terceiro, R\$ 315,00 maior que o segundo. Quanto Maria depositou de cada vez?

- a) O que se conhece no problema?  
b) O que se quer conhecer no problema?  
c) Em qual das três vezes Maria depositou menor quantidade de dinheiro?  
d) Se representarmos o menor depósito feito por Maria por  $x$ , o que representa a expressão  $x + 528$ ?  
e) O que representa a expressão  $(x + 528) + 315$ ?  
f) O que representa a expressão  $x + (x + 528) + [(x + 528) + 315]$ ?  
g) Escreva a equação relacionada com o problema e resolva.  
h) A raiz da equação representa qual dos depósitos feitos por Maria?  
i) Calcule o valor dos dois outros depósitos.  
j) Escreva a resposta do problema.

## Aprendendo em casa

88. a) A mesa custa R\$ 500,00 e o armário, R\$ 1 500,00;  
b) Marina possui R\$ 98,10, Eulália, R\$ 294,30, e Rolando, R\$ 588,60;  
c) Um objeto custa R\$ 45,00 e o outro, R\$ 72,00;  
d) O forno custou R\$ 640,00, a filmadora, R\$ 1 600,00, e a lavadora, R\$ 1 300,00.

88. Resolva, usando equações:

- a) Uma mesa e um armário custam R\$ 2 000,00. O preço do armário é o triplo do preço da mesa. Calcule o preço de cada móvel.  
b) Rolando tem o dobro do que tem Eulália, e esta, o triplo do que tem Marina. Juntos, possuem R\$ 981,00. Quanto tem cada um?  
c) Dois objetos custam, juntos, R\$ 117,00. Um deles custa R\$ 27,00 a mais que o outro. Calcule o preço de cada objeto.  
d) Maurício comprou um forno micro-ondas, uma lavadora de louças e uma filmadora por R\$ 3 540,00. A filmadora custou R\$ 300,00 a mais que a lavadora, e esta, R\$ 660,00 a mais que o forno. Calcule o preço de cada um.

89. 14 m, 20 m, 30 m, 40 m.

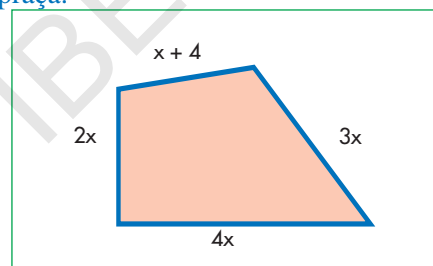
**Professor(a):** Se julgar conveniente, explore a noção de função, usando a figura do quadrilátero do exercício 89, no qual as expressões em  $x$  representam suas medidas em metros, para calcular o valor do perímetro  $P$  do mesmo, atribuindo a  $x$  valores naturais, fracionários ou decimais.

## Explorando o que você aprendeu e aprendendo mais

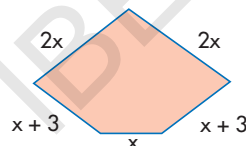
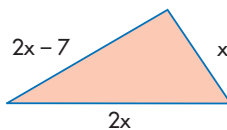
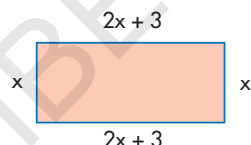
89. Resolva, usando equações:

- a) O quadrilátero da figura representa uma praça.

As expressões contendo a letra  $x$  representam as medidas dos lados, em metros.  
Calcule as medidas de cada lado, sabendo que o perímetro mede 104 m.

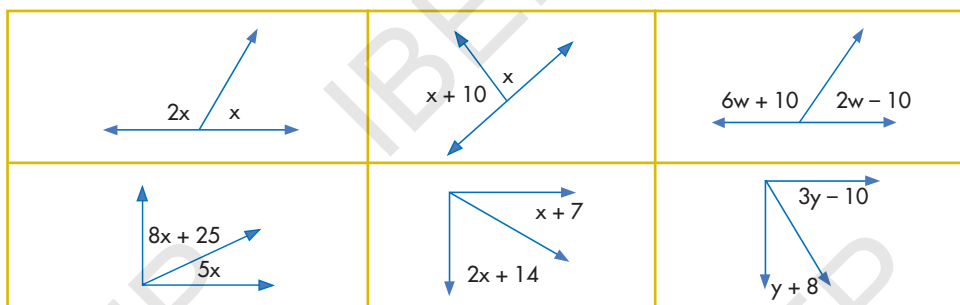


- b) As três figuras a seguir representam um terreno, uma praça e um cartaz de anúncio. As expressões contendo a letra  $x$  representam as medidas de seus lados. **Calcule as medidas dos lados** de cada uma delas, sabendo que o perímetro do terreno mede 126 metros, o da praça mede 48 metros e o perímetro do cartaz mede 41 cm.



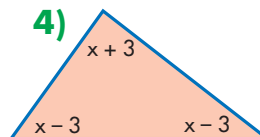
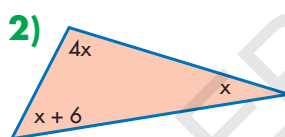
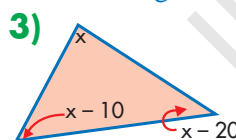
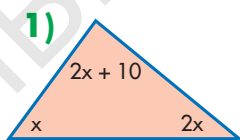
- b) Terreno:  
43 m por 20 m;  
Praça:  
11 m, 22 m e 15 m;  
Cartaz:  
10 cm, 10 cm, 8 cm, 5 cm e 8 cm.

- c) Nas figuras a seguir, você vê vários pares de ângulos complementares ou suplementares. Suas medidas, em graus, estão representadas por expressões contendo letras. **Calcule as medidas de cada um desses ângulos.**

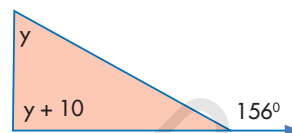
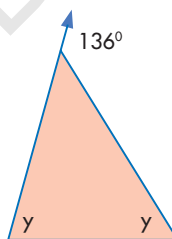
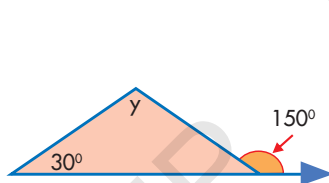


- c) 60° e 120°  
85° e 95°  
145° e 35°  
65° e 25°  
30° e 60°  
31° e 59°  
  
d) 34°, 68°, 78°  
29°, 35°, 116°  
50°, 60°, 70°  
58°, 58°, 64°  
  
e) 120°, 30°, 30°  
68°, 68°, 44°  
73°, 83°, 24°.

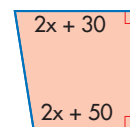
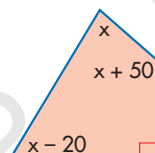
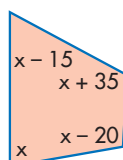
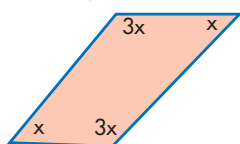
- d) Nos triângulos a seguir, as medidas dos ângulos estão representadas por expressões contendo a letra  $x$ . **Calcule as medidas de todos os ângulos.**



- e) **Calcule as medidas dos ângulos internos** de cada triângulo a seguir:



- f) **Calcule as medidas dos ângulos internos** de cada quadrilátero a seguir:



Mostre aos alunos como inventar problemas como os das figuras do exercício 89. Por exemplo, em (a), desenhe um trapézio de medidas 10, 16, 20 e 28 metros. Ao lado dele, desenhe outro trapézio igual e diga que vai representar a menor medida (10 m) por  $x$ . Logo, as demais podem ser representadas por  $x+6$ ,  $2x$  e  $2x+8$ . Agora, é possível escrever o problema análogo ao 89: (a) afirmando que o perímetro da praça mede 74 metros (soma das 4 medidas dos lados da primeira figura). Proceda, de modo análogo, com as figuras (b), (c) e (d).

## Seção olímpica

1. 1,6 kg. Sendo  $x$  o peso de cada um dos 4 pedaços, temos:  $3x = x + 0,8 \Rightarrow 2x = 0,8$  e  $4x = 1,6$ .
2. 2. Seja  $199n$  o ano em que Sofia nasceu. Sua idade em 2013 era  $2013 - 199n = 2 \times 10 + 3 - n$ . Logo,  $23 - n = 1 + 9 + 9 + n \Rightarrow 2n = 4 \Rightarrow n = 2$ .
3. Se o grupo resolveu  $x$  problemas em janeiro, então nos outros meses eles resolveram  $2x, 4x, 8x, 16x$  e  $32x$  problemas. Assim, o total de problemas resolvidos ao final de junho foi  $x + 2x + 4x + 8x + 16x + 32x = 63x$ . Logo,  $63x = 1\,134$ , de onde  $x = 1\,134/63 = 18$ .
4. Como não choveu em 12 dias e janeiro tem 31 dias, choveu em  $31 - 12 = 19$  dias. Em 17 desses 19 dias choveu à tarde; logo, choveu apenas pela manhã em  $19 - 17 = 2$  dias.
5. Como Jeca e Tatu comeram juntos 33 bananas, concluímos que Saci e Pacu comeram juntos  $52 - 33 = 19$  bananas. Como Saci foi quem mais comeu e Pacu comeu pelo menos 1 banana, Saci comeu no máximo  $19 - 1 = 18$  bananas. Portanto, Jeca comeu no máximo 17 bananas, e, como Jeca comeu mais que Tatu, concluímos que Tatu comeu no máximo 16 bananas. Como  $33 = 17 + 16$ , não é possível que Jeca tenha comido menos que 17 ou Tatu menos que 16 bananas. Vemos assim que Jeca comeu 17 bananas e Tatu, 16; além disso, Saci comeu 18 bananas e sobrou apenas 1 banana para Pacu.
1. (OBMEP 2011) Um queijo foi partido em quatro pedaços de mesmo peso. Três desses pedaços pesam o mesmo que um pedaço mais um peso de 0,8 kg. Qual era o peso do queijo inteiro?
2. (OBMEP 2013) Sofia nasceu antes do ano 2000, no mês de janeiro. Em fevereiro de 2013 sua idade era igual à soma dos algarismos do ano de seu nascimento. Qual é o algarismo das unidades do ano de nascimento de Sofia?
3. (OBMEP 2006) No início de janeiro de 2006, Tina formou com colegas um grupo para resolver problemas de Matemática. Eles estudaram muito e por isso, a cada mês, conseguiam resolver o dobro do número de problemas resolvidos no mês anterior. No fim de junho de 2006 o grupo havia resolvido um total de 1 134 problemas. Quantos problemas o grupo resolveu em janeiro?
4. (OBMEP 2010) Em Quixajuba choveu em 10 manhãs e em 17 tardes do mês de janeiro de 2010. Não choveu em 12 dias. Em quantos dias choveu apenas pela manhã?
5. (OBMEP 2010) Saci, Jeca, Tatu e Pacu comeram 52 bananas. Ninguém ficou sem comer e Saci comeu mais que cada um dos outros. Jeca e Tatu comeram ao todo 33 bananas, sendo que Jeca comeu mais que Tatu. Quantas bananas Tatu comeu?

### E ANTIGAMENTE, COMO ERA A MATEMÁTICA?

A matemática é muito antiga, tão antiga quanto nossa civilização terrestre, pelo menos! E tem mais: é, de certo ponto de vista, sempre a mesma, uma coisa meio que eterna. Por exemplo, essa coisa de resolver problemas e usar equações que você aprendeu neste capítulo não é nada nova. A humanidade estuda isso há milhares de anos, e problemas muito parecidos com os que colocamos neste livro são encontrados em textos muito antigos, alguns datando de cerca de 3 000 anos antes de Cristo. Vamos mostrar para vocês dois exemplos.

O primeiro exemplo é um problema de um texto da Babilônia. A **Babilônia** é uma cidade que pertenceu a uma civilização da **Mesopotâmia**, uma região do Oriente Médio que ficava entre os rios Tigre e Eufrates, hoje parte do Iraque. As primeiras civilizações apareceram nessa região há pelo menos 4 000 anos antes de Cristo. A cidade de Babilônia foi fundada em torno de 2 300 a.C. (lembrem-se: a.C. é a sigla para “antes de Cristo”), ou seja, mais de 4 000 anos atrás. Lá eles registravam tudo – dados, literatura, matemática, etc. – em tabletas feitos de argila. Esse problema que apresentamos a seguir foi encontrado em um desses tabletas, e deve ter sido escrito em torno de 1 800 a.C.:

“Eu achei uma pedra, mas não a pesei. Depois eu juntei outra pedra com  $\frac{1}{7}$  do tamanho da primeira, e em seguida juntei mais uma com  $\frac{1}{11}$  do volume das duas, e então pesei tudo e encontrei 1 *mina* (uma medida de massa dos babilônios). Quantos gin (outra unidade de massa, sendo 1 mina = 60 gin) pesava a pedra que achei?”

O *escriba* que o escreveu colocou a resposta  $48 \frac{1}{8} = 48,125$  gin. Resolvam o problema para saber se ele acertou.



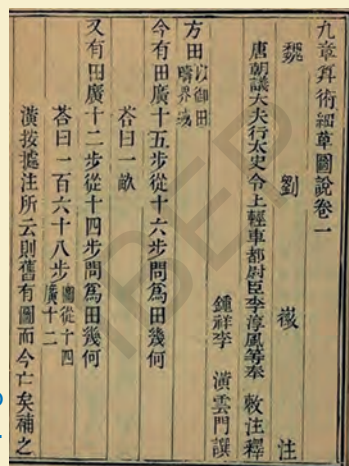
Fotografia de Rama, in Wikimedia Commons

Um tablete mesopotâmico, Museu do Louvre.

O outro exemplo vem da China antiga. A China vocês conhecem, pois é um país “da moda”, não é? A civilização chinesa é tão ou mais antiga que as civilizações da Mesopotâmia. Os chineses tinham uma cultura muito avançada, e eram bem sofisticados na matemática. Um livro chinês chamado *Os nove capítulos da arte matemática* (em transliteração para nossa língua: *Jiuzhang Suanshu*), datado de cerca de 200 a.C. (bem mais novo que os textos babilônicos, né?), era um dos textos que os estudantes da época usavam para aprender matemática, não muito diferente dos livros que vocês usam hoje. O problema que queremos lhes mostrar foi retirado desse livro e, em linguagem moderna, é o seguinte:

“Um homem está carregando arroz em uma viagem. Ele passa por três postos de alfândega. No primeiro ele deixa  $\frac{1}{3}$  de seu arroz; no segundo deixa  $\frac{1}{5}$  do que sobrou; e no terceiro deixa  $\frac{1}{7}$  do restante. Após passar pelos três postos de alfândega ele ficou com 5 kg. Quanto de arroz ele possuía no início da viagem?”

No livro a resposta é  $10 \frac{15}{16} = 10,9375$  kg. Confirmam!



Reprodução

Uma página do *Jiuzhang Suanshu*.

**Professor(a):** Proponha aos alunos uma pesquisa sobre a Babilônia e a China. Comente que a matemática que eles estão aprendendo é de fato bem antiga, mas que há muitas coisas novas, e que, para entender o que se trabalha na matemática moderna, são precisos muitos anos de estudo. Explore as palavras que talvez sejam novas para os alunos, como transliteração, alfândega e outras, a depender da turma.

Solução do primeiro problema: se  $x$  é o peso da pedra, tem-se a equação  $(x + x/7) + (x + x/7) \cdot (1/11) = 60$ , donde  $x = 48 \frac{1}{8} = 48,125$ .

Solução do segundo problema: se  $x$  é a quantidade inicial de arroz, depois que o homem passou pelo primeiro posto, ficou com  $x - x/3 = 2x/3$ ; depois de passar no segundo posto, ficou com  $2x/3 - (1/5)(2x/3) = 8x/15$ ; finalmente, após a passagem pelo terceiro posto, restou-lhe  $8x/15 - (1/7)(8x/15) = 16x/35 = 5$ , donde  $x = 10 \frac{15}{16} = 10,9375$ .



Leia o texto A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS da seção “Verifique se você aprendeu” do capítulo 2.

**REVISÃO** – A seu critério, proponha e verifique se os alunos utilizam com compreensão algumas ou todas as atividades a seguir:

Resolver problemas cujos dados são apresentados em tabela.

Resolver problemas envolvendo as grandezas velocidade, tempo de percurso e distância percorrida.

Representar múltiplos ou divisores de números usando letras.

Dadas expressões contendo adições, subtrações, multiplicações, divisões e potenciações com letras representando números, descrevê-las com frases na linguagem corrente.

Representar expressões descritas na linguagem corrente por adições, subtrações, multiplicações, divisões e potenciações, com letras no lugar dos números.

Interpretar o que sejam equações e suas raízes.

Escrever equações relacionadas com igualdades descritas na linguagem corrente.

Identificar as incógnitas de equações dadas.

Verificar se um número dado é raiz de equações dadas.

Caracterizar e identificar equações equivalentes.

Decidir se equações dadas são ou não equivalentes.

Resolver mentalmente algumas equações simples.

Inventar problemas relacionados com equações dadas e resolvê-los usando tais equações.

Representar, usando letras, múltiplos de números seja usando a notação do produto, seja como soma de parcelas iguais.

Representar números por figuras em expressões.

Resolver problemas usando figuras para representar quantidades e expressando equações cujas incógnitas sejam representadas por essas figuras.

Resolver problemas associando a eles equações cujas raízes fornecem as respostas dos mesmos.



## Verifique se você aprendeu

Se ainda tem dúvidas sobre	Reveja os exercícios
Como resolver problemas, seguindo um roteiro.	1 a 8.
Como resolver problemas relacionados com as grandezas velocidade, tempo de percurso e percurso.	9 a 18.
Como representar expressões numéricas ou com letras, representando números por expressões vice-versa.	19 a 21, 27 a 34, 58, 59, 64 a 71, 74.
Como representar igualdades usando equações, bem como identificar incógnitas e raízes de equações.	22 a 25, 45, 47, 60, 61, 62, 75, 76.
Como calcular, mentalmente, raízes de equações simples.	26, 63.
Como resolver problemas usando equações com figuras no lugar de números.	35 a 37.
Como resolver ou inventar problemas usando equações com letras no lugar de números.	38 a 40, 82 a 89.
Como identificar termos e membros de equações.	41 e 42, 72, 73.
Como identificar equações equivalentes.	43 a 47, 74, 77.
Como interpretar propriedades de igualdades que representam equações por comparação com balanças equilibradas.	48, 52.
Como calcular expressões contendo letras.	80, 81.
Como resolver equações usando propriedades das igualdades.	49 a 51, 53 a 57, 78, 79.
Como calcular perímetros ou ângulos cujas medidas estejam representadas por letras em figuras, usando equações.	89.

Identificar os membros e termos de uma equação.

Resolver equações usando propriedades das igualdades.

Calcular perímetros de polígonos cujos lados têm suas medidas representadas por letras.

Usar propriedades de ângulos de triângulos e quadriláteros para resolver problemas relacionados com ângulos cujas medidas são representadas por letras.

Resolver problemas sobre pares de ângulos cujas medidas estejam representadas por letras.

**Professor(a):** Leia a observação da página 22 (Sugestão sobre verificação da aprendizagem).



# CAPÍTULO 6

## Proporcionalidade e semelhança



Claudio Baldini | Dreamstime.com



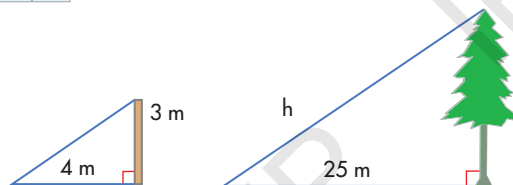
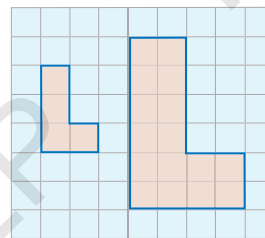
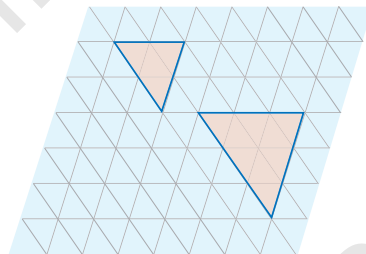
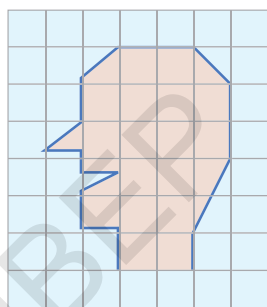
*più p*

Ao lado, explicitamos os objetivos gerais do capítulo. Sugerimos, um breve, comentário sobre os mesmos, utilizando as ilustrações da página.

**Professor(a):** Neste e em outros capítulos, são exploradas diversas situações para que os alunos “descubram”, a partir de casos particulares, propriedades de números, de figuras, regras de cálculos etc. É extremamente importante que, após estas “descobertas”, sejam feitas observações afirmando que tais conclusões são verdadeiras (e, eventualmente, provar estes fatos) para que não fique a falsa ideia de que, a partir de poucos casos particulares, é possível generalizar. Sempre que possível, use expressões algébricas para expressar tais generalizações, bem como de algumas regularidades relacionadas com sequências numéricas.

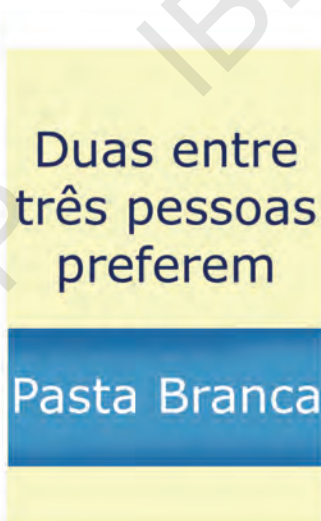
## Você já resolveu problemas relacionados com razões, proporções e figuras semelhantes. Neste capítulo, você vai aprender como:

- Interpretar a ideia de razão entre duas grandezas em diferentes situações do dia a dia.
- Usar o conceito de razão entre duas grandezas para resolver problemas.
- Identificar se duas razões dadas formam ou não uma proporção.
- Usar as proporções e suas propriedades para resolver problemas.
- Resolver problemas de proporcionalidade direta entre grandezas.
- Identificar se grandezas dadas são ou não diretamente proporcionais.
- Identificar se grandezas dadas são ou não inversamente proporcionais.
- Resolver problemas relacionados com o conceito de “escala”.
- Interpretar o conceito de “por cento” como parte decimal de grandezas.
- Usar o conceito de porcentagem para resolver problemas.
- Resolver problemas relacionados com velocidade, espaço e tempo de percurso.
- Resolver problemas envolvendo relações entre mais de duas grandezas.
- Identificar se duas figuras são ou não semelhantes.
- Ampliar ou reduzir desenhos, usando quadriculados.
- Resolver problemas usando o conceito de “razão de semelhança”.
- Descrever propriedades de figuras semelhantes.
- Utilizar malhas para desenhar figuras semelhantes.
- Utilizar propriedades das proporções para resolver problemas relacionados com figuras semelhantes.



# Razões e proporcionalidade direta

## Explorando o que você já sabe



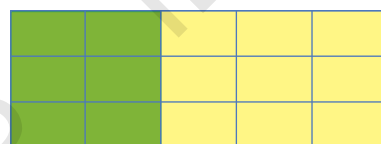
Júlia Bianchi, 2006

- Segundo a ilustração acima, de 300 pessoas, quantas usariam pasta branca?
- Qual é a **razão** entre o número de retângulos verdes e o número de retângulos amarelos?
- Qual é a razão entre o número de retângulos verdes e o total de retângulos?
- De que forma se lê como razão a expressão  $3 : 5$  e o que ela representa em relação à figura?



Qual é a razão entre o número de retângulos amarelos e os verdes:

- Na primeira figura?
- Na segunda figura?
- Na terceira figura?
- As razões da primeira e segunda figuras formam uma **proporção**? Por quê?
- As razões da segunda e terceira figuras formam uma proporção? Por quê?



Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

Leia o texto OBSERVAÇÃO IMPORTANTE da página 16.

### ATIVIDADES ORAIS

Lembre aos alunos (usando exemplos) os conceitos e notações de razões. Sugestões: Se, em uma sala com 40 estudantes, 10 são alunas e 30 são alunos, a razão entre o número de alunas e de alunos é de 10 para 30 (ou 5 para 15, ou de 1 para 3, que são razões equivalentes). Isso significa que, a cada grupo de 4 estudantes, 1 é aluna e 3 são alunos. Lembre, também, as notações e leituras:  $1 : 3$  (lê-se um para três), ou mesmo na forma de fração  $\frac{1}{3}$ , que também se lê um para três. Finalmente, lembre que a igualdade de duas razões chama-se “proporção”.

Recomende ou explore a leitura de:  
“Proporções”  
Coleção Pra que serve Matemática?  
Atual Editora  
Imenes – Jabuko – Lellis

- 200 pessoas.
- $2 : 3$ .
- $2 : 5$ .
- 3 para 5 representa a razão entre retângulos amarelos e o total de retângulos.

- $3 : 2$ .
- $6 : 4$ .
- $9 : 6$ .
- Sim; porque são iguais.
- Sim; porque são iguais.

## Aprendendo em sala de aula

1. Em um supermercado, a razão entre as vendas de suco de maçã e as de suco de laranja é de 1 para 9.

Responda, com base nessa informação:

- a) A cada 10 sucos dessas frutas vendidas, quantos são de maçã?
- b) A cada 20 sucos dessas frutas vendidas, quantos são de maçã?
- c) A cada venda de 4 sucos de maçã correspondem quantos sucos de laranja vendidos?
- d) Represente, de duas maneiras diferentes, a razão “um para nove”.
- e) As razões  $1 : 9$  e  $2 : 18$  são iguais?
- f) As razões  $\frac{2}{9}$  e  $\frac{4}{36}$  são iguais?
- g) Use os dados anteriores e escreva uma proporção.

1. a) 1;  
b) 2;  
c) 36;  
d)  $1/9$  ou  $1 : 9$ ;  
e) Sim;  
f) Não;  
g)  $1/9 = 2/18$ .

**Professor(a):** Comente com os alunos que o exercício 1 pode ser interpretado como uma pesquisa feita pelo encarregado de compras do supermercado para, em compras futuras, encomendar, para cada quantidade de sucos de maçã, nove vezes a quantidade de sucos de laranja.

2. Um jornalista esportivo concluiu que, em 80 jogos disputados com o time “Perna de pau”, o time “Estrelinha” ganhou 70 jogos, empatou 5 e perdeu 5.

- a) Dê a razão entre o número de vitórias do time Estrelinha e o total de jogos disputados.
- b) Essa razão forma uma proporção com a razão  $\frac{7}{8}$ ? Por quê?
- c) Qual é a razão entre o número de vitórias do “Perna de pau” e o número de jogos disputados?
- d) Divida por 5 os termos da razão obtida como resposta no item (c).
- e) Forme uma proporção entre a razão que você obteve no item (d) e outra que tenha numerador 3.

2. a)  $70/80$ ;  
b) Sim, porque  $7/8 = 70/80$ ;  
c)  $5/80$ ;  
d)  $1/16$ ;  
e)  $1/16 = 3/48$ .

3. Observe as frases a seguir:

85 entre 125 pessoas foram vacinadas.  
17 entre 25 pessoas foram vacinadas.

3. a) Sim, pois:  
 $85/125 = 17/25$ ;  
b) Divisão de 85 e 125 por 5.

- a) As informações contidas nelas são equivalentes? Por quê?
- b) Que conta se faz para obter a razão  $17 : 25$ , a partir da razão  $85 : 125$ ?

4. a) 4 para cada 5 chutes a gol foram acertados;  
b) Ele percorreu 28 metros a cada 1 minuto.

4. As duas frases a seguir contêm razões entre dois números que podem ser simplificadas. Reescreva-as, usando as razões simplificadas:

- a) 20 para cada 25 chutes a gol foram acertados.
- b) Ele percorreu 196 metros a cada 7 minutos.



5. Use o m.d.c. dos termos para simplificar:

a)  $3 : 15$

d)  $64 : 48$

b)  $16 : 4$

e)  $140 : 1260$

c)  $5 : 75$

- 5.a)  $1 : 5$ ;  
b)  $4 : 1$ ;  
c)  $1 : 15$ ;  
d)  $4 : 3$ ;  
e)  $1 : 9$ .

6. Alberto leu no jornal que o carro que ele deseja comprar consome 4 litros a cada 56 km percorridos. Em outro jornal, leu que o mesmo carro consome 6 litros a cada 84 km percorridos. Essas duas informações são equivalentes? Justifique.

6. Sim, porque  $4/56 = 6/84$ .

Recordar que uma das maneiras de verificar se duas frações ou razões são iguais é usar a igualdade do produto cruzado.

**Professor(a):** Explore o exercício 6 abordando temas como economia de combustíveis, textos especializados que comentam até quando é vantagem utilizar álcool em vez de gasolina nos chamados veículos flex etc.



7.b)  $65/90$  e  $13/16$ , pois  $65/90 \neq 13/16$ .

Resolva o exercício 8 usando o método de redução à unidade:

7. Um dos pares de razões a seguir não forma uma proporção. Qual é ele e por quê?

a)  $\frac{3}{7}$  e  $\frac{24}{56}$

b)  $\frac{65}{90}$  e  $\frac{13}{16}$

- 8.a) 2 ovos para 12 bolinhos; logo, 1 ovo para 6. Então, para  $48 = 6 \times 8$ , serão necessários 8 ovos;  
b) R\$ 23,22 (use o método de redução à unidade);  
c) R\$ 39,80 (use o método de redução à unidade).

8. Resolva:

- a) Nelma usa 2 ovos em uma massa de 12 bolinhos. Quantos ovos ela irá usar para fazer 48 bolinhos da mesma massa, mantendo a mesma proporção?  
b) Se 2 kg de frango custam R\$ 15,48, quanto pagarei por 3 kg da ave?  
c) Se 2 litros de suco de laranja custam R\$ 15,52, quanto pagarei por 5 litros desse suco?

No exercício 9, use o fato de que 1 hora equivale a 60 minutos para calcular as frações da hora a seguir. Sugira aos alunos que calculem, em cada caso, inicialmente,  $1/10$ ,  $1/12$  e  $1/15$  (método de redução à unidade transposto para problemas com frações).

9. Calcule e responda:

A quantos minutos equivalem:

a)  $\frac{3}{10}$  da hora?

b)  $\frac{7}{12}$  da hora?

c)  $\frac{11}{15}$  da hora?

- 9.a) 18 min;  
b) 35 min;  
c) 44 min.



Mesma sugestão anterior: calculando antes que a fração da hora equivale a 1 minuto, cada item se obtém facilmente multiplicando-se tal fração por 3, 4, 5, 6, 10, 12, 15 e 20, respectivamente.

11. a) Se  $\frac{2}{30} = \frac{10}{x}$ , então  $2x = 300$  e  $x = 300 : 2$ , ou seja,  $x = 150$ ;  
 b)  $\frac{16}{2} = \frac{12}{x} \Rightarrow 16x = 24$  e  $x = 24 : 16$ , ou seja,  $x = 1,5$  reais;  
 c)  $\frac{45}{x} = \frac{20}{298} \Rightarrow 45x = 20 \cdot 298$  e  $x = 13\,410 : 45$ , ou seja,  $x = 298$ .  
 12. a) 4 eram homens e 1 era mulher;  
 b)  $\frac{1}{4}$ ;  
 c)  $\frac{1}{5}$ ;  
 d)  $\frac{4}{5}$ ;  
 e) 2 280 eram homens e 570 eram mulheres.

O exercício 15 tem por objetivo permitir aos alunos concluir que a razão entre duas grandezas não depende das unidades de medidas.

Antecede o exercício com uma atividade no quadro, desenhando um retângulo de dimensões 2,40 m por 0,80 m. Depois, corte duas tiras de papel de 20 cm e 40 cm. Peça a um aluno que use a menor para medir altura e comprimento do retângulo e escrever a razão entre as medidas da altura e do comprimento, nesta ordem. Repita o processo com outro aluno, usando a fita maior. Explore, com perguntas, a comparação entre as razões obtidas, para que verifiquem que são equivalentes.

15. a) As duas razões são equivalentes;  
 b) Novamente uma razão equivalente às razões anteriores.

Em casa, os alunos devem anotar no caderno os quadros em destaque do exercício 16.

10. Calcule a qual fração da hora equivalem:

- a) 3 minutos.  
 b) 4 minutos.  
 c) 5 minutos.  
 d) 6 minutos.

- e) 10 minutos.  
 f) 12 minutos.  
 g) 15 minutos.  
 h) 20 minutos.

10. a)  $\frac{1}{20}$ ;  
 b)  $\frac{1}{15}$ ;  
 c)  $\frac{1}{12}$ ;  
 d)  $\frac{1}{10}$ ;  
 e)  $\frac{1}{6}$ ;  
 f)  $\frac{1}{5}$ ;  
 g)  $\frac{1}{4}$ ;  
 h)  $\frac{1}{3}$ .

11. Escreva as proporções relacionadas com as frases e, em cada caso, calcule  $x$  usando “produto cruzado”:

- a) 2 gramas a 30 centavos correspondem a 10 gramas a  $x$  centavos.  
 b) 16 litros a 2 reais ou 12 litros a  $x$  reais.  
 c) 45 latas a  $x$  reais ou 20 latas a 298 reais.

12. Em uma semana, observou-se que, em média, do total de passageiros de avião entre duas cidades, a cada quatro homens correspondia uma mulher.

- a) A cada grupo de 5 passageiros, quantos eram homens e quantos eram mulheres?  
 b) Qual é a razão entre o número de mulheres e o de homens?  
 c) Qual é a razão entre o número de mulheres e o total de passageiros?  
 d) Qual é a razão entre o número de homens e o total de passageiros?  
 e) Viajaram 2 850 pessoas. Quantos homens e quantas mulheres viajaram? (Sugestão: descubra quantos grupos de 5 há em 2 850.)

13. Em uma eleição para representante das turmas A e B, houve um total de 77 votos válidos. Laerte perdeu de Pedro na razão de 3 para 4. Calcule quantos votos favoráveis cada um deles recebeu.

13. Laerte obteve 33 votos, enquanto Pedro, 44 votos.

14. Júlio e Gumerindo recebem comissões por vendas. A razão entre as comissões ganhas por eles no mês passado foi de 7 para 5 a favor de Júlio. Se, juntos, receberam R\$ 972,00, quanto recebeu cada um deles de comissão?

14. Júlio recebeu

R\$ 567,00 de comissão, enquanto Gumerindo, R\$ 405,00.

15. Leia e responda ou faça o que se pede:

Para medir o comprimento de dois corredores de uma escola, André e Petrônio usaram duas varas de madeira de tamanhos diferentes. André encontrou a razão de 3 para 7 entre as medidas do corredor menor e do corredor maior. Petrônio encontrou as medidas de 9 varas por 21 varas.

- a) Compare as razões entre as medidas de André e as medidas de Petrônio. O que se conclui desta comparação?  
 b) Se Marcos medir os mesmos corredores com outra vara, o que você acha que obterá como razão entre as medidas (menor para maior)?

16. Em cada caso a seguir, decida qual é a **melhor escolha**:

- a) Pagar 75 centavos por um pacote de 20 gramas de pipoca ou 81 centavos por um pacote de 27 gramas?
- b) Pagar R\$ 4,08 por 3 kg de salsicha ou R\$ 8,40 por 7 kg?

**Você se lembra?** Você aprendeu no sexto ano que:

Dadas duas grandezas tais que os valores de uma delas dependem dos valores da outra, de modo que, ao multiplicar (ou dividir) os valores de uma delas por um número, os valores correspondentes da outra ficam multiplicados (ou divididos) pelo mesmo número, dizemos que elas são **grandezas diretamente proporcionais**.

O preço de um pacote de feijão e a quantidade de pacotes de mesmo peso e do mesmo feijão são grandezas diretamente proporcionais (por exemplo, se um pacote de feijão custa 3 reais, 2 pacotes custam 6 reais, 3 pacotes custam 9 reais, 4 pacotes custam 12 reais, etc.).

Observe que as razões entre esses pares de valores são todas iguais entre si:

$$\frac{1}{3} = \frac{2}{6} = \frac{3}{9} = \frac{4}{12} = \dots$$

Logo, outro modo de caracterizar grandezas diretamente proporcionais é:

Dadas duas grandezas tais que os valores de uma delas dependem dos valores da outra, se as razões entre todos os seus pares de valores correspondentes forem iguais, elas se chamam **grandezas diretamente proporcionais**.

17. Observe a **tabela** a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras.

<b>Pacotes de pipoca</b>	1	2	3	c	6	e	10
<b>Preço (em reais)</b>	1,20	a	b	6,00	d	9,60	f

Agora, responda:

- g) As grandezas “quantidades de pacotes de pipoca” e “preços correspondentes” são **diretamente proporcionais**? Por quê?
- h) Calcule o **preço** de 15 pacotes de pipoca, usando uma multiplicação.
- i) Calcule o **preço** de 15 pacotes de pipoca, usando adições.

Lembre aos alunos que comparar números é verificar se são iguais ou se um é maior que o outro.

Antes de resolver o exercício 16, explore um caso bem simples para que os alunos compreendam que a comparação se faz dividindo os preços pelas quantidades. Exemplo:

Qual é a melhor compra: um pacote de arroz, de 2 kg por 4 reais, ou outro, do mesmo arroz, de 3 kg por 9 reais? No primeiro caso, cada kg custa  $4 : 2 = 2$  reais, e, no segundo,  $9 : 3 = 3$  reais. Logo, a resposta é: comprar um pacote de arroz de 2 kg por 4 reais. Pergunte: O que você fez para resolver o problema: dividiu preços por kg ou kg por preços?

- 16. a) 81 centavos por 1 pacote de 27 gramas;
- b) R\$ 8,40 por 7 kg.

Em (a), a primeira opção representa 3,75 centavos por grama, e a segunda, 3 centavos por grama.

Em (b), a primeira opção representa 1,36 reais por kg, e a segunda, 1,20 reais por kg.

O exercício 17 comporta uma observação: a proporcionalidade é verdadeira se pensarmos o quanto receberá o vendedor se 1, 2, 3 etc. compradores diferentes comprarem um pacote cada. Já, se um único comprador comprar vários pacotes, pode ser que tenha um desconto...

- 17. a)  $\Rightarrow 2,40$ ;
- b)  $\Rightarrow 3,60$ ;
- c)  $\Rightarrow 5$ ;
- d)  $\Rightarrow 7,20$ ;
- e)  $\Rightarrow 8$ ;
- f)  $\Rightarrow 12$ .
- g) Sim, porque, quando multiplicamos a quantidade de pacotes por um número, o preço fica multiplicado pelo mesmo número;
- h)  $15 \times 1,20 = \text{R\$ } 18,00$ ;
- i)  $6,00 + 6,00 + 6,00 = \text{R\$ } 18,00$  (ou outras).

18. a) Não, porque não formam razões equivalentes (por exemplo,  $1/2$  é diferente de  $2/3$ );  
b) Não, porque não há nenhuma proporcionalidade entre as grandezas “tempo de estacionamento” e “valor cobrado em reais”.

Sempre que possível, use redução à unidade.

19. a) R\$ 5,00;  
b) 40 m<sup>2</sup>;  
c) 0,85 kg de farinha;  
d) 0,45 mm;  
e) 388 voltas.

20. a) R\$ 340,00;  
b) 19 horas;  
c) 408 kg de farinha;  
d) 14 voltas;  
e) 30 264 voltas.

**Observação:** seguindo o que se propôs, os alunos resolveram os exercícios 19 e 20 pelo método de redução à unidade.

Agora, proponha que resolvam o exercício 20 usando as proporções correspondentes (segunda caracterização de grandezas diretamente proporcionais).

Por exemplo:

$$\begin{aligned} \text{(a)} \quad 7/35 &= 68/x \Rightarrow \\ 7x &= 35 \times 68 \Rightarrow \\ x &= 2380 : 7 \Rightarrow \\ x &= 340. \end{aligned}$$

Para cada uma das atividades (a), (b), (c), do exercício 21, chame um aluno ao quadro.

21. Resposta do aluno.

Em casa, os alunos devem anotar no caderno o quadro em destaque do exercício 21.

18. Observe a **tabela de preços de um estacionamento** de motocicletas:

Tempo de estacionamento	1 hora	2 horas	3 horas	4 horas	5 horas
Valor cobrado em reais	2,00	3,00	3,80	4,50	5,00

- a) As grandezas “tempo de estacionamento” e “valor cobrado em reais” são diretamente proporcionais? Por quê?  
b) É possível calcular quanto se pagaria por 6 horas de estacionamento? Por quê?

19. Responda:

- a) Se 7 metros de tecido custam R\$ 35,00, **quanto custa um metro** desse tecido?  
b) Em 8 horas de trabalho, uma máquina cimentou uma área de 320 m<sup>2</sup>. Qual **é a área que essa máquina consegue cimentar** em uma hora, mantendo a mesma produção?  
c) Com 100 kg de trigo são feitos 85 kg de farinha. **Qual quantidade dessa farinha se faz com 1 kg de trigo?**  
d) A cada 10 voltas, um **parafuso** avança 4,5 mm. **Quanto ele avança a cada volta?**  
e) Uma roda de engrenagem dá 5 820 voltas em 15 minutos. **Quantas voltas ela dá em 1 minuto, girando com a mesma velocidade?**

20. Resolva os exercícios a seguir, **utilizando os resultados obtidos por você nos exercícios do item anterior:**

- a) Se 7 metros de um tecido custam R\$ 35,00, quanto custarão 68 metros do mesmo tecido?  
b) Em 8 horas de trabalho, uma máquina cimentou uma área de 320 m<sup>2</sup>. Quanto tempo levará para cimentar uma área de 760 m<sup>2</sup> mantendo a mesma produção anterior?  
c) Com 100 kg de trigo são feitos 85 kg de farinha. Que quantidade dessa farinha se obtém com 480 kg de trigo?  
d) A cada 10 voltas, um parafuso avança 4,5 mm. Quantas voltas dará para avançar 6,3 mm?  
e) Uma roda de engrenagem dá 5 820 voltas em 15 minutos. Quantas voltas dará em 1 h 18 min, mantendo a mesma velocidade?

21. **Você e seus colegas vão inventar problemas** e ajudar o colega que for chamado ao quadro para resolvê-los:

- a) Inventem outras perguntas para os problemas dos itens **a)**, **b)** e **c)** do exercício anterior.  
b) Resolvam os problemas que inventarem.

**Você se lembra?** Você aprendeu no sexto ano que:

Usando a mesma unidade de medida, temos:

$$\text{Escala} = \frac{\text{Medida do desenho}}{\text{Medida do objeto representado}}$$

22. Um desenho de uma casa foi feito na escala de 1 : 100 (um para cem). Com essa informação, copie e complete a tabela a seguir:

USANDO ESCALAS		MEDIDA NO DESENHO (em centímetros)	MEDIDA REAL (em metros)
SALA	Comprimento	7 cm	
	Largura		4 m
QUARTO 1	Comprimento	4 cm	
	Largura		3 m
CORREDOR	Comprimento	2,8 cm	
	Largura		1,2 m
BANHEIRO	Comprimento	2,2 cm	
	Largura		2,5 m
QUARTO 2	Comprimento	3,2 cm	
	Largura		2,9 m
COZINHA	Comprimento	4,5 cm	
	Largura		2,2 m

Antes de resolver o exercício 22, verifique se os alunos interpretam o que significa a escala de 1 : 100, propondo que completem a frase: a escala 1 : 100 significa que, a cada 1 cm do desenho, correspondem...

Ao resolver o exercício, verifique: a) se estabeleceram como estratégia, ao usar os valores das medidas dos objetos, transformá-las em medidas em centímetros para, posteriormente, calcular as medidas dos desenhos correspondentes; b) se, após obter medidas dos objetos em centímetros, as transformam em medidas em metros.

22.

MEDIDA NO DESENHO (em centímetros)		MEDIDA REAL (em metros)
SALA	Comprimento	7 m
	Largura	4 m
QUARTO 1	Comprimento	4 m
	Largura	3 m
CORREDOR	Comprimento	2,8 m
	Largura	1,2 m
BANHEIRO	Comprimento	2,5 m
	Largura	2,5 m
QUARTO 2	Comprimento	3,2 m
	Largura	2,9 m
COZINHA	Comprimento	4,5 m
	Largura	2,2 m

23. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Medida do desenho	4 cm	8 cm	5 cm	16 cm	63 cm	f	54 cm
Medida do objeto	400 cm	48 cm	10 m	4 m	e	4,8 m	g
Escala	a	b	c	d	6 : 4	1 : 12	3 : 2

23. a) 1 : 100; e) 42 cm;  
b) 1 : 6; f) 40 cm;  
c) 1 : 200; g) 36 cm.  
d) 1 : 25;

24. As pedras preciosas têm seus pesos medidos em quilates. Cinco quilates equivalem, aproximadamente, a 1 grama.

Observe a tabela de preços de pedras preciosas a seguir:

Quilates	1 quilate	2 quilates	3 quilates	4 quilates	5 quilates
Preços	100 000 reais	400 000 reais	900 000 reais	1 600 000 reais	?

O exercício 24 não se relaciona com proporcionalidade direta, mas explora uma interessante regularidade “quilates x preços”. Os preços são proporcionais aos quadrados dos números que expressam as quantidades de quilates.

24. a) Não, pois não formam razões equivalentes;  
b) 2 500 000 reais.

Observe que a sequência dos primeiros algarismos é  $1^2 = 1$ ,  $2^2 = 4$ ,  $3^2 = 9$ ,  $4^2 = 16$ ; logo,  $5^2 = 25$ .

Os dois exercícios a seguir visam explorar situações nas quais não há proporcionalidade direta e situações nas quais há.

- a) As grandezas “quilates” e “preços” são diretamente proporcionais? Por quê?  
b) Observe bem a tabela e escreva qual é o valor possível de uma pedra de 5 quilates.

**Professor(a):** Explore a noção de variável em situações análogas às já exploradas, ou em situações como as que seguem: (I) Considere todos os retângulos de altura 5 cm e cuja base  $b$ , medida em centímetros, é tal que  $8 \leq b \leq 12$ . Pergunte: nestas condições, qual a área do menor retângulo possível e a área do maior retângulo possível? (II) Problemas que envolvam cálculo de percurso percorrido com velocidade média conhecida, em intervalos de tempo diferentes. (III) A partir de fórmulas de áreas ou volumes conhecidas, explicitar o valor de alguma de suas dimensões em função das áreas ou volumes (ex: raio de um círculo em função da área; base de um triângulo em função da área e da altura; área de um círculo em função de seu comprimento; altura de um cilindro em função do raio da base e do volume; etc.)

25. As quatro paredes laterais de uma piscina formam um trapézio como o da figura. Ela estava vazia e está sendo novamente abastecida de água por uma mangueira que verte 220 litros por minuto.



Se em 3 horas o nível de água subiu 80 centímetros, é correto afirmar que o nível de água subirá 160 centímetros em 6 horas?

Justifique sua resposta.

26. Se a piscina do problema anterior tivesse todas as paredes laterais em forma de retângulo, seria possível resolver o problema? Justifique sua resposta.

## Aprendendo em casa

25. Não, pois, à medida que o nível de água vai aumentando, sua velocidade de crescimento diminui, já que as paredes são inclinadas.

26. Sim, pois assim há proporcionalidade, já que as paredes laterais da piscina são verticais. O nível de água subiu 160 cm.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

27. a) 40 minutos;  
b) 75 minutos;  
c) 36 minutos;  
d) 70 minutos.

28. a)  $\frac{2}{5}$ ;  
b)  $\frac{5}{12}$ ;  
c)  $\frac{1}{2}$ ;  
d)  $\frac{3}{5}$ ;  
e)  $\frac{2}{3}$ ;  
f)  $\frac{3}{4}$ ;  
g)  $\frac{5}{6}$ .

29. a)  $\frac{3}{5}$ ;  
b)  $\frac{3}{8}$ ;  
c)  $\frac{5}{3}$ ;  
d)  $\frac{5}{8}$ .

27. Calcule e responda:

A quantos minutos equivalem:

a)  $\frac{2}{3}$  da hora?

c)  $\frac{3}{5}$  da hora?

b)  $\frac{5}{4}$  da hora?

d)  $\frac{7}{6}$  da hora?

28. Calcule a qual fração da hora equivalem:

a) 24 minutos.

e) 40 minutos.

b) 25 minutos.

f) 45 minutos.

c) 30 minutos.

g) 50 minutos.

d) 36 minutos.

29. Observe a figura:



Júlia Bianchi, 2006

Dê as razões entre:

a) O número de caras brancas e o número de caras pretas.

b) O número de caras brancas e o total de caras.

c) O número de caras pretas e o número de caras brancas.

d) O número de caras pretas e o total de caras.



### 30. Resolva:

- a) Três caixas iguais de bombons pesam 1,5 kg. Quantos quilos pesam 5 caixas iguais do mesmo bombom?
- b) Um motociclista percorreu 8 540 m em 10 minutos. Quantos metros andará em 35 minutos com a mesma velocidade média?
- c) Duas máquinas fabricam 10 peças por minuto. Mantendo o mesmo ritmo de trabalho, quanto tempo gastarão para fabricar 16 000 peças?
- d) 64 metros de corda pesam 25,6 kg. Quanto pesarão 80 metros dessa mesma corda?
- e) Se em 5 horas um ônibus percorreu 375 km, quantos quilômetros percorreria em 13 horas com a mesma velocidade média?
- f) As dimensões de uma fotografia são 3 cm por 10 cm. A largura de uma ampliação dessa fotografia mede 7,5 cm. Quanto mede o comprimento dessa ampliação?

30. Novamente aqui, é interessante resolver tanto pelo método de redução à unidade quanto pelo método das proporções.

- a) 2,5 kg;
- b) 29 890 metros;
- c) 26 h 40 min;
- d) 32 kg;
- e) 975 km;
- f) 25 cm.

Sugestão: forme as razões correspondentes e compare os quocientes que elas representam.

### 31. Qual é a melhor compra:

- a) Um bombom de 540 gramas por 90 centavos ou outro, de mesmo sabor e 420 gramas, por 60 centavos?
- b) Duas caixas de balas a R\$ 2,30 ou cinco caixas de balas a R\$ 6,00?
- c) Três bolas por R\$ 4,62 ou 7 bolas do mesmo tipo por R\$ 8,40?
- d) Um kg de linguiça a R\$ 2,94 ou 600 gramas da mesma linguiça a R\$ 1,98?
- e) Oito pacotes de macarrão por R\$ 8,64 ou 12 pacotes do mesmo macarrão por R\$ 9,72?

31. a) 420 gramas por 60 centavos;  
b) Duas caixas de morangos a R\$ 2,30;  
c) Sete bolas por R\$ 8,40;  
d) Um kg de linguiça a R\$ 2,94;  
e) Doze pacotes por R\$ 9,72.

## Mais um pouco sobre porcentagens

### Explorando o que você já sabe

Diferentes maneiras de começar a escrever um mesmo problema:

Joel recebia R\$ 600,00 e teve um aumento de 12 por cento.

Joel recebia R\$ 600,00 e teve um aumento de 12%.

Joel recebia R\$ 600,00 e teve um aumento de  $\frac{12}{100}$ .

Joel recebia R\$ 600,00 e teve um aumento de 0,12.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

Observe acima e responda:

- Como se lê 12%?
- Qual das duas frações representa 12%:  $\frac{12}{100}$  ou  $\frac{12}{10}$ ?
- Qual dos decimais representa 12%: 0,012 ou 0,12?
- Calcular 12% é o mesmo que calcular  $\frac{12}{100}$ ?
- Qual poderia ser uma pergunta do problema?

#### ATIVIDADES ORAIS

- 12 por cento.
- $\frac{12}{100}$ .
- 0,12.
- Sim.
- Qual foi o aumento que, em reais, Joel teve?

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, o quadro da seção “Explorando o que você já sabe”.

## Aprendendo em sala de aula

32. a) 40%;  
b) Trinta e sete por cento.

33. a) 100;  
b) 1%;  
c) 5 centésimos;  
d) 5%;  
e) 18%.

**Professor(a):** Lembre aos alunos que “por cento” significa fração de denominador 100, exemplifique e relacione tais frações com as escritas decimais correspondentes.

Depois, se julgar necessário, proponha atividades como:

- a) Calcule .... por cento de ....  
b) Calcule ....% de ....  
c) .... representa quantos por cento de ....?

**Professor(a):** Note que, ao calcular  $\frac{3}{10}$  de 60, usamos o método de redução à unidade, calculando inicialmente  $\frac{1}{10}$ , e depois, multiplicando o quociente obtido por 3, usando o fato de que  $\frac{3}{10}$  equivalem a  $3 \times (\frac{1}{10})$ . O mesmo método é usado no exercício 34.

Em casa, os alunos devem anotar no caderno os quadros em destaque dos exercícios 33 e 34 (primeiro quadro).

34. a)  $0,20 \times 40 = 8,00 = 8$ ;  
b)  $0,3 \times 80 = 24,00 = 24$ ;  
c)  $0,4 \times 50 = 20,00 = 20$ ;  
d)  $0,5 \times 90 = 45,00 = 45$ .

32. Observe a **tabela** ao lado e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Em palavras	Em símbolos
Dezenove por cento.	19%
Quarenta por cento.	<b>a</b>
<b>b</b>	37%

33. Leia e responda:

- a) Quantas moedas de um centavo são necessárias para formar um real?  
b) R\$ 0,01 representa a centésima parte do real. R\$ 0,01 representa quantos por cento de um real?  
c) R\$ 0,05 representam quantos centésimos de um real?  
d) R\$ 0,05 representam quantos por cento de um real?  
e) R\$ 0,18 representam quantos por cento de um real?

Você já sabe que  $\frac{3}{10}$  de 60 equivalem a 18, pois  $\frac{1}{10}$  de 60 equivale a 6 e, portanto,  $\frac{3}{10}$  equivalem a  $3 \times 6 = 18$ . Observe, assim, que, para calcular

$$\frac{3}{10} \text{ de } 60, \text{ basta multiplicar } \frac{3}{10} \text{ por } 60: \frac{3}{10} \times 60 = \frac{3}{10} \times \frac{60}{1} = \frac{180}{10} = 18.$$

Este fato é geral e podemos afirmar:

Calcular uma fração de um número corresponde a multiplicar a fração pelo número.

Como  $\frac{3}{10} = 0,3$ , podemos calcular  $\frac{3}{10}$  de 60 assim:  $0,3 \times 60 = 18,0 = 18$ .

34. Observe:

### Calculando o aumento de Joel

Joel recebia R\$ 600,00 e teve um aumento de 12%.  
De quanto foi o aumento que Joel teve?

Basta calcular  $\frac{12}{100}$  de 600.

**a**  $\frac{1}{100}$  de 600 =  $600 : 100 = 6$

**b**  $\frac{12}{100}$  de 600 =  $12 \times 6 = 72$

Ou, também, é possível calcular assim:

Como  $\frac{12}{100} = 0,12$ , podemos multiplicar:

$$0,12 \times 600 = 72,00 = 72$$

Resposta: o aumento de Joel foi de R\$ 72,00.

Resposta: o aumento de Joel foi de R\$ 72,00.

Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

12% de 50 = $0,12 \times 50 = 6,00 = 6$	15% de 80 = $0,15 \times 80 = 12,00 = 12$
25% de 160 = $0,25 \times 160 = 40,00 = 40$	25% de 1 600 = $0,25 \times 1600 = 400,00 = 400$
20% de 40 = <b>a</b>	30% de 80 = <b>b</b>
40% de 50 = <b>c</b>	50% de 90 = <b>d</b>

35. Use os resultados da tabela anterior para resolver os problemas a seguir:

- Uma boneca custava R\$ 40,00. Se houve um aumento de 20% em seu preço, qual é o preço atual da boneca?
- As turmas A e B têm, juntas, 80 estudantes. Se 30% são alunas, quantas alunas existem, ao todo, nas turmas A e B?
- A prova de Geografia registrou um total de 40% de notas maiores que seis. Se 50 alunos fizeram essa prova, quantos tiraram nota acima de seis?
- Paulina disse que, se der 50% do que tem para Angelina, ficará com R\$ 40,00. Verifique se Paulina está correta, sabendo que ela possui R\$ 90,00.

36. Escreva na forma de fração de denominador 100:

- |        |        |         |         |       |
|--------|--------|---------|---------|-------|
| a) 10% | d) 30% | g) 100% | j) 200% | w) 8% |
| b) 20% | e) 50% | h) 125% | k) 7%   | m) 1% |
| c) 25% | f) 75% | i) 150% | l) 5%   |       |

37. Simplifique, quando possível, cada uma das frações que você escreveu no exercício anterior.

38. Responda, com base nos dois exercícios anteriores, qual porcentagem corresponde às seguintes partes de uma grandeza:

- Metade.
- Quarta parte.
- Décima parte.
- Dobro.
- Três quartos.
- Quinta parte.
- Três décimos.
- Toda a grandeza.



39. Lucas e Marcílio tinham pesos iguais e fizeram regime para emagrecer. Lucas conseguiu reduzir  $\frac{2}{5}$  de seu peso, enquanto Marcílio reduziu 38%. Qual dos dois conseguiu maior redução de peso? Justifique sua resposta.

- R\$ 48,00;
- 24 alunas;
- 20 alunos;
- Paulina não está correta, pois, se ela der 50% do que tem para Angelina, ficará com R\$ 45,00 e não com R\$ 40,00.

- 10/100; h) 125/100;
- 20/100; i) 150/100;
- 25/100; j) 200/100;
- 30/100; k) 7/100;
- 50/100; l) 5/100;
- 75/100; m) 8/100;
- 100/100; n) 1/100.

- 1/10; g) 1;
- 1/5; h) 5/4;
- 1/4; i) 3/2;
- 3/10; j) 2;
- 1/2; l) 1/20;
- 3/4; m) 2/25.

- 50%; e) 75%;
- 25%; f) 20%;
- 10%; g) 30%;
- 200%; h) 100%.

39. Lucas conseguiu maior redução de peso porque  $\frac{2}{5}$  equivalem a 40%, portanto, maior que 38%.

Usar as equivalências:  
 $\frac{2}{5} = \frac{40}{100} = 0,40 = 40\%$ .

40. R)  $\frac{1}{4}$ , porque 125% de um número equivalem a 100% mais 25% do número. Mas 25% é uma fração, de numerador 25 e denominador 100, que, simplificada, equivale a  $\frac{1}{4}$ .

41. R)  $\frac{1}{2}$ , porque 150% de um número equivalem a 100% do número mais 50% do número. Mas 50% é uma fração, de numerador 50 e denominador 100, que, simplificada, equivale a  $\frac{1}{2}$ .

42. a) 0,1; b) 0,2; c) 0,25; d) 0,3; e) 0,5; f) 0,75; g) 1,0; h) 1,25; i) 1,5; j) 2,0; k) 0,07; l) 0,05; m) 0,08; n) 0,01.

43. a) 40%; b) 60%; c) 6%; d) 25%; e) 50%; f) 5%; g) 70%; h) 70%; i) 7%; j) 1%.

Comente que, na representação decimal, o algarismo dos centésimos corresponde à porcentagem. Exemplos:  $0,32 = 32\%$ ;  $0,07 = 7\%$ ;  $1,07 = 107\%$ ;  $3,125 = 312,5\%$ ;  $0,0084 = 0,84\%$  etc.

Justificativas: basta lembrar que por cento é fração de denominador 100.

Assim:

$0,32 = 32/100$ ;  $1,07 = 107/100$ ;  $3,125 = 3\ 125/1\ 000 = 312,5/100$  etc.

44. a)  $60 \times 0,15 = 9$ ;  
 $60 + 9 = 69$ ;  
 b)  $60 \times 1,15 = 69$ .

Destaque para o aluno que o conhecimento matemático usado no diálogo do exercício 44 foi o uso da propriedade distributiva da multiplicação (não se fala no nome da propriedade, mas sim no uso).

Lembre a eles (usando números) que, como  $a(b + c) = ab + ac$ , também:  $ab + ac = a(b + c)$ .

Em particular, como  $a = 1a$ , vale para expressões como  $a + ac = a(1 + c)$ .

Explore casos particulares como:

$7 + 7 \times 3 = 7(1 + 3) = 7 \times 4 = 28$ ;  
 $5 + 5 \times 9 = 5(1 + 9) = 5 \times 10 = 50$ ;  
 $4 + 4 \times 0,3 = 4(1 + 0,3) = 4 \times 1,3 = 5,2$ .

Em casa, os alunos devem anotar no caderno os quadros em destaque dos exercícios 44 e 46.

40. Calcular 125% de um número é somá-lo com qual fração dele mesmo? Justifique sua resposta.

41. Calcular 150% de um número é somá-lo com qual fração dele mesmo? Justifique sua resposta.

42. Escreva na forma de decimal:

a) 10% d) 30% g) 100% j) 200% n) 1%  
 b) 20% e) 50% h) 125% k) 7% m) 8%  
 c) 25% f) 75% i) 150% l) 5%

43. Escreva na forma de porcentagem:

a) 0,40 d) 0,25 g) 0,70 j) 0,01  
 b) 0,6 e) 0,5 h) 0,7  
 c) 0,06 f) 0,05 i) 0,07

44. Observe a tabela a seguir:

CALCULANDO AUMENTOS				
Valor em reais	Porcentagem de aumento	Cálculo	Valor após aumento	Outra forma de calcular
80	15%	$80 \times 0,15 = 12$	$80 + 12 = 92$	$80 \times 1,15 = 92$
60	50%	$60 \times 0,50 = 30$	$60 + 30 = 90$	$60 \times 1,50 = 90$
120	25%	$120 \times 0,25 = 30$	$120 + 30 = 150$	$120 \times 1,25 = 150$

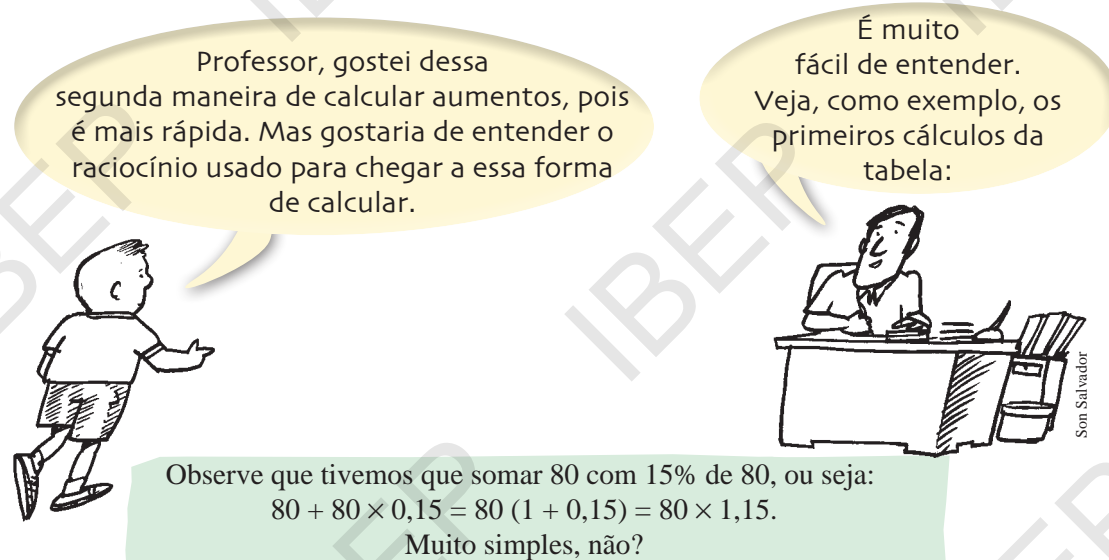
Agora, calcule os seguintes aumentos (usando a calculadora, se quiser):

- a) 15% de 60, calculando o aumento e somando com 60 para obter o novo valor após o aumento.  
 b) 15% de 60, obtendo através de uma única operação o novo valor após o aumento.

Professor, gostei dessa segunda maneira de calcular aumentos, pois é mais rápida. Mas gostaria de entender o raciocínio usado para chegar a essa forma de calcular.

É muito fácil de entender. Veja, como exemplo, os primeiros cálculos da tabela:

Observe que tivemos que somar 80 com 15% de 80, ou seja:  
 $80 + 80 \times 0,15 = 80(1 + 0,15) = 80 \times 1,15$ .  
 Muito simples, não?



45. Copie a **tabela** em seu caderno e **calcule os aumentos dos dois modos**:

Valor em reais	Porcentagem de aumento	Cálculo	Valor após aumento	Outra forma de calcular
90	18%			
80	50%			
60	25%			

Valor em reais	Porcentagem de aumento	Cálculo	Valor após aumento	Outra forma de calcular
90	18%	$90 \times 0,18 = 16,2$	$90 + 16,2 = 106,2$	$1,18 \times 90 = 106,2$
80	50%	$80 \times 0,50 = 40$	$80 + 40 = 120$	$1,50 \times 80 = 120$
60	25%	$60 \times 0,25 = 15$	$60 + 15 = 75$	$1,25 \times 60 = 75$

46. Observe a tabela a seguir:

CALCULANDO DESCONTOS				
Valor em reais	Porcentagem de aumento	Cálculo	Valor após desconto	Outra forma de calcular
80	15%	$80 \times 0,15 = 12$	$80 - 12 = 68$	$80 \times 0,85 = 68$
60	50%	$60 \times 0,50 = 30$	$60 - 30 = 30$	$60 \times 0,50 = 30$
120	25%	$120 \times 0,25 = 30$	$120 - 30 = 90$	$120 \times 0,75 = 90$

Agora, **calcule os seguintes descontos (usando a calculadora, se quiser)**:

- a) 15% de 60, calculando o desconto e subtraindo de 60 para obter o novo valor após o desconto.
- b) 15% de 60, obtendo, de uma única vez, o novo valor após o desconto.

46. a)  $60 \times 0,15 = 9$   
 $60 - 9 = 51$ ;  
 b)  $60 \times 0,85 = 51$ .

Se necessário, reveja cálculos como:  
 $1 - 0,15 = 1,00 - 0,15 = 0,85$ .  
 Faça com que os alunos observem as analogias desses cálculos com cálculos como  $100 - 15 = 85$ .

Professor, acho que sei explicar como o segundo modo de calcular é equivalente ao primeiro. Por exemplo, no primeiro cálculo da tabela, para saber o desconto de 15% de 80, devemos subtrair de 80 seus 15%, ou seja:  
 $80 - 0,15 \times 80 = 80 (1 - 0,15) = 80 \times 0,85 = 68$ .

Você entendeu corretamente! É exatamente essa a explicação.





47. Use as proporções convenientes para resolver o exercício 48.

CALCULANDO DESCONTOS				
Valor em reais	Porcentagem de desconto	Cálculo	Valor após desconto	Outra forma de calcular
90	18%	$90 \times 0,18 = 16,2$	$90 - 16,2 = 73,8$	$0,82 \times 90 = 73,8$
80	50%	$80 \times 0,50 = 40$	$80 - 40 = 40$	$0,50 \times 80 = 40$
60	25%	$60 \times 0,25 = 15$	$60 - 15 = 45$	$0,75 \times 60 = 45$

47. Copie a tabela em seu caderno e calcule os descontos dos dois modos:

Valor em reais	Porcentagem de desconto	Cálculo	Valor após desconto	Outra forma de calcular
90	18%			
80	50%			
60	25%			

Agora, você verá que contas deve fazer para responder a perguntas como as seguintes:

- 6 representa quantos por cento de 50?
- 12 representa quantos por cento de 80?
- 40 representa quantos por cento de 160?
- 400 representa quantos por cento de 1 600?

Observe, novamente, a pergunta:

- 6 representa quantos por cento de 50?

Ela equivale à pergunta:

- Qual é a fração de denominador 100 que equivale à fração  $\frac{6}{50}$ ?

Se representarmos por  $x$  o numerador dessa fração de denominador 100, obteremos a seguinte proporção:

$$\frac{x}{100} = \frac{6}{50}$$

Resolvendo-a, teremos:  $50x = 600 \Rightarrow x = \frac{600}{50} \Rightarrow x = 12$

Logo, 6 representa 12% de 50.

48. a) 12 representa 15% de 80;  
b) 40 representa 25% de 160;  
c) 400 representa 25% de 1 600.

48. Agora, faça cálculos análogos ao anterior, para responder:

- a) 12 representa quantos por cento de 80?  
b) 40 representa quantos por cento de 160?  
c) 400 representa quantos por cento de 1 600?

Observe o problema a seguir:

- Bernardo economizou 30%, ou seja, R\$ 6,30, na compra de uma camiseta nova. Qual era o preço original da camiseta?

Esse problema equivale a perguntar:

- 6,30 representam 30% de qual importância?

Para responder a essa pergunta, podemos formar a proporção:

$$\frac{30}{100} = \frac{6,30}{x}$$

49. Complete, em seu caderno, os cálculos necessários para responder o problema do quadro do exercício 48.

a) Temos:  $30x = (100)(6,3) \Rightarrow \dots$

b) Resposta:

O preço original da camiseta comprada por Bernardo era de...

50. Márcia comprou à vista um fogão a gás e por isso ganhou **desconto** de 5% sobre o preço, que era de 300 reais. Calcule quanto Márcia pagou pelo fogão.

51. Uma caneta custava R\$ 100,00 e teve dois aumentos sucessivos. O primeiro aumento foi de 2%. Sobre o novo preço, houve novo aumento de 3%. Celso disse que, após os dois aumentos, a caneta passou a custar R\$ 105,00, mas está errado. Faça cálculos para obter o preço correto.

52. Um hotel está com 210 de seus apartamentos ocupados, o que corresponde a **70% do total**. Quantos apartamentos tem o hotel?

53. Dario recebia até ontem R\$ 300,00 por semana. Passou a receber R\$ 375,00 a partir de hoje. Qual é a **porcentagem de aumento**?

54. O colégio Ponto Alto tem 400 alunos, dos quais 160 são meninos. Qual é a **porcentagem de meninos do colégio**? E de meninas?

55. Qual dos dois times de futebol **é mais eficiente** no ataque: o Estrela Vermelha, que marcou 16 gols em 800 minutos jogados, ou o Colorido, que marcou 18 gols em 900 minutos jogados? Explique o raciocínio e as contas que você fez para resolver esse problema.

## Aprendendo em casa

56. Observe a **tabela** a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

	10%	20%	25%	30%	50%	75%	100%	125%	150%	200%
40		a	b		c	d		e	f	
60	g		h	i	j		k		l	m
132	n	o		p		q		r		s
354		t	u		v	x		y	z	

57. Uma cadeira está na oferta por R\$ 600,00. Calcule seu novo preço, se ela tiver **aumento de 7%**.

58. Numa turma de 30 alunos, faltaram 6. Qual é a **porcentagem de ausência**?

49. a)  $30x = 630$   
 $x = 630 : 30$   
 $x = 21$   
 b) 21 reais.

50. 285 reais.

**Professor(a):** Explore exercícios como o 51 para que os alunos tenham uma primeira ideia de juros compostos, que será retomada e ampliada em anos futuros. Em particular, explore o exercício perguntando: Qual o preço da caneta após o primeiro aumento? Aumentando em 3% o valor obtido nos cálculos anteriores, qual o preço final e correto da caneta?

51.  $1,02 \times 100 = 102$  reais;  
 $1,03 \times 102 = 105,06$  reais  
 (preço correto).

52. 300 apartamentos.

53. 25%.

54. 40% de meninos e 60% de meninas.

55. Os dois marcam, a cada 100 minutos, 2 gols. Por isso, não há time mais eficiente que outro.

Explore os exercícios de 50 a 54 para formular novos problemas, trocando dados com incógnitas. Por exemplo, no exercício 50, informe quanto ela pagou pelo fogão e peça o cálculo do percentual de desconto.

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do "Aprendendo em casa" para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

56. a) 8; j) 30; s) 264;  
 b) 10; k) 60; t) 70,8;  
 c) 20; l) 90; u) 88,5;  
 d) 30; m) 120; v) 177;  
 e) 50; n) 13,2; x) 265,5;  
 f) 60; o) 26,4; y) 442,5;  
 g) 6; p) 39,6; z) 531.  
 h) 15; q) 99;  
 i) 18; r) 165.

57. R\$ 642,00.

58. 20%.

219

59. 16%.

60. R\$ 3 000,00.

61. 12,5%.

62. a) R\$ 858,00;  
b) R\$ 76,80;  
c) 11,2 calorias;  
d) R\$ 43,20;  
e) R\$ 60,00;  
f) 3%;  
g) 30%.

Explore situações-problema relacionadas com o tema estudado, bem como, quando possível, aplicando o tema em outros blocos de conteúdo, medidas, tratamento da informação, geometria. Exemplos: usar a planta baixa de um apartamento e expressar as áreas das diversas partes como porcentagens da área total. Representar os resultados obtidos usando gráficos de colunas (ou outros). Usar o problema recíproco: um arquiteto deve planejar um apartamento de área total pré-fixada, usando, para cada parte, uma porcentagem dada em um gráfico. Para as áreas obtidas, por exemplo, para uma sala ou para quartos, discutir as opções de formas retangulares que tenham as mesmas áreas obtidas.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

- 15 km por hora.
- 1 hora.
- Depende.
- A medida do tempo fica dividida por dois.
- A medida do tempo fica dividida por três.
- A velocidade média fica dividida por dois.
- A velocidade média fica dividida por três.

59. Numa caixa com 50 maçãs, 8 estavam estragadas. Qual é a porcentagem de maçãs estragadas?

60. Gérson gasta 36% do seu salário com o aluguel, que é de R\$ 1 080,00. Qual é o salário de Gérson?

61. O preço de um artigo é R\$ 320,00. Se for pago à vista, o preço cai para R\$ 280,00. Qual é a porcentagem de desconto?

62. Resolva:

- Uma joia custa R\$ 780,00. Se seu preço **aumentar 10%**, quanto passará a custar?
- Uma loja está dando **descontos de 4%** em todos os seus artigos. Quanto se pagará nesta loja por um artigo cujo preço original é de R\$ 80,00?
- Um refrigerante dietético contém **90% menos calorias** que um refrigerante comum. Se uma lata de refrigerante comum contém 112 calorias, quantas calorias terá uma lata do refrigerante dietético da mesma marca?
- Uma calça que custava R\$ 54,00, no Natal, foi vendida com **desconto de 20%** em janeiro. Quanto se pagou por essa calça?
- Na compra de um vestido, Alice **economizou** R\$ 15,00, correspondentes a 25% do preço original do produto. Qual era o preço do vestido?
- Um arquiteto recebeu R\$ 15 000,00 pelo projeto de um prédio cujo custo de construção foi avaliado em R\$ 500 000,00. **Quantos por cento** desse valor o arquiteto cobrou pelo projeto?
- Em uma viagem cujo custo total foi de R\$ 2 766,00, Artur gastou R\$ 829,80 com presentes que trouxe para os familiares. **Quantos por cento** da despesa total foram gastos por Artur com presentes?

## Outras relações entre grandezas

### Explorando o que você já sabe

Responda:

- Pedro percorreu, de bicicleta, 30 km em 2 horas. Qual foi a velocidade média desenvolvida neste percurso, por Pedro?
- Se Pedro tivesse percorrido os 30 km com velocidade média o dobro da anterior, em quanto tempo faria o percurso?
- Para fazer determinado percurso, o tempo gasto depende ou não da velocidade média?
- Dobrando a velocidade média, o que acontece com o tempo gasto para fazer o mesmo percurso?
- Triplicando a velocidade média, o que acontece com o tempo gasto para fazer o mesmo percurso?
- O que acontece com a velocidade para fazer um mesmo percurso se dobrarmos o tempo a ser gasto nele?
- O que acontece com a velocidade para fazer um mesmo percurso se triplicarmos o tempo a ser gasto nele?

## Aprendendo em sala de aula

Você viu que, se dobrarmos a velocidade média, o tempo gasto no percurso fica dividido por dois. Se triplicarmos a velocidade, o tempo gasto fica dividido por 3. Viu também que, se dobrarmos ou triplicarmos o tempo gasto para fazer um mesmo percurso, a velocidade média correspondente fica dividida por 2 ou 3, respectivamente. Por isso, dizemos que a velocidade e o tempo gasto no percurso são grandezas inversamente proporcionais.

Este fato é um caso particular do fato geral descrito a seguir:

Dadas duas grandezas tais que os valores de uma delas dependem dos valores da outra, de modo que, ao multiplicar ou dividir os valores de uma delas por um número, os valores correspondentes da outra ficam divididos ou multiplicados, respectivamente, pelo mesmo número, dizemos que elas são **grandezas inversamente proporcionais**.

Em casa, os alunos devem anotar no caderno o primeiro quadro em destaque da página.

63. Usando sua bicicleta, Mário vai de sua casa à prefeitura em 30 minutos, com velocidade média de 30 quilômetros por hora. Indo de carro a uma velocidade média de 60 km/h, quanto tempo Mário gastará para fazer esse mesmo percurso?

64. Use a conclusão do exercício anterior para responder: em um mesmo percurso, a velocidade e o tempo de percurso são **direta ou inversamente proporcionais**?

65. Responda:

O que **significa uma velocidade** média de:

a) 50 quilômetros por hora? (50 km/h) b) 200 metros por minuto? (200 m/min)

66. Observe a **tabela** a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

<b>Velocidade média</b>	30 km/h	300 m/min	60 km/h	<b>d</b>	40 km/h
<b>Tempo</b>	2 h	5 min	<b>c</b>	5 h	3 h 30 min
<b>Espaço percorrido</b>	<b>a</b>	<b>b</b>	180 km	400 km	<b>e</b>

67. Responda:

- Se eu conheço a velocidade média em km/h e o número de horas gastas no percurso, que conta faço para saber o **espaço percorrido**? Em qual **unidade de medida** ele é dado?
- Se eu conheço a velocidade média em km/h e o espaço percorrido em km, que conta faço para saber o **tempo gasto no percurso**? Ele é dado em qual **unidade de medida de tempo**?
- Se eu conheço o tempo de percurso em horas e a distância total percorrida em km, que conta faço para saber **a que velocidade média se fez o percurso**?

63. 15 minutos.

64. Em um mesmo percurso, a velocidade e o tempo são inversamente proporcionais.

65. a) Significa dizer que algo se locomove 50 quilômetros a cada 1 hora;

b) Significa que algo se locomove 200 metros a cada 1 minuto.

66. a) 60 km;  
b) 1500 m;  
c) 3 h;  
d) 80 km/h;  
e) 140 km.

67. a) Multiplico a velocidade em km/h e o tempo gasto no percurso. A medida, nesse caso, é dada em quilômetros (km);

b) Divido o espaço percorrido em km pela velocidade em km/h. O tempo, nesse caso, é dado em horas (h);

c) Divido a distância total percorrida em km pelo tempo de percurso em horas.

Se julgar conveniente, no exercício 67, explore a análise dimensional:

- $(\text{km/h}) \times h = (\text{km} \times h)/h = \text{km};$
- $\text{km}/(\text{km/h}) = \text{km} \times (h/\text{km}) = (\text{km} \times h)/\text{km} = h;$
- $\text{km}/h = \text{velocidade}.$



68. a) 4 horas;  
b) 4 horas;  
c) 3 horas.

69. a) 135 km;  
b) 260 km;  
c) 150 km;  
d) 200 km.

70. a) 40 km/h;  
b) 25 km/h.

71. a) 360 km;  
b) Multipliquei a distância pelo tempo de percurso;  
c) 4 horas;  
d) O automobilista leva 4 horas para percorrer 360 km, com velocidade de 90 km/h.

72. a) O automobilista gasta 1 hora para percorrer uma distância de 80 km;  
b)  $1/2$ ;  
c) 200 km;  
d) O automobilista gasta 1 hora para percorrer uma distância de 50 km;  
e) 4 h;  
f) Dividi a distância total pela velocidade;  
g) O automobilista gasta 4 horas para percorrer 200 km.

Em cada exercício que envolve produções de máquinas, considere que, nas duas situações, as máquinas mantêm a mesma produção.

73. a) 180 horas;  
b) Multipliquei o número de dias pelo tempo em horas;  
c) 20 dias;  
d) Se um grupo de máquinas tivesse trabalhado 9 horas por dia, elas teriam levado 20 dias para executar o trabalho.

68. Calcule o tempo gasto para percorrer:

- a) 320 km, com velocidade média de 80 km/h.  
b) 300 km, com velocidade média de 75 km/h.  
c) 225 km, com velocidade média de 75 km/h.

69. Calcule quanto se percorre:

- a) Durante 3 horas, com velocidade média de 45 km/h.  
b) Durante 4 horas, com velocidade média de 65 km/h.  
c) Durante 2 horas e 30 minutos, com velocidade média de 60 km/h.  
d) Durante 3 horas e 20 minutos, com velocidade média de 60 km/h.

70. Calcule a velocidade média ao se:

- a) Percorrer 320 km em 8 horas.  
b) Percorrer 200 km em 8 horas.

71. Um automobilista leva 6 horas para percorrer certa distância a uma velocidade média de 60 km/h. Quanto tempo levaria para fazer o mesmo percurso a uma velocidade média de 90 km/h? Para resolver, responda:

- a) Calcule a distância total percorrida pelo automobilista.  
b) Que conta você fez para responder à pergunta a)?  
c) Para percorrer 360 km com velocidade média de 90 km/h, quanto tempo o automobilista levaria?  
d) Escreva a resposta do problema.

72. Um automobilista leva 2 horas e 30 minutos para percorrer certa distância com velocidade média de 80 km/h. Quanto tempo levará para fazer o mesmo percurso com velocidade média de 50 km/h? Para resolver, responda:

- a) O que significa velocidade média de 80 km/h?  
b) Trinta minutos representam qual fração da hora?  
c) Se a cada hora o automobilista percorreu 80 km, qual é a distância total percorrida por ele ao fim de duas horas e meia?  
d) O que significa velocidade média de 50 km/h?  
e) Quanto tempo se leva para percorrer 200 km com essa velocidade média?  
f) Que conta você fez para responder à pergunta e)?  
g) Escreva a resposta do problema.

73. Um grupo de máquinas levou 15 dias para executar um trabalho, trabalhando 12 horas por dia. Se essas mesmas máquinas tivessem trabalhado 9 horas por dia, quantos dias teriam levado para executar o trabalho? Para resolver, responda:

- a) Quantas horas as máquinas trabalharam para executar todo o serviço?  
b) Que conta você fez para calcular a resposta a)?  
c) Se as máquinas levassem 180 horas para fazer todo o serviço trabalhando 9 horas por dia, quantos dias levariam para concluir o serviço?  
d) Responda agora ao problema.



74. Responda:

- a) Se uma máquina fabrica certa quantidade de peças em 6 dias, trabalhando 4 horas por dia, **em quantos dias fabricaria a mesma quantidade de peças**, trabalhando 8 horas por dia?
- b) As grandezas dias e horas de trabalho, neste problema, são direta ou inversamente proporcionais?

74. a) 3 dias;  
b) Inversamente proporcionais.

Sugestão: para fabricar todas as peças, gastaram 24 horas; logo, sendo  $d$  o número de dias procurados, teríamos  $8d = 24 \Rightarrow d = 3$ .

75. Trinta máquinas, trabalhando 8 horas por dia, levam 27 dias para efetuar um trabalho. **Quantos dias levariam 18 dessas máquinas para fazer o mesmo trabalho**, trabalhando 9 horas por dia? Para resolver, responda:

- a) Trabalhando 8 horas por dia durante 27 dias, quantas horas, ao todo, trabalhou cada máquina?
- b) Que conta você fez para responder à pergunta (a)?
- c) E as trinta máquinas?
- d) Responda: trabalhando 9 horas por dia durante  $d$  dias, que conta você deve fazer para representar quantas horas ao todo trabalhou cada máquina?
- e) E as 18 máquinas?
- f) Observe que o total de horas trabalhadas deve ser o mesmo, isto é, devemos ter:  $9(d)(18) = 8 \times 27 \times 30$  ou, calculando os produtos nos dois membros,  $162(d) = 6\,480$ . Agora, calcule o valor de  $(d)$ .
- g) O que representa o valor encontrado para  $(d)$ ?
- h) Escreva a resposta do mesmo problema.

**Professor(a):** Esclareça para os alunos que, nos exercícios 75 e 78, eles devem considerar que todas as máquinas têm as mesmas capacidades de produção.

75. a) 216 horas;  
b) Multipliquei o número de dias pelo número de horas trabalhadas;  
c) 6 480 horas;  
d)  $9d$ , ou seja, multiplicar 9 vezes  $d$ ;  
e)  $9(d)(18) = 162d$ ;  
f) 40 dias;  
g) O número de dias que 18 máquinas levariam para efetuar o trabalho: 40;  
h) 18 máquinas levam 40 dias, trabalhando 9 horas por dia, para efetuar o trabalho.

## Aprendendo em casa

76. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Velocidade média	50 km/h	120 m/min	70 km/h	$d$	50 km/h
Tempo	2 h	5 min	$c$	4 h	2 h 30 min
Espaço percorrido	$a$	$b$	350 km	300 km	$e$

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

76. a) 100 km;  
b) 600 m;  
c) 5 h;  
d) 75 km/h;  
e) 125 km.

77. 29 890 m.

78.  $8 \times 30 = 12d$ ;  $d = 20$   
R) 20 dias.

79.  $210 \times 35 \times 60 = 300 \cdot t \cdot 30$ ;  
 $t = 49$ .  
R) 49 caracteres por linha.

77. Um motociclista percorreu 8 540 m em 10 minutos. Quantos metros percorrerá em 35 minutos, mantendo a mesma velocidade média? Sugestão: calcule primeiro quanto ele percorre em um minuto.

78. Se 8 máquinas fazem certo trabalho em 30 dias, em **quantos dias 12 dessas máquinas farão o mesmo trabalho**?

79. Um livro tem 210 páginas com 35 linhas em cada página, cada linha tendo 60 caracteres. Reimpresso, em formato menor, com 300 páginas, **quantos caracteres deverá ter, por linha, se o total é de 30 linhas por página**?

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

Depois de explorar o exercício 80, escreva no quadro a frase a seguir, para que os alunos anotem nos cadernos:

Dois polígonos são semelhantes se e somente se a cada ângulo de um deles corresponde outro ângulo, de medida igual, e as razões entre as medidas dos lados correspondentes são iguais.

Explore no quadro atividades com os alunos, para que concluam que os triângulos representados no exercício 89 satisfazem as condições entre ângulos e lados para que sejam considerados triângulos semelhantes.

Comente que, diversas vezes, para simplificar a linguagem, citaremos as razões entre lados correspondentes de polígonos no sentido de razões entre as medidas dos lados correspondentes.

#### ATIVIDADES ORAIS

- Sim.
- Não.
- Sim.
- É uma redução do segundo.

Recomende ou explore a leitura de:

“Semelhança não é mera coincidência” (p. 5-15)  
Nilson José Machado  
Coleção Vivendo a Matemática  
Editora Scipione

#### 80. Tarefa do aluno.

Explore mais o significado de ampliação e redução, com perguntas como: a) A imagem projetada de um slide é uma ampliação ou uma redução? A imagem vista através de um microscópio é uma ampliação ou uma redução? A fotografia de um avião é uma ampliação ou redução? O desenho de um objeto na escala de 1:10 é uma ampliação ou redução? Um quadrado cujo lado mede 30 cm é uma ampliação ou redução de outro cujo lado mede 3 metros?

Se o raio de uma circunferência é maior que o raio de outra, a primeira é uma ampliação ou uma redução da outra? Elas são figuras semelhantes?

Comente com os alunos que duas figuras iguais, isto é, que não foram ampliadas ou reduzidas, também são chamadas de semelhantes. Este é um caso particular de semelhança que os matemáticos chamam de “trivial”.

## Ampliações, reduções e semelhança

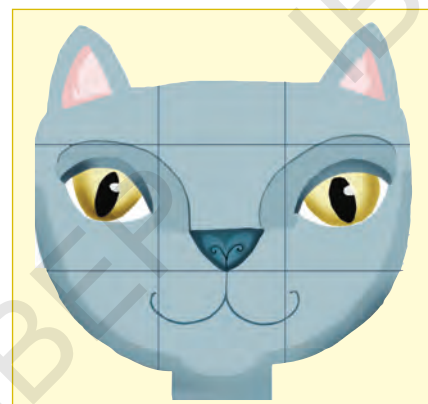
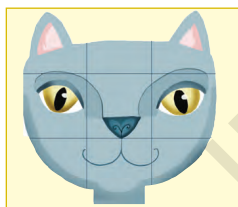
### Explorando o que você já sabe

Renato **ampliou** um desenho como se vê abaixo.

O desenho inicial e o desenho que Renato ampliou têm a mesma forma, mas não o mesmo tamanho.

Se uma figura é uma ampliação ou redução de outra, elas se chamam figuras semelhantes.

- Os dois desenhos que Renato fez têm a mesma forma?
- Os desenhos têm o mesmo tamanho?
- Eles são semelhantes?
- Se o segundo é uma ampliação do primeiro, o que se diz do primeiro em relação ao segundo?



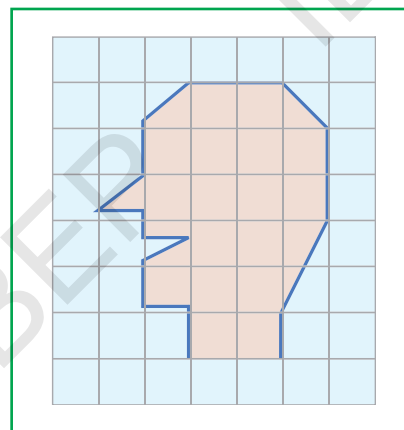
Júlia Bianchi, 2006

## Aprendendo em sala de aula

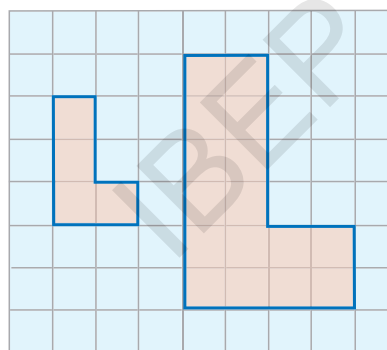
**80.** Um recurso para **ampliar (ou reduzir) desenhos** é usar quadriculados com quadrados de tamanhos diferentes:

Você deve quadricular a figura que quer ampliar ou reduzir e, depois, fazer outro quadriculado com quadrados maiores, se quiser ampliar, ou menores, se quiser reduzir.

Em seguida, deve copiar, em cada quadrado do quadriculado, mantendo as proporções da melhor maneira possível, as partes correspondentes da figura que se está ampliando ou reduzindo. Faça isso com a figura ao lado, usando quadriculados do tamanho que quiser.



81. Denise é desenhista e está desenhando um logotipo para as “Lojas Leal”. Veja o logotipo que ela imaginou:

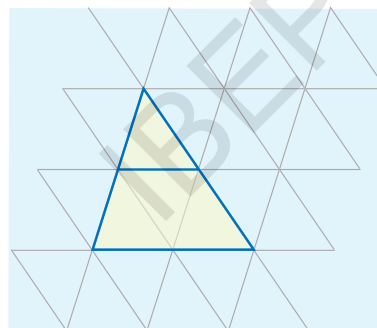


- O que representa o primeiro L da figura da esquerda: uma ampliação ou uma redução do segundo L da direita? E o segundo L em relação ao primeiro?
- A razão entre a base do L da esquerda e a base do L da direita é de 1 : 2. Verifique se as razões entre todos os lados correspondentes das duas letras são também de 1 : 2 (da menor para a maior).
- Os ângulos correspondentes dessas figuras têm medidas iguais?
- As duas letras L que Denise desenhou são figuras semelhantes? Justifique sua resposta de duas maneiras diferentes.

Peça exemplos de logotipos que conheçam. Por exemplo, de marcas de automóveis, de instituições como bancos, lojas etc.

81. a) O primeiro L representa uma redução do segundo L, e o segundo L representa uma ampliação do primeiro;  
b) As razões entre todos os lados correspondentes das duas letras é 1 : 2;  
c) Sim;  
d) Sim. 1ª. Porque uma das figuras é uma ampliação da outra. 2ª. Porque a cada ângulo do primeiro L corresponde outro de medida igual do segundo L, e as razões entre os lados correspondentes das duas figuras são iguais.

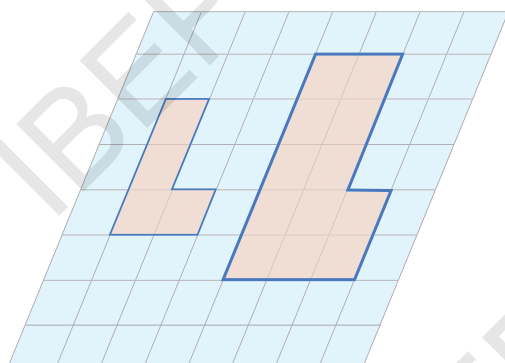
82. Observe a figura ao lado. Nela, você vê uma malha composta de retas paralelas que se cortam, formando diversos pequenos triângulos. Suponha que a distância entre as retas paralelas é a mesma em cada direção.



- Quantos triângulos amarelos com lados azuis estão desenhados na malha?
- Qual é a razão entre cada lado do menor e do maior triângulo?
- Os ângulos correspondentes desses dois triângulos têm medidas iguais?
- Esses dois triângulos são semelhantes? Por quê?
- Copie a malha e desenhe um terceiro triângulo prolongando os dois lados não horizontais do triângulo maior da figura.
- Qual é a razão entre os lados correspondentes do triângulo menor e os do que você desenhou?
- Qual é a razão entre os lados correspondentes do triângulo maior da figura e os do que você desenhou?

82. a) 2;  
b) 1 : 2;  
c) Sim;  
d) São semelhantes porque um é uma ampliação do outro: cada ângulo do primeiro triângulo corresponde um ângulo de medida igual do segundo, e as razões entre os lados correspondentes são iguais.  
e) Tarefa do aluno;  
f) Respostas variadas;  
g) Respostas variadas.

83. Observe as duas letras L a seguir e responda:



- O lado superior da letra maior é quantas vezes o lado correspondente da menor?
- O lado inferior da letra maior é o dobro do correspondente da letra menor?
- Por que não se pode dizer que essas duas figuras são semelhantes?

83. a) 2 vezes maior;  
b) Não;  
c) Porque as razões entre os lados correspondentes das duas figuras não são iguais.

84.a)  $LN/RT = 6/18 = 1/3$ ;  
 $MN/ST = 3/9 = 1/3$ ;

b) Os pares de ângulos correspondentes são respectivamente iguais;

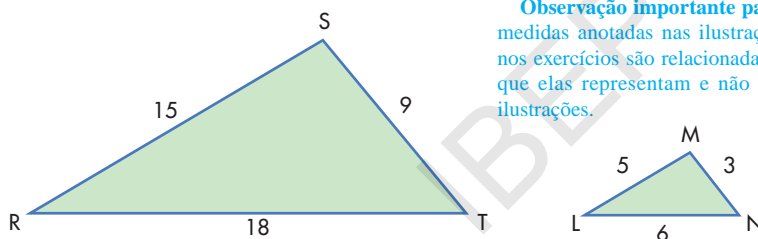
c) São semelhantes porque o primeiro é uma ampliação do segundo: as razões entre os pares de lados correspondentes são iguais e as medidas dos pares de ângulos correspondentes são respectivamente iguais.

Destaque para os alunos dois fatos importantes sobre triângulos semelhantes:

Têm três pares de ângulos de medidas iguais e as razões entre os lados correspondentes são iguais. (Os ângulos de medidas iguais, bem como os lados a eles opostos, chamam-se correspondentes.)

Por exemplo, os dois triângulos retângulos do exercício 85 são semelhantes, pois têm os dois pares de ângulos agudos de medidas iguais e os lados a eles opostos (lados correspondentes) formam razões iguais.

84. Observe os dois triângulos da figura a seguir e responda:



**Observação importante para os alunos:** as medidas anotadas nas ilustrações ou descritas nos exercícios são relacionadas com os objetos que elas representam e não com as próprias ilustrações.

a) A razão da medida do lado LM para a medida do lado correspondente RS é  $\frac{5}{15} = \frac{1}{3}$ .

Quais são as razões entre os outros pares de lados correspondentes, do menor para o maior?

b) Use um transferidor ou um papel transparente para verificar se os pares de ângulos correspondentes L e R, M e S, N e T são respectivamente iguais.

c) Os triângulos RST e LMN são semelhantes? Justifique sua resposta.

Vimos que os triângulos LMN e RST da figura anterior são semelhantes. Como as razões entre os lados correspondentes do triângulo LMN para o triângulo RST, nesta ordem, são equivalentes a 1 : 3, dizemos:

A razão de semelhança entre os triângulos LMN e RST, nesta ordem, é de 1 : 3.

85. Observe os triângulos retângulos da figura e, em seu caderno, escreva os valores que substituem corretamente as letras da tabela:



85. a = 4/8;  
b = 5/10;  
c = 6/3;  
d = 10/5.

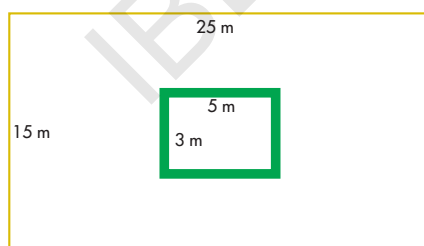
	Cateto menor	Cateto maior	Hipotenusa
Triângulo menor	3	4	5
Triângulo maior	6	8	10
Razão do menor para o maior	$\frac{3}{6}$	<b>a</b>	<b>b</b>
Razão do maior para o menor	<b>c</b>	$\frac{8}{4}$	<b>d</b>

86. Resolva, ainda com base nos triângulos da figura anterior:

- Use, a seu critério, qualquer recurso para verificar que existem dois pares de ângulos agudos dos dois triângulos que têm medidas iguais.
- Eles são triângulos semelhantes? Por quê?
- Se são semelhantes, qual a razão de semelhança do menor para o maior?
- Discuta com seus colegas e decida se verdadeiro ou falso: a **razão de semelhança** do maior triângulo para o menor é de 2 : 1 (dois para um).

87. O pai de Denise pediu que ela desenhasse um pequeno galpão de forma retangular, medindo 5 m de comprimento por 3 m de largura, que seria construído em um terreno retangular de sua propriedade.

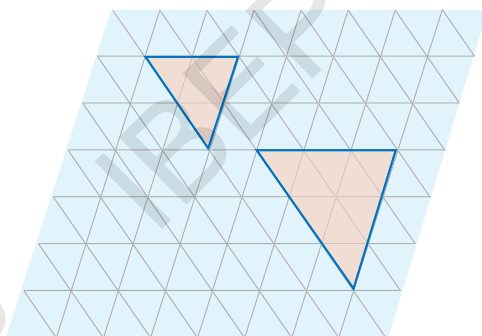
Denise fez um desenho, como se vê abaixo, registrando também as medidas do terreno.



Responda:

- Os **retângulos** que representam o galpão e o terreno são **semelhantes**? Por quê?
- Se esses retângulos são semelhantes, qual é a **razão de semelhança** entre o menor e o maior deles?

88. Observe os triângulos desenhados na malha a seguir:



- A razão entre o lado horizontal do menor deles e o lado correspondente do outro triângulo é de 2 : 3. Qual é a razão entre os outros pares de lados correspondentes do menor para o maior triângulo?
- O que se pode dizer das medidas dos ângulos correspondentes desses triângulos?
- O que se pode dizer das razões entre os lados correspondentes do maior para o menor triângulo?
- Esses triângulos são semelhantes? Por quê?
- Qual é a razão de semelhança do maior para o menor?

86. a) Atividades dos alunos;  
b) Sim, pois as razões entre os lados correspondentes dos triângulos são iguais, bem como a cada ângulo do primeiro triângulo corresponde um ângulo de medida igual do segundo triângulo;  
c) 1 : 2;  
d) Verdadeiro.

Recorde: ângulos agudos de lados paralelos têm medidas iguais.

87. a) Sim, porque um é uma ampliação do outro: as razões entre os lados correspondentes do terreno e do galpão são iguais, bem como a cada ângulo do galpão corresponde um ângulo de medida igual do terreno;  
b) 1 : 5.

88. a) 2 : 3;  
b) São iguais;  
c) São iguais;  
d) Sim, pois têm três pares de ângulos de medidas iguais, e as razões entre os lados correspondentes dos dois triângulos são também iguais;  
e) 3 : 2.

O exercício 89, a seguir, permite explorar um detalhe importante. Por exemplo, se a unidade de medida do triângulo da esquerda for *centímetro* e a unidade de medida do triângulo da direita for *metro*, eles são triângulos semelhantes, porém, as razões de semelhança em (a) e (b) passam a ser  $3/400$  e  $400/3$ , respectivamente.

Explore mais situações como estas.



Lembre que  $A_1$  se lê A índice 1,  $A_2$  se lê A índice 2 etc.

89. a) Calculando as razões e simplificando, obtivemos a fração  $3/4$ . Logo, as razões são iguais;
- b) Nos dois triângulos, a soma das medidas dos ângulos é  $180^\circ$ ; logo,  $A + B + C = A_1 + B_1 + C_1$ . Pelas marcas iguais na figura, as duas primeiras parcelas dos dois membros são iguais; logo, as terceiras parcelas são iguais, isto é:  $C = C_1$ ;
- c) Esses dois triângulos são semelhantes e a razão de semelhança do menor para o maior é  $3 : 4$ .

Discuta com os alunos os seguintes fatos:

A razão de semelhança entre uma figura e a sua ampliação é menor ou maior que 1?

A razão de semelhança entre uma figura e a sua redução é menor ou maior que 1?

O que se poderia dizer da razão de semelhança de duas figuras que têm todas as medidas correspondentes iguais? (Figuras que podem ser superpostas.)

Se alguém disser que a razão de semelhança entre duas figuras é de  $1 : 1$  (um para um), o que se pode dizer de todos os seus pares de lados correspondentes com relação às suas medidas?

Observe que as perguntas visam estabelecer para os alunos que a congruência entre figuras (medidas correspondentes iguais) é um caso particular da semelhança.

Recomenda-se, inclusive, recortar pares de triângulos, de retângulos, de trapézios etc., que podem ser superpostos, e explorar a igualdade das medidas dos lados correspondentes.

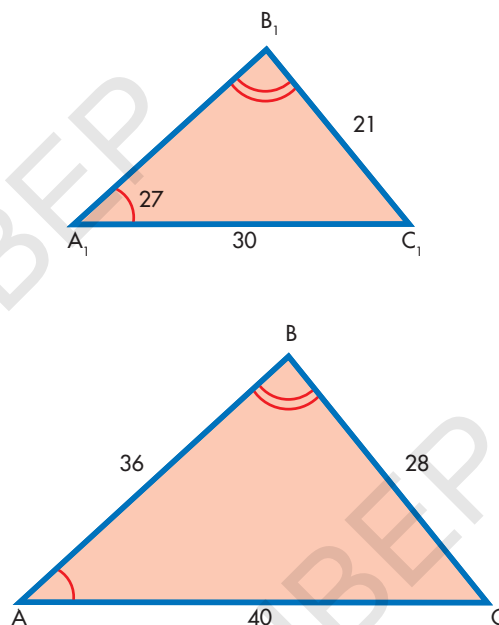
Utilize dois esquadros 30-60-90 de tamanhos diferentes para, depois de resolvido o problema 90, mostrar que o menor pode ser superposto ao maior, fazendo coincidir um dos vértices dos ângulos agudos iguais e as hipotenusas. Explore o fato de que os catetos opostos resultam paralelos.

90. Em todo triângulo, a soma dos ângulos é  $180^\circ$ . Por isso: I) no primeiro triângulo, temos como soma dos dois ângulos  $90^\circ$ ; logo, o outro ângulo desse triângulo mede  $90^\circ$ . II) No segundo triângulo, temos como soma dos dois ângulos  $150^\circ$ , portanto, o outro ângulo mede  $30^\circ$ .

Ao resolver o exercício 93, use propriedades de ângulo formados por paralelas e ângulos opostos pelo vértice.

89. Observe os triângulos  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$  da figura:

- a) Supondo os seis lados medidos com a mesma unidade de medida, verifique se as razões entre os lados correspondentes, do menor para o maior triângulo, são iguais.
- b) Explique por que os ângulos  $C$  e  $C_1$  têm medidas iguais.
- c) O que você conclui a respeito dos triângulos  $ABC$  e  $A_1B_1C_1$ ?



90. Márcia viu os desenhos de dois triângulos e observou que dois dos três ângulos de um triângulo medem  $30^\circ$  e  $60^\circ$ , e dois dos três ângulos do segundo triângulo medem  $60^\circ$  e  $90^\circ$ .

Ajude Márcia a calcular o terceiro ângulo de cada um dos dois triângulos.

91. Se dois triângulos têm dois pares de ângulos de medidas iguais, o que se pode dizer do terceiro par de ângulos?

91. Também são iguais porque a soma dos três ângulos internos de qualquer triângulo é  $180^\circ$ .

92. Em conjunto com seus colegas, tente desenhar dois triângulos que tenham dois pares de ângulos correspondentes, de medidas iguais, e não sejam triângulos semelhantes. Conseguiram? Justifique.

92. Não, porque, sempre que desenhamos dois triângulos que têm dois pares de ângulos de medidas iguais, os terceiros pares também têm medidas iguais e, calculando as razões entre os lados correspondentes, sempre resultam em razões iguais.

O que você e seus colegas descobriram no exercício 92 é verdadeiro e pode ser resumido assim:

Se dois triângulos têm dois pares de ângulos correspondentes de medidas respectivamente iguais, então são triângulos semelhantes.

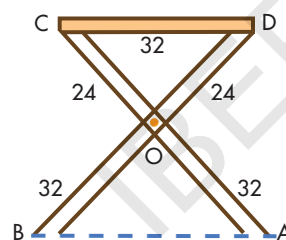
Diga para os alunos que os matemáticos provam que a frase acima é verdadeira.

93. Observe:

Na figura, você vê o desenho de uma mesa com o tampo paralelo à linha que passa por seus pés.

- O que se conclui sobre as medidas dos ângulos D e B, C e A?
- Cite dois triângulos semelhantes da figura.
- Calcule a distância AB entre os extremos dos pés da mesa.

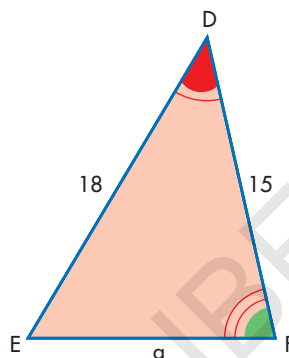
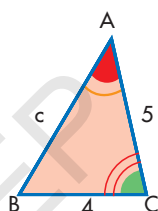
Medidas em centímetros



93. a) São iguais;  
b)  $\triangle COD$  e  $\triangle AOB$ ;  
c) 42,67 cm, aproximadamente.

Com relação à figura do exercício 94, lembre aos alunos os significados das marcas nos ângulos A e D, C e F: representam que eles têm, respectivamente, medidas iguais.

94. Justifique por que os triângulos da figura a seguir são semelhantes e depois calcule as medidas **a** e **c** dos lados **EF** e **AB**, respectivamente.



94. Os triângulos são semelhantes porque têm dois pares de ângulos correspondentes com medidas respectivamente iguais: A e D, C e F. A medida **a** é igual a 12 e a medida **c** é igual a 6.

95. Destaque, para os alunos, que a figura do problema 95 “sugere” dois triângulos retângulos semelhantes (dois ângulos retos e um ângulo agudo comum).

Reproduza, no quadro, a figura que se vê na margem, sem escrever as medidas, e explore com perguntas:

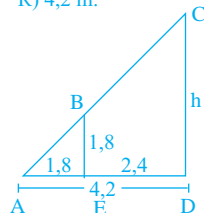
Qual dos segmentos representa a sombra e qual a medida dele em metros? Qual dos segmentos representa a distância do homem à base do poste? Se representarmos a altura do poste pela letra **h**, ao lado de qual dos catetos verticais devemos escrevê-la?

Ao lado de qual segmento devemos escrever a medida 1,8 m?

Quanto mede o cateto horizontal do maior dos triângulos retângulos?

Como os dois triângulos retângulos da figura são semelhantes, qual a proporção que permite calcular a medida **h** em metros?

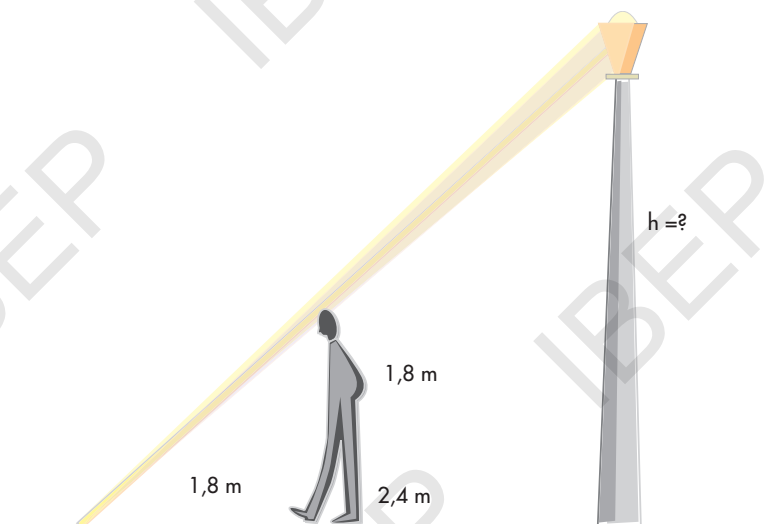
R) 4,2 m.



Júlia Bianchi, 2006

95. Veja, com atenção, o que Celso descobriu:

Celso observou que um homem que mede 1,80 m de altura projeta uma sombra de 1,80 m quando está distante 2,4 m da base de um poste de iluminação. **Calcule a altura do poste.**



**Professor(a):** Para a figura 1, denomine a altura PN de  $x$  e explore a semelhança entre os triângulos LMQ e LNP, estabelecendo a proporção  $1/4 = 3/x$ . Para a figura 2, proponha trabalhos em grupo, com alguns alunos elaborando os problemas, e outros os resolvendo.

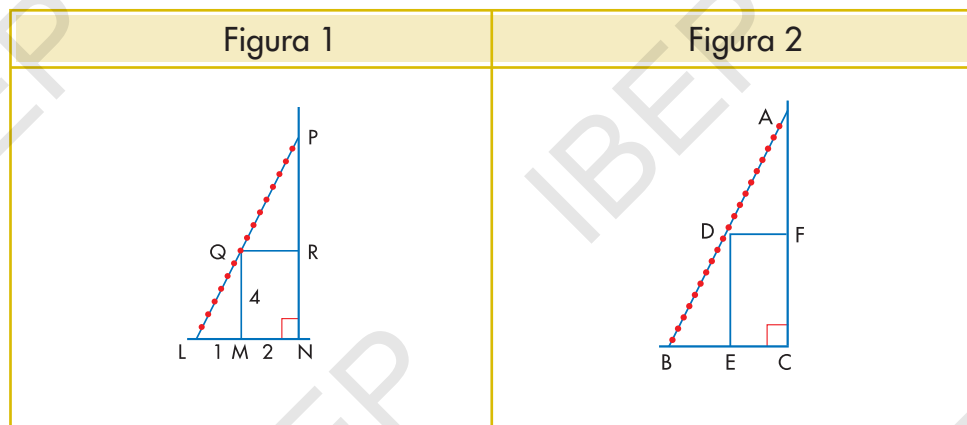
96. a) 12 m;  
b) Tarefa do aluno.

**Professor(a):** Explore as quatro figuras do exercício 97 usando propriedades de ângulos formados por paralelas e transversais, para que os alunos conclua as igualdades das medidas dos ângulos correspondentes e, conseqüentemente, que os pares de triângulos de cada figura são semelhantes. Para tal, explore os ângulos identificados por letras nas quatro figuras.

Exemplificando:  
 $a = b$  (alternos internos)  
 $b = c$  (opostos pelo vértice.)  
Logo,  $a = c$ .  
O ângulo  $d$  é ângulo comum aos dois triângulos. Etc.

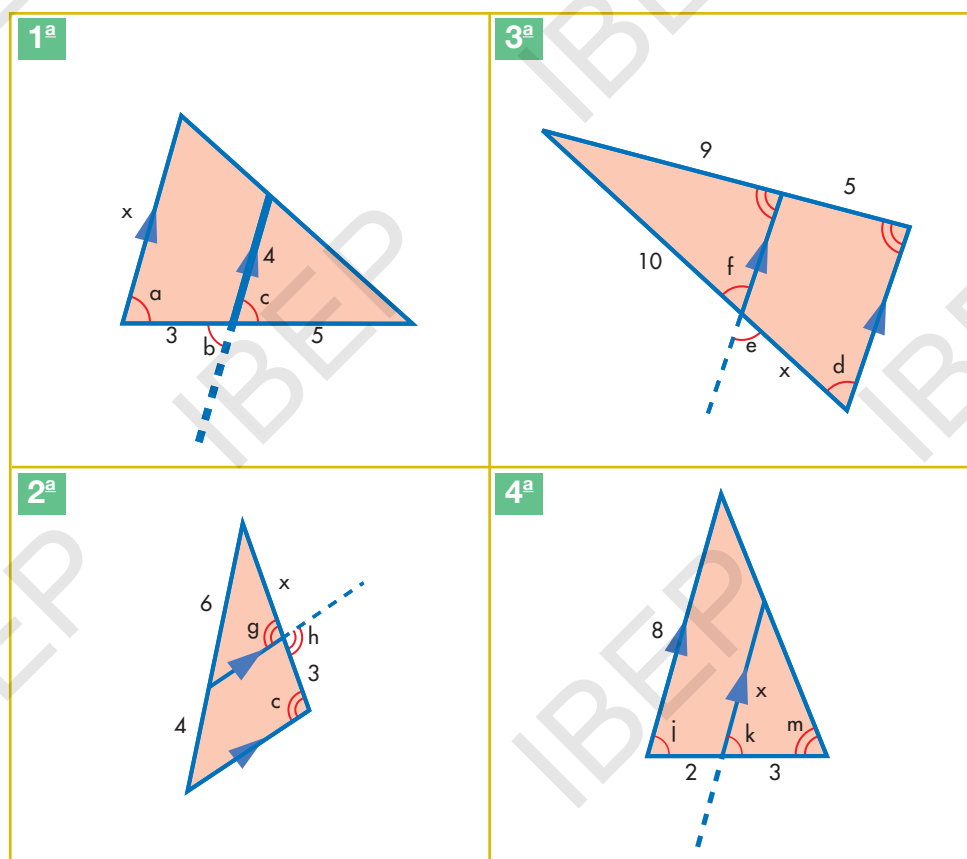
97. 1ª)  $x/8 = 4/5$   
 $5x = 32$   
 $x = 32 : 5 = 6,4$ .
- 2ª)  $x/6 = (x + 3)/10$   
 $10x = 6x + 18$   
 $4x = 18$   
 $x = 4,5$ .
- 3ª)  $(10 + x)/14 = 10/9$   
 $90 + 9x = 140$   
 $9x = 50$   
 $x = 50/9$
- 4ª)  $x/3 = 8/5$   
 $5x = 24$   
 $x = 24 : 5 = 4,8$ .

96. Observe as figuras 1 e 2 a seguir:



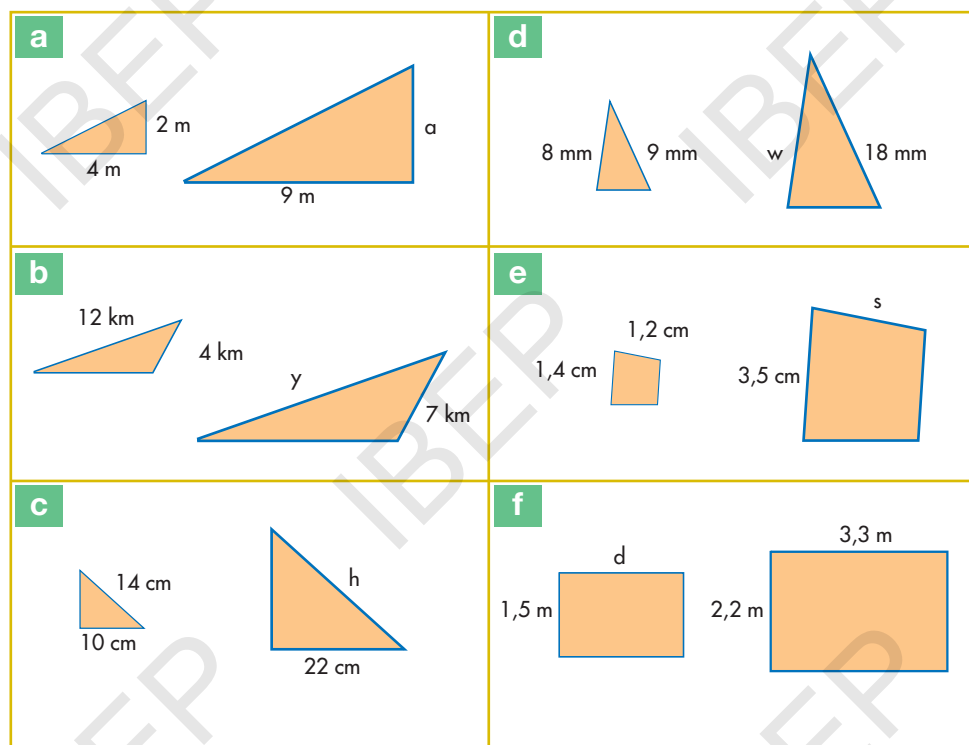
- a) A **figura 1** representa uma escada LP apoiada em uma parede vertical. As medidas registradas na figura são dadas em metros: LM mede 1 metro, MN mede 2 metros e MQ mede 4 metros. Calcule a altura do ponto P, no qual a escada se apoia na parede, em relação ao ponto N, situado ao nível do solo.
- b) Use a **figura 2** para **inventar um problema**. Depois, resolva-o.

97. Como você sabe, as **setas sobre os segmentos** da figura a seguir **representam paralelas**.



Em cada caso, calcule o valor de  $x$ .

98. Na figura a seguir, os pares de polígonos correspondentes são semelhantes:



98. a)

	a	b	c	d	e	f
Razão de semelhança	4:9	4:7	10:22	9:18	1,4:3,5	1,5:2,2
Medida do lado	4,5	21	30,8	16	3	2,25

Obs.: (c) 5:11 (d) 1:2 (e) 2:5 (f) 15:22

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

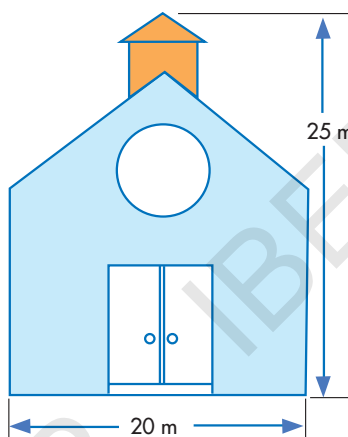
Em cada caso:

- Calcule a razão de semelhança do menor para o maior.
- Calcule a medida do lado que está representado por uma letra.

## Aprendendo em casa

99. O desenho a seguir representa uma redução da fachada de uma igreja. Nele, estão registradas duas medidas reais da igreja: a largura e a altura da torre. Use sua régua e a razão de semelhança para avaliar as medidas aproximadas:

- Da largura da porta.
- Da altura da porta.
- Da altura das paredes laterais.



99. a) 6,80 m;  
b) 8,5 m;  
c) 13,6 m.

100.  $x \rightarrow 3,5$ .  
 $a \rightarrow 6,0$ .  
 $b \rightarrow 9,0$ .

101. R\$ 360,00.

102. R\$ 1 440,00.

103. 578 lugares.

104. 4%.

105. 7%.

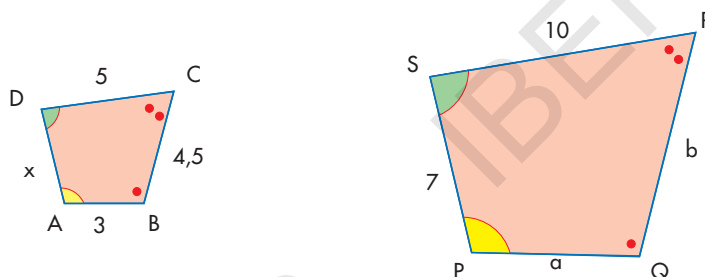
106. a) 105,60;  
 b) 217,50;  
 c) 386,40;  
 d) 569,50.

107.

	22 354	5%	1 117,70
	13 000	4%	520
	2 500	3%	75
	800	2%	16
Preço de venda em reais			
Porcentagem de comissão			
Comissão recebida			

Explore os exercícios de 101 a 105 para formular novos problemas, trocando dados com incógnitas. Por exemplo, no 101, informe o total economizado e pergunte quantos por cento do que ela possuía foram economizados.

100. Os quadriláteros da figura abaixo são **semelhantes**. Calcule as medidas dos lados que estão representadas por letras:



## Explorando o que você aprendeu e aprendendo mais

101. Genuína tinha por meta **economizar** R\$ 480,00. Ela conseguiu economizar 75% dessa quantia. Quanto Genuína economizou?

102. O **aluguel** de uma casa de praia na primeira **quinzena** de janeiro custa R\$ 3 200,00. Em fevereiro, a quinzena custa 45% desse valor. Quanto custa o aluguel da quinzena de fevereiro dessa casa?

103. Para assistir a uma peça teatral da atriz Paulícia Povar, foram reservados, antecipadamente, 85% dos 680 lugares de um teatro. Quantas **reservas** foram feitas **antecipadamente**?

104. Em uma viagem de navio, 23 dos 575 passageiros sentiram enjoos ao iniciar a viagem. Qual foi a **porcentagem** de passageiros que sentiram enjoos?

105. Ao vender um DVD por R\$ 45,00, o comerciante paga R\$ 3,15 de **impostos**. Qual **porcentagem** do preço de venda é paga de imposto?

106. Observe a **tabela** a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Preço em reais	120	250	420	670
Desconto de	12%	13%	8%	15%
Preço com desconto em reais	a	b	c	d

107. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Preço de venda em reais	800	2 500	13 000	22 354
Porcentagem de comissão	2%	3%	4%	5%
Comissão recebida em reais	a	b	c	d



108. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Preço em reais	200	360	480	2 485
Porcentagem de aumento	3%	4%	5%	6%
Preço após o aumento em reais	a	b	c	d

109. Em um mapa, estão desenhados pontos que representam três cidades A, B e C. As distâncias medidas no mapa são  $AB = 7$  cm,  $AC = 10$  cm e  $BC = 13$  cm. Se em outro mapa estão representadas estas mesmas cidades e a distância AB mede 17,5 cm, calcule as distâncias AC e BC neste mapa.

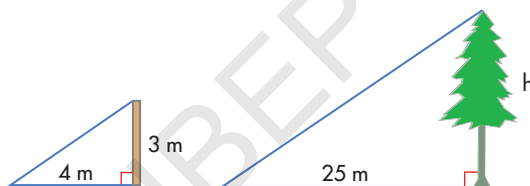
110. Essas três cidades podem estar situadas na mesma reta? Justifique sua resposta.

111. Se o primeiro mapa está na escala de 1: 100 000, quais são as distâncias reais entre essas cidades?

112. E se a escala for de 1: 1 000 000?

113. Leocádio quer fazer uma placa de anúncio triangular. O desenho-modelo tem lados que medem 8 cm, 8 cm e 10 cm. Se o lado maior da placa vai medir 25 cm, quanto medirão os outros dois lados?

114. Mário calculou a altura da árvore, representada na figura, medindo a sombra de uma vara vertical de 3 m e a sombra projetada pela árvore na mesma hora do dia.



- a) Qual foi a propriedade de figuras que Mário usou para fazer essa medida indireta da altura da árvore?
- b) Escreva uma proporção que permita calcular  $h$ .
- c) Por que você pode escrever essa proporção?
- d) Qual é a propriedade de proporções que permite calcular  $h$ ?
- e) Calcule o valor de  $h$ , em metros.
115. Em uma viagem, Roberto já dirigiu 175 km, equivalentes a 35% da distância total. Quantos quilômetros, ao todo, Roberto irá percorrer?
116. R\$ 42,00 representam 3% de qual valor?

Recomende ou explore a leitura de:

“Semelhança não é mera coincidência” (p. 19-36)

Nilson José Machado  
Coleção Vivendo a Matemática  
Editora Scipione

108.

Preço de venda em reais	2 485	480	360	200
Porcentagem de comissão	6%	5%	4%	3%
Preço após o aumento, em reais	2 634,10	504	374,40	206

109.  $AC = 25$  cm;  
 $BC = 32,5$  cm.

110. Não, pois a maior medida (13 cm) não é a soma das outras duas medidas.

111.  $AB = 7$  km;  
 $AC = 10$  km;  
 $BC = 13$  km.

112.  $AB = 70$  km;  
 $AC = 100$  km;  
 $BC = 130$  km.

113. 20 cm.

114. a) Semelhança de triângulos;  
b)  $3/h = 4/25$ ;  
c) Porque os triângulos formados são semelhantes, ou seja, as razões entre os lados correspondentes dos dois triângulos são iguais;  
d) Produto cruzado;  
e) 18,75 m.

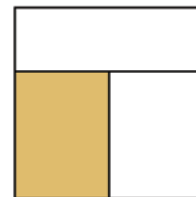
115. 500 km.

116. R\$ 1 400,00.

## Seção Olímpica

1. 28 cm. Use o fato de que, tendo a mesma área e a mesma altura, os dois retângulos inferiores têm suas bases medindo 6 cm.

1. (OBMEP 2009) A figura mostra um quadrado de lado 12 cm, dividido em três retângulos de mesma área. Qual é o perímetro do retângulo colorido?



2. 3 cm. Represente a incógnita por  $x$ . Calcule o perímetro do pedaço que sobrou e iguale a 85% do perímetro da folha antes dos cortes. Resultará a equação  $160 - 8x = 136 \Rightarrow x = 3$ .

2. (OBMEP 2011) Márcia cortou quatro tiras retangulares de mesma largura, cada uma de um dos lados de uma folha de papel medindo 30 cm por 50 cm. O perímetro do pedaço de papel que sobrou é 85% do perímetro da folha original. Qual é a largura das tiras?

3. 20 litros por minuto. Sabe-se que  $v = e/t$ . Logo,  $t = e/v = 0,5/4 = 0,125$  da hora, ou seja,  $0,125 \times 60$  minutos = 7,5 minutos para alcançar a praia. Como a água entra no barco a 40 litros por minuto, até Alvino chegar à praia,  $40 \times 7,5 = 300$  litros de água terão entrado no barco. Logo, Alvino terá que tirar  $300 - 150 = 150$  litros do barco em 7,5 minutos, ou seja,  $150/7,5 = 20$  litros por minuto.

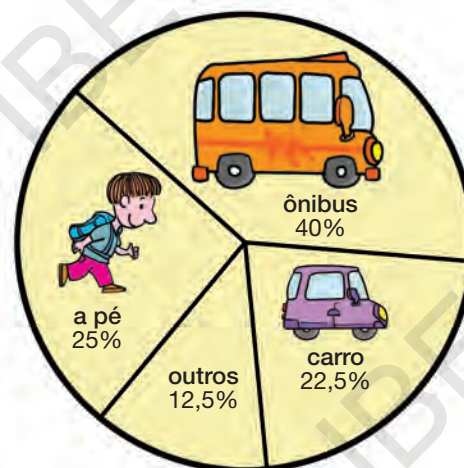
3. (OBMEP 2011) Alvino está a meio quilômetro da praia quando começa a entrar água em seu barco, a 40 litros por minuto. O barco pode suportar, no máximo, 150 litros de água sem afundar. A velocidade do barco é 4 quilômetros por hora. Quantos litros de água por minuto, no mínimo, Alvino deve tirar do barco para chegar à praia?

4. 86%

4. (OBMEP 2006) Um trabalho de Matemática tem 30 questões de Aritmética e 50 de Geometria. Júlia acertou 70% das questões de Aritmética e 80% do total de questões. Qual o percentual das questões de Geometria que ela acertou?

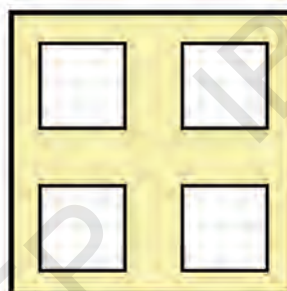
5. 30%

5. (OBMEP 2008) O gráfico mostra o resultado de uma pesquisa sobre como os moradores de um bairro de uma grande cidade vão ao trabalho. Entre os entrevistados que não vão ao trabalho a pé, qual é o percentual dos que vão de carro?



6. 200 cm<sup>2</sup>

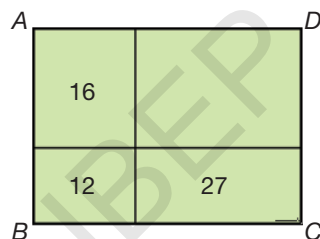
6. (OBMEP 2010) A figura mostra quatro quadrados iguais dentro de um quadrado maior. A área em amarelo é 128 cm<sup>2</sup> e a área de cada quadrado menor é igual a 9% da área do quadrado maior. Qual é a área do quadrado maior?



7. (OBMEP 2014) Guilherme precisa chegar em 5 minutos ao aeroporto, que fica a 5 km de sua casa. Se nos 2 primeiros minutos seu carro andar a uma velocidade média de 90 km/h, qual é a menor velocidade média que ele terá que desenvolver nos próximos 3 minutos para não chegar atrasado ao aeroporto?

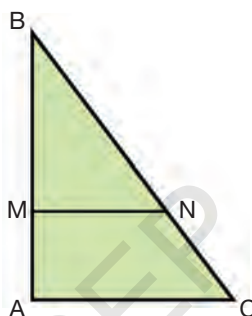
7. 40 km/h

8. (OBM) Um retângulo  $ABCD$  está dividido em quatro retângulos menores. As áreas de três deles estão na figura abaixo. Qual é a área do retângulo  $ABCD$ ?



8. 91. Se dois retângulos possuem mesma altura, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas bases. Se dois retângulos possuem mesma base, então a razão entre suas áreas é igual à razão entre suas alturas. Isto permite concluir que o retângulo grande tem base  $4 + 9 = 13$  e altura  $3 + 4 = 7$ . Sua área é, portanto,  $13 \times 7 = 91$ .

9. (OBM) Dois irmãos herdaram o terreno  $ABC$  com a forma de um triângulo retângulo em  $A$ , e com o cateto  $AB$  de 84 m de comprimento. Eles resolveram dividir o terreno em duas partes de mesma área, por um muro  $MN$  paralelo a  $AC$  como mostra a figura abaixo. Encontre o número inteiro que mais se aproxima do valor do comprimento de  $BM$ .



9. 59 cm. Nas condições do problema, os triângulos  $BMN$  e  $BAC$  são semelhantes e a área do primeiro ( $A_1$ ) é a metade da área do segundo ( $A_2$ ). Como a razão das áreas de triângulos semelhantes é igual ao quadrado da razão de semelhança, temos  $A_1/A_2 = (BM/BA)^2 = 1/2 \Rightarrow (BM/84)^2 = 1/2$ . Logo,  $BM = \frac{84\sqrt{2}}{2} = 42\sqrt{2} \approx 59$

10. (OBM) Um litro de álcool custa R\$ 2,20. O carro de Henrique percorre 25 km com 3 litros de álcool. Quantos reais serão gastos em álcool para percorrer 600 km?

10. R\$ 158,40. Para percorrer 25 km Henrique gasta  $3 \times 2,20 = 6,60$  reais.  $600 : 25 = 24$ . Logo, Henrique gastará  $24 \times 6,60$  reais, isto é: 158,40 reais.

11. (OBM) Dois amigos, Augusto e Eduardo, atravessavam uma ponte onde passava uma linha férrea. Quando tinham percorrido dois quintos da ponte, ouviram o barulho de um trem que se aproximava por trás deles. Apavorados, começaram a correr, cada um para o seu lado. Tiveram sorte: Augusto, que tinha voltado, conseguiu sair da ponte no exato instante em que o trem nela ia entrar. Por sua vez, Eduardo, que continuou para a frente, conseguiu sair da ponte no instante em que o trem também ia fazê-lo. Refeitos do susto, quando se encontraram, comentaram que isto só foi possível porque correram a 15 km/h e o trem estava a  $x$  km/h. Qual é o valor de  $x$ ?

11. 75 km/h. Até Augusto sair da ponte, cada um percorre  $2/5$  do seu comprimento. Logo, enquanto o trem percorria toda a extensão da ponte, Eduardo percorria  $1/5$  desta. Portanto, como eles correram a 15 km/h, o trem estava a  $5 \times 15 = 75$  km/h.

Leia o texto A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS na margem da seção “Verifique se você aprendeu” do capítulo 2.

**REVISÃO** – A seu critério, proponha e verifique se os alunos utilizam com compreensão algumas ou todas as atividades a seguir:

Interpretar a ideia de razão entre duas grandezas em diferentes situações do dia a dia.

Usar o conceito de razão entre duas grandezas para resolver problemas.

Identificar se duas razões dadas formam ou não uma proporção.

Usar as proporções e suas propriedades para resolver problemas.

Resolver problemas de proporcionalidade direta entre grandezas.

Identificar se grandezas dadas são ou não diretamente proporcionais.

Identificar se grandezas dadas são ou não inversamente proporcionais.

Resolver problemas relacionados com o conceito de “escala”.

Interpretar o conceito de “por cento” como parte decimal de grandezas.

Usar o conceito de porcentagem para resolver problemas.

Resolver problemas relacionados com velocidade, espaço e tempo de percurso.

Resolver problemas envolvendo relações entre mais de duas grandezas.

Identificar se duas figuras são ou não semelhantes.

Ampliar ou reduzir desenhos usando quadriculados.

Resolver problemas usando o conceito de “razão de semelhança”.

Descrever propriedades de figuras semelhantes.

Utilizar malhas para desenhar figuras semelhantes.

Utilizar propriedades das proporções para resolver problemas relacionados com figuras semelhantes.

**Professor(a):** Leia a observação da página 22 (Sugestão sobre verificação da aprendizagem).



## Verifique se você aprendeu

Se ainda tem dúvidas sobre	Reveja os exercícios
Como resolver problemas relacionados com razões entre grandezas.	1 a 6, 9, 10, 14, 15, 16, 27 a 29, 30, 31.
Como resolver problemas relacionados com proporções.	7, 11.
Como resolver problemas relacionados com grandezas diretamente proporcionais.	8, 12, 13, 17 a 21, 25, 26, 64.
Como resolver problemas relacionados com “escalas”.	22, 23, 109 a 112.
Como resolver problemas relacionados com “por cento”.	32 a 62, 101 a 108, 116.
Como resolver problemas relacionados com grandezas inversamente proporcionais.	63 a 72, 76, 77.
Como resolver problemas relacionados com mais de duas grandezas.	73 a 75, 78, 79.
Como resolver problemas relacionados com figuras semelhantes.	80 a 100, 113 a 115.



# CAPÍTULO 7

## Números e gráficos



Vkoletic | Dreamstime.com

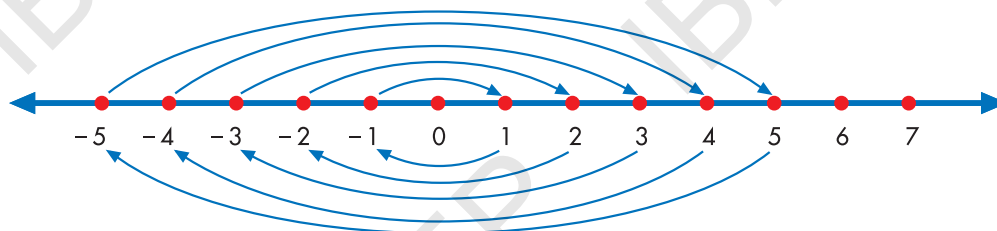
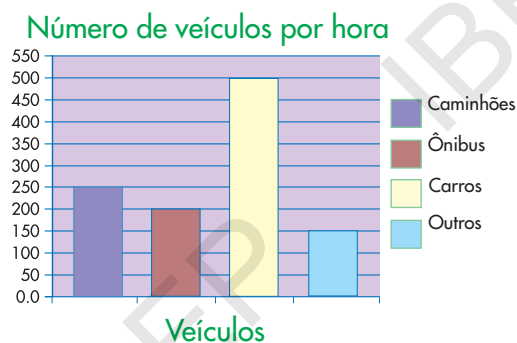
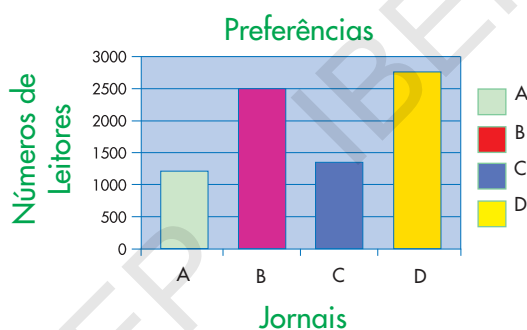


Ao lado, explicitamos os objetivos gerais do capítulo. Sugerimos um breve comentário sobre os mesmos, utilizando as ilustrações da página.

**Professor(a):** Neste e em outros capítulos, são exploradas diversas situações para que os alunos “descubram”, a partir de casos particulares, propriedades de números, de figuras, regras de cálculos etc. É extremamente importante que, após estas “descobertas”, sejam feitas observações afirmando que tais conclusões são verdadeiras (e, eventualmente, provar estes fatos) para que não fique a falsa ideia de que, a partir de poucos casos particulares, é possível generalizar. Sempre que possível, use expressões algébricas para expressar tais generalizações, bem como de algumas regularidades relacionadas com sequências numéricas.

## Você já resolveu problemas relacionados com números naturais, tabelas e gráficos. Neste capítulo, você vai aprender como:

- Identificar números positivos e números negativos.
- Relacionar números positivos e números negativos com altitudes, temperaturas, saldos ou débitos, distâncias na reta numerada.
- Somar ou subtrair números positivos ou números negativos.
- Representar números positivos e números negativos na reta numerada.
- Comparar decimais positivos ou negativos com diversas ordens decimais.
- Representar adições ou subtrações de números positivos ou negativos na reta numerada.
- Associar a subtração de positivos ou negativos com a distância entre dois pontos da reta numerada.
- Calcular possibilidades de escolhas.
- Organizar dados em tabelas.
- Representar dados usando gráficos de colunas ou barras.
- Representar dados usando gráficos de setores.
- Interpretar os dados de diversos tipos de gráficos.
- Resolver problemas relacionados com porcentagens e gráficos.



# Números positivos e números negativos

## Explorando o que você já sabe



Complete em seu caderno:

- Como se chamam os números da reta numerada acima?
  - Usando os números acima: 8, 6, 4, ...
  - Usando os números acima: 9, 6, 3, ...
  - Usando números naturais: 55, 50, 45, 40, ...
- Números naturais.
  - 2, 0.
  - 0.
  - 35, 30, 25, 20, 15, 10, 5, 0.

## Aprendendo em sala de aula

Você viu que, usando números naturais, as sequências que você completou param no zero.

Observe que, para obter cada termo dessas sequências, você foi subtraindo, de um número maior, outro menor. Por exemplo, na primeira sequência, você fez:

$$8 - 2 = 6, 6 - 2 = 4, 4 - 2 = 2, 2 - 2 = 0$$

Ao chegar no zero, você parou porque na reta numerada com números naturais não existem pontos que correspondam a números à esquerda do zero.

Observe também que os números naturais não permitem dar respostas para subtrações como as seguintes:

$$8 - 13 = ?$$

$$6 - 10 = ?$$

Como você sabe, os seres humanos adoram desafios. Veja, nas atividades a seguir, como eles conseguiram resolver essas situações (continuar as sequências, subtrair do menor o maior) criando novos números além dos números naturais. Você verá, nos exemplos iniciais, algumas situações que motivaram a criação (ou) levaram à descoberta desses números.

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

### ATIVIDADES ORAIS

Explore atividades como: marcos de quilometragem nas estradas, o metro, postes equidistantes em um trecho retilíneo de uma avenida etc., em analogia com a reta numerada.

Explorar:

(a) Situações relacionadas com números positivos e números negativos: altitudes (acima e abaixo do nível do mar), saldos e débitos, distâncias a partir de um ponto zero em dois sentidos opostos, temperaturas acima ou abaixo de zero grau, extensão da representação dos números naturais na reta numerada, no sentido oposto a eles; as diversas subdivisões em décimos, centésimos etc., na reta numerada (para positivos e para negativos), usando contextualizações para introduzir a adição e a subtração de positivos e negativos.

(b) Situações relacionadas com o cálculo de possibilidades, as tabelas e os gráficos:

- As informações. Leitura e interpretação de diversos tipos de gráficos. A construção de diversos tipos de gráficos: os dados, a escolha da unidade e dos extremos, a escala, o tipo de gráfico a usar. Utilização de porcentagens, ângulos centrais, colunas, poligonais etc. O uso de organogramas que orientem diversas atividades, como: uso de calculadoras, sequência de operações a efetuar, resolução de equações, sistemas ou problemas, uso de fórmulas. Manuais de funcionamento e de como operar diversos aparelhos. Manuais de calculadoras para, em particular, efetuar operações com decimais, calcular raízes quadradas, usar a memória da calculadora.

- Tabelas e/ou gráficos envolvendo temas como: comparação entre equipes variadas (vitórias, empates, derrotas, gols a favor, gols contra); dados relacionados com outros esportes; concursos x média aritmética x média aritmética ponderada; passageiros transportados em horários sucessivos; notas de alunos em diversas matérias x gráficos x médias; evolução de população; comparação entre população x

densidade demográfica; gráficos de segmentos com máximos, mínimos e partes horizontais; alturas médias de alunos; gráficos comparativos de médias de duas turmas em uma mesma matéria; idem, de uma mesma turma em duas matérias; gráficos explorando ingredientes de receitas (de remédios, de tortas, de bolos etc.).

- Temas relacionados com cálculo de possibilidades, como: jogos de duas equipes; códigos; placas alfanuméricas; siglas; lançamentos de dados; escolhas de bolas coloridas retiradas de uma caixa; quadriculado com cores esparsas x jogo de dardos; probabilidade de acertar na cor etc.

- Temas relacionados com representação cartesiana, como: desenhar polígonos cujos vértices são dados por pares ordenados; dados vários segmentos formando polígonos superpostos, identificar cada um deles, dadas as coordenadas dos vértices;

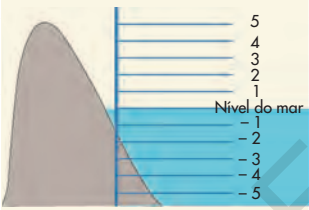
1. a) Positivos;
- b) Negativos;
- c) 0.

2. a) +22;
- b) -34;
- c) +45;
- d) -37;
- e) +32,7;
- f) -12,5.

3. a) 56 metros abaixo do nível do mar;
- b) 73 metros acima do nível do mar;
- c) 13,8 metros abaixo do nível do mar;
- d) 17,9 metros acima do nível do mar.

4. Respostas variadas.  
Exemplo:  
saldo = quantia a receber,  
débito = quantia a pagar.

1. Você sabe que existem pontos situados **acima do nível do mar** e pontos **situados abaixo**. Na **tabela** a seguir, você vê duas maneiras de representar algumas altitudes:

Altitudes	Abaixo do nível do mar		No nível do mar	Acima do nível do mar	
	Em metros	Em números negativos		Em metros	Em números positivos
	10 m	-10	0	40 m	+40
	15 m	-15		70 m	+70
	35 m	-35		90 m	+90

Você vê:	-10	-15	-35	+40	+70
Você lê:	menos 10	menos 15	menos 35	mais 40	mais 70

Responda com base nos quadros acima:

- a) Como se chamam os números que representam altitudes acima do nível do mar: positivos ou negativos?
- b) Como se chamam os números que representam altitudes abaixo do nível do mar?
- c) Qual é o único número que não é negativo nem positivo?

2. Represente, usando **números negativos** ou **números positivos**:

- a) 22 metros acima do nível do mar.
- b) 34 metros abaixo do nível do mar.
- c) 45 m acima do nível do mar.
- d) 37 m abaixo do nível do mar.
- e) 32,7 m acima do nível do mar.
- f) 12,5 m abaixo do nível do mar.

3. Os números a seguir representam altitudes em metros. Utilize-os usando frases contendo as palavras: ... “metros acima” ou ... “metros abaixo” do nível do mar.

- a) -56                      c) +73                      b) -13,8                      d) +17,9

4. Explique o que você entende por:

- a) Saldo.
- b) Débito.

5. Na situação a seguir, você vê **como utilizar números para representar saldos ou débitos**:

Saldos ou Débitos	Débitos em R\$	Em números negativos	R\$ 0,00	Saldos em R\$	Em números positivos
	R\$ 12,00	-12	0	R\$ 34,00	+34
	R\$ 30,00	-30		R\$ 57,00	+57
	R\$ 65,80	-65,80		R\$ 32,65	+32,65

Responda:

- a) Como se chamam os números que representam débitos em reais: positivos ou negativos?
- b) Como se chamam os números que representam saldos em reais?
- c) Qual é o único número que não representa saldo nem débito?
6. Os números a seguir representam **saldos ou débitos em reais**. Utilize-os, escrevendo frases contendo as palavras “saldo de...” ou “débito de...”.
- a) -56      b) +73      c) -12,5
7. Na **reta numerada** com números naturais, os números aparecem na sequência: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, ... , todos à direita do zero.
- a) Se você fosse representar os números negativos -1, -2, -3, -4 na reta numerada, que ideia você teria para localizá-los na mesma reta?
- b) Qual dos números ficaria mais perto do zero: -1 ou -2?
- c) O que você diria das distâncias entre 0 e -1, -1 e -2, -2 e -3, e assim sucessivamente?
8. Na atividade a seguir, você vê representadas duas estradas que se cortam. Considerando o ponto de interseção das linhas centrais de ambas como ponto de partida, você pode contar **distâncias para a direita ou para a esquerda**. Veja como sugerimos usar números positivos ou negativos para indicar posições na estrada:

Distâncias	Para a esquerda		km zero •	Para a direita	
	Em km	Em números negativos		Em km	Em números positivos
	20 km	-20		33 km	+33
	71km	-71		52 km	+52

- a) Como se chamam os números que representam posições para a direita do km zero: positivos ou negativos?
- b) Como se chamam os números que representam posições para a esquerda do km zero?

Recomende ou explore a leitura de:  
“Números negativos”  
Coleção Pra que serve Matemática?  
Atual Editora  
Imenes – Jabuko – Lellis

Leia o texto ATIVIDADES COLETIVAS da página 11.

5. a) Negativos;  
b) Positivos;  
c) 0.

6. a) Débito de R\$ 56,00;  
b) Saldo de R\$ 73,00;  
c) Débito de R\$ 12,50.

Explore o exercício 7 no quadro.

7. a) À esquerda do zero;  
b) -1;  
c) Devem ser todas iguais entre si, e serem iguais às distâncias entre 0 e 1, etc.

8. a) Positivos;  
b) Negativos.

Em casa, os alunos devem anotar no caderno os quadros em destaque dos exercícios 1 (2º. quadro), 5 e 8.

241

9. a) +45;  
b) -39;  
c) +15;  
d) -31;  
e) +18,5;  
f) -56,8.

10. a) 56 km para a esquerda do km zero;  
b) 73 km para a direita do km zero;  
c) 32,8 km para a esquerda do km zero;  
d) 64,7 km para a direita do km zero.

Peça ao professor de Ciências que apresente para os alunos outras escalas de medida de temperatura.

Explique como se lê:  $42^{\circ}\text{C}$  (42 graus centígrados).



9. Represente, usando **números negativos ou positivos**:

- a) 45 km para a direita do quilômetro zero.  
b) 39 km para a esquerda do quilômetro zero.  
c) 15 km para a direita do quilômetro zero.  
d) 31 km para a esquerda do quilômetro zero.  
e) 18,5 km para a direita do quilômetro zero.  
f) 56,8 km para a esquerda do quilômetro zero.

10. Os números a seguir representam **posições, em quilômetros, para a direita ou para a esquerda do quilômetro zero**. Utilize-os, escrevendo frases que contenham as palavras: "...km para a direita do km zero" ou "... km para a esquerda do km zero".

- a) -56      b) +73      c) -32,8      d) +64,7

11. Veja a notícia de jornais sobre as **temperaturas** em diversos locais:

	
● Calor de $42^{\circ}\text{C}$ assola o Nordeste	● Frio de $5^{\circ}\text{C}$ abaixo de zero castiga lavoura do Sul

Son Salvador

Agora, veja como sugerimos utilizar números para representar temperaturas acima e temperaturas abaixo de zero grau centígrado:

Temperaturas:	Abaixo de zero		$0^{\circ}\text{C}$	Acima de zero	
	Em graus:	Em números negativos		Em graus:	Em números positivos:
	$13^{\circ}\text{C}$	-13		$27^{\circ}\text{C}$	+27
	$34^{\circ}\text{C}$	-34	0	$49^{\circ}\text{C}$	+49

Responda com base no quadro acima:

11. a) Positivos;  
b) Negativos.

- a) Como se chamam os números que representam **temperaturas acima de zero grau centígrado**: positivos ou negativos?  
b) Como se chamam os números que representam **temperaturas abaixo de zero grau centígrado**?

12. Represente, usando números **negativos ou números positivos**:

12. a) +27;  
b) -32;  
c) -14,3;  
d) +28,9.

- a) 27 graus centígrados acima de zero grau.  
b) 32 graus centígrados abaixo de zero grau.  
c) 14,3 graus centígrados abaixo de zero grau.  
d) 28,9 graus centígrados acima de zero grau.



14. Observe como Nair representou os números inteiros negativos e os inteiros positivos na **reta numerada**:



a)  $+8, +6, +4, +2, 0, -2, \dots, \dots, \dots$

b)  $+9, +6, +3, 0, -3, \dots, \dots, \dots$

c)  $-49, -42, -35, -28, -21, \dots, \dots, \dots$

d)  $-7,5, -5,5, -3,5, -1,5, +0,5, +2,5, \dots, \dots, \dots$

- Dê três exemplos de números inteiros positivos.
- Dê três exemplos de números inteiros negativos.
- Dê exemplo de uma sequência de múltiplos de cinco que tenha inteiros positivos e inteiros negativos.

- 
- A horizontal number line with arrows at both ends. It is marked with integers from -7 to +9. Above each integer is a letter: H at -7, C at -6, M at -5, I at -4, B at -3, G at -2, J at -1, K at 0, F at +1, A at +2, L at +3, D at +4, E at +5, N at +6, O at +7, and R at +8. There is a small gap between the letter R and the +9 mark.

Ponto:	A	B	C	X	D	X	E	X	F	X	G	X	H	X	I
Nº correspondente (abscissa)	+2	-3	X	-1	X	0	X	+3	X	-5	X	+6	X	+7	X

15. a)  $+1; +2; +3;$   
b)  $-6; -5; -4;$   
c)  $\dots, -5, 0, 5, \dots$

Ponto	A	B	C	J	D	K	E	L	F	M	G	N	H	O	I
Número correspondente		-6	-1	+4	0	+5	+3	+1	-5	-2	+6	-7	+7	-4	

17. a) 10 partes;  
b) 1 décimo;  
c) (f / -0,2); (h / -0,4);  
(j / -0,6);  
d) m, l, i, g, respectivamente;  
e) -0,2;  
f) Em 10 partes iguais.

**Professor(a):** Antes de explorar o exercício 18, faça desenhos de intervalos na reta entre pontos com abscissas diversas, e marque pontos dentro e fora destes intervalos. Discuta e relembre aos alunos, assim, os conceitos de “estar entre”, “mais próximo”, “mais distante”, etc.

18. a) Verdadeiro;  
b) Verdadeiro;  
c) Verdadeiro;  
d) Verdadeiro;  
e) Falso;  
f) Verdadeiro;  
g) Verdadeiro;  
h) Falso.

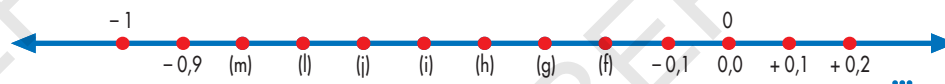
- a) Verdadeiro, porque 0,1 e 0,10 equivalem às frações  $\frac{1}{10}$  e  $\frac{10}{100}$ , que representam a mesma parte de um inteiro;  
b) Verdadeiro, porque 0,10, 0,15 e 0,20 equivalem às frações  $\frac{10}{100}$ ,  $\frac{15}{100}$  e  $\frac{20}{100}$ , que, como sabemos, representam, respectivamente, 10, 15 e 20 partes das 100 partes nas quais se divide uma mesma grandeza;  
c) Verdadeiro, porque a diferença entre 0,2 = 0,20 e 0,18 é menor que a diferença entre 0,18 e 0,10, o que, na reta numerada, significa que a distância entre 0,2 e 0,18 é menor que a distância entre 0,18 e 0,10.

19. Desenho do aluno.

Sugestão:  
Use o quadro.

20. Baseado no desenho do aluno.

17. Na **reta numerada** a seguir, você vê que o segmento cujos extremos são os pontos correspondentes a -1 e zero foi dividido em partes iguais:



Responda:

- a) Em quantas dessas partes iguais foi dividido o segmento?  
b) Quantos décimos representa cada uma delas?  
c) Quais são os decimais negativos que correspondem às letras (f), (h) e (j)?  
d) Quais são as letras que correspondem aos decimais -0,8, -0,7, -0,5 e -0,3?  
e) Existe um decimal negativo que fica à mesma distância do zero que o decimal +0,2. Qual é ele?  
f) Para representar centésimos, em quantas partes iguais você deveria dividir cada um dos dez pequenos segmentos entre o 0 e o -1?

18. Discuta com seus colegas e decida se **verdadeiro ou falso**, justificando as respostas dos três primeiros itens:

- a)  $0,1 = 0,10$  e  $0,2 = 0,20$ .  
b) 0,15 fica entre 0,1 e 0,2.  
c) 0,18 é mais próximo de 0,2 do que de 0,1.  
d) 2,25 fica no ponto médio do segmento de extremos 2,20 e 2,30.  
e) 3,29 fica entre 3,3 e 3,4.  
f) -0,15 fica entre -0,20 e -0,10.  
g) -2,17 é mais próximo de -2,2 do que -2,1.  
h) -1,23 fica entre -1,1 e -1,2.

19. Use uma **régua graduada** e desenhe três pontos M, N, P, sobre uma reta, com  $MN = 10$  cm e  $NP = 10$  cm, e N entre M e P. Divida os segmentos MN e NP em dez segmentos iguais e faça corresponder a M, N e P os números -1, 0 e 1, respectivamente.

20. Represente, no desenho que você fez, no exercício anterior, os pontos correspondentes aos números dados na **tabela** a seguir:

A	B	C	D	E	F	G	H	I	J
+0,6	-0,5	+0,5	-0,1	-0,8	-0,6	+0,9	+0,3	-0,3	+0,1

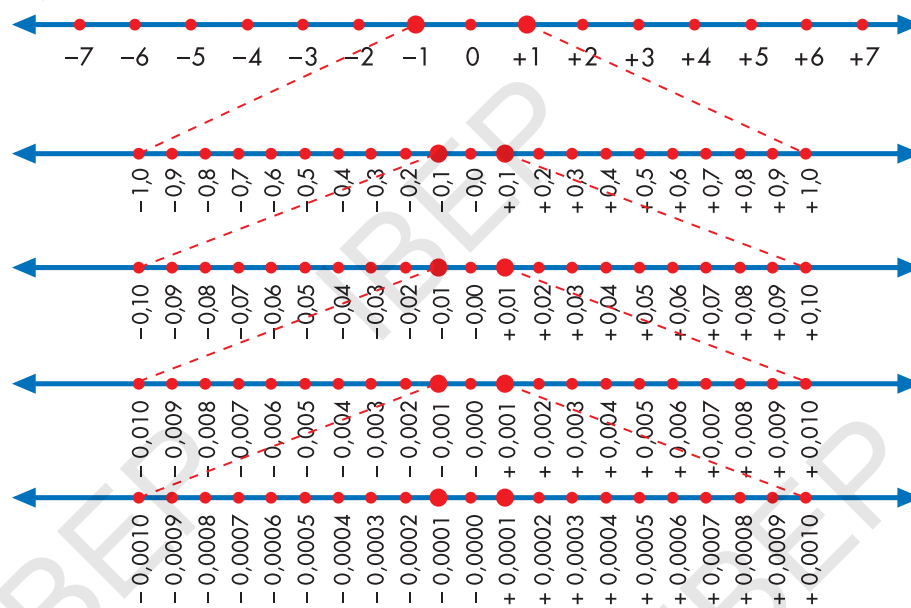
Nas figuras a seguir, você vê a **reta numerada** e diversas de suas ampliações.

Na **primeira** delas, você vê representados os números inteiros:

-7, -6, -5, -4, -3, -2, -1, 0, +1, +2, +3, +4, +5, +6, +7.

Na **segunda**, você vê uma ampliação da parte da primeira correspondente ao segmento de extremos  $-1 = -1,0$  e  $+1 = +1,0$ . Nela, estão representados números decimais com uma ordem decimal.

Na **terceira**, você vê uma ampliação da parte da segunda correspondente ao segmento de extremos  $-0,1 = -0,10$  e  $+0,1 = +0,10$ . Nela, estão representados números decimais com duas ordens decimais.



Explore a ilustração ao lado para que os alunos se convençam de que, qualquer que seja um decimal com um número finito de ordens decimais (por maior que seja a quantidade de algarismos), existe um ponto na reta numerada que lhe corresponde, e reciprocamente.

21. Responda:

- Quais são os extremos do segmento da terceira reta e que se vê ampliado na quarta reta?
- Quantas **ordens decimais** contêm os números decimais representados na quarta reta?
- Quais são os extremos do segmento da quarta reta e que se vê ampliado na quinta reta?
- Quantas ordens decimais contêm os números decimais representados na quinta reta?

21. a)  $-0,01 = -0,010$  e  $+0,01 = +0,010$ ;  
b) 3 ordens;  
c)  $-0,001 = -0,0010$  e  $+0,001 = +0,0010$ ;  
d) 4 ordens.

22. Dê dois exemplos para cada caso a seguir:

- Dois decimais positivos com duas ordens decimais, compreendidos entre 2 e 3.
- Dois decimais positivos com duas ordens decimais, compreendidos entre 2,1 e 2,2.
- Dois decimais negativos com três casas decimais, compreendidos entre  $-1$  e  $-2$ .
- Dois decimais negativos com três casas decimais, compreendidos entre  $-2,32$  e  $-2,33$ .

22. Resposta do aluno.  
(Sugestões):  
a) 2,25; 2,97;  
b) 2,12; 2,19;  
c)  $-1,191$ ;  $-1,111$ ;  
d)  $-2,322$ ;  $-2,329$ .

Observando a reta numerada, você nota que os números inteiros positivos ocupam as mesmas posições dos números naturais correspondentes. Na verdade, você pode identificar os inteiros positivos com os naturais correspondentes, isto é, considerar que:

$$+1 = 1, +2 = 2, +3 = 3, +4 = 4, \text{ etc.}$$

Professora, então eu posso dizer que o conjunto dos números naturais é uma parte do conjunto dos números inteiros?



Sim. Na verdade os matemáticos usam uma linguagem própria para esse fato. Eles dizem que o conjunto dos números naturais é um subconjunto do conjunto dos números inteiros.



Son Salvador

Antes das observações costumeiras sobre o “Aprendendo em casa”, recorde o conceito de subconjunto (que vai ser utilizado no exercício 29)

## Aprendendo em casa

23. Escreva, em seu caderno, três números que completam as **sequências** a seguir:

23. a)  $-15, -20, -25$ ;  
b)  $-16, -12, -8$ ;  
c)  $15, 3, 20, 3, 25, 3$ .

- a)  $+30, +25, +20, +15, +10, +5, 0, -5, -10, \dots, \dots, \dots$   
b)  $-32, -28, -24, -20, \dots, \dots, \dots$   
c)  $-20, 3; -15, 3; -10, 3; -5, 3; -0, 3; 5, 3; 10, 3; \dots, \dots, \dots$

24. Observe a **reta numerada** antes de copiar e completar, em seu caderno, a tabela que a sucede:



Ponto:	A	N	M	J	G	L					B	P
Abcissa:		+3	-7	-6	+6	+7	-3	-1	0		-8	

25. a) 34 metros acima do nível do mar;  
b) 29 metros abaixo do nível do mar;  
c) 14,8 metros acima do nível do mar;  
d) 32,5 metros abaixo do nível do mar.

25. Interprete os números a seguir como **altitudes em metros**, usando as palavras “acima do nível do mar” ou “abaixo do nível do mar”.

- a)  $+34$   
b)  $-29$   
c)  $+14,8$   
d)  $-32,5$

26. Represente, usando **números positivos** ou **números negativos**:

26. a)  $+44$ ;  
b)  $-18$ ;  
c)  $+32$ ;  
d)  $-51$ ;  
e)  $+17,4$ ;  
f)  $-54,60$ .

- a) Saldo de R\$ 44,00.  
b) Débito de R\$ 18,00.  
c) Saldo de R\$ 32,00.  
d) Débito de R\$ 51,00.  
e) Saldo de R\$ 17,40.  
f) Débito de R\$ 54,60.

27. Interprete como distâncias em quilômetros a partir do km zero, para a esquerda ou para a direita:

- a) +12  
b) -5

- c) +12,9  
d) -21,5

27. a) 12 km para a direita;  
b) 5 km para a esquerda;  
c) 12,9 km para a direita;  
d) 21,5 km para a esquerda.

28. Represente, usando números inteiros, as temperaturas a seguir:

- a) 18 graus acima de zero grau.  
b) 23 graus abaixo de zero grau.  
c) 32 graus acima de zero grau.

- d) 43 graus abaixo de zero grau.  
e) 17,8 graus acima de zero grau.  
f) 21,9 graus abaixo de zero grau.

28. a) +18;  
b) -23;  
c) +32;  
d) -43;  
e) +17,8;  
f) -21,9.

29. Discuta com seus colegas e decidam se é verdadeiro ou falso:

- a) O conjunto dos números pares positivos é um subconjunto do conjunto dos números naturais.  
b) O conjunto dos números ímpares positivos é um subconjunto do conjunto dos números naturais.

29. a) Verdadeiro;  
b) Verdadeiro.

## Somando números positivos e números negativos

### Explorando o que você já sabe

	Tenho	Devo	Vou ficar com saldo ou débito?
a	R\$ 50,00	R\$ 30,00	De quanto?
b	R\$ 50,00	R\$ 50,00	◆ Em a ?
c	R\$ 30,00	R\$ 50,00	◆ Em b ?
d	R\$ 50,00	nada	◆ Em c ? ◆ Em d ?

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

- a) Saldo de R\$ 20,00;  
b) Nem saldo, nem débito;  
c) Débito de R\$ 20,00;  
d) Saldo de R\$ 50,00.

30. a) Um débito de R\$ 24,00;  
b) Um saldo de R\$ 4,00;  
c) Um débito de R\$ 4,00;  
d) Um saldo de R\$ 30,00;  
e) Um saldo de R\$ 20,60;  
f) Um saldo de R\$ 10,68.

## Aprendendo em sala de aula

30. Diga o que representam no total:

- a) Dois débitos de R\$ 12,00.  
b) Um débito de R\$ 18,00 e um saldo de R\$ 22,00.  
c) Um débito de R\$ 22,00 e um saldo de R\$ 18,00.  
d) Dois saldos de R\$ 15,00.  
e) Um débito de R\$ 24,80 e um saldo de R\$ 45,40.  
f) Um saldo de R\$ 32,18 e um débito de R\$ 21,50.

Professor(a): Lembre-se da observação da página 10, sobre generalizações.



Em casa, os alunos devem anotar no caderno o quadro em destaque do exercício 31 (3 primeiras linhas).

31.

Você vê:			Você soma:
Tenho	Devo	Saldo(s) ou débito (d)	
R\$13,00	R\$7,00	s	R\$6,00
R\$18,00	R\$28,00	d	R\$10,00
R\$25,00	R\$25,00	nada	(+25)+(-25)=0
R\$33,00	R\$23,00	s	R\$10,00
R\$28,00	R\$48,00	d	R\$20,00
R\$55,00	R\$55,00	nada	(+55)+(-55)=0
Nada	R\$23,00	d	R\$23,00
			0+(-23) = -23

31. Na **tabela** a seguir, marcamos com as letras S e D as situações que correspondem a **saldo** e **débito**, respectivamente. Observe-a com atenção e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras de **a** a **j**.

Você vê				Você soma
Tenho	Devo	Saldo ou débito, S ou D		
R\$ 13,00	R\$ 7,00	S	R\$ 6,00	$(+13) + (-6) = +7$
R\$ 18,00	R\$ 28,00	D	R\$ 10,00	$(+18) + (-28) = -10$
R\$ 25,00	R\$ 25,00		nada	$(+25) + (-25) = 0$
R\$ 33,00	R\$ 23,00	a	b	c
R\$ 28,00	R\$ 48,00	D	e	f
R\$ 55,00	R\$ 55,00	g	h	i
Nada	R\$ 23,00	j	k	l

32.

+	-17	+19	-11	+5	-16	-2	0	+31	-19	+6	-6
-15	-32	+4	-26	-10	-31	-17	-15	+16	-34	-9	-21
+9	-8	+28	-2	+14	-7	+7	+7	+40	-10	+15	+3
-13	-30	+6	-24	-8	-29	-15	-13	+18	-32	-7	-19
+17	0	+36	+6	+22	+1	+15	+17	+48	-2	+23	+11

33.

+	-10.7	-5.3	+5.8	+8.4
-8.8	-19.5	-14.1	-3.0	-0.4
-5.3	-16	-10.6	+0.5	+3.1
+6.1	-4.6	+0.8	11.9	14.5
+11.7	+1.0	+6.4	17.5	20.1

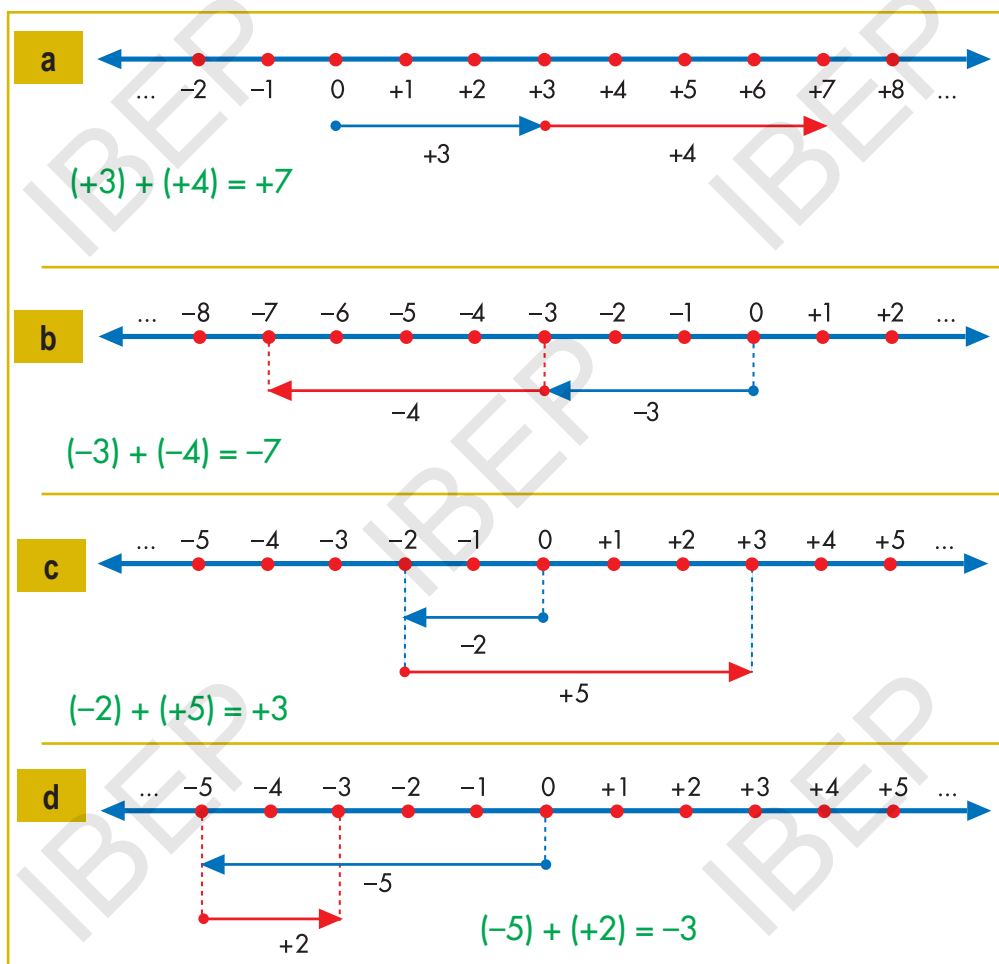
**32.** Copie a **tabela** a seguir em seu caderno e complete-a, somando os pares de números. **Considere cada positivo como saldo e cada negativo como débito:**

[illegible]

**33.** Copie a **tabela** a seguir em seu caderno e complete-a, somando os pares de números. **Considere cada positivo como saldo e cada negativo como débito:**

+	-10,7	-5,3	+5,8	+8,4
-8,8				
-5,3				
+6,1				
+11,7				

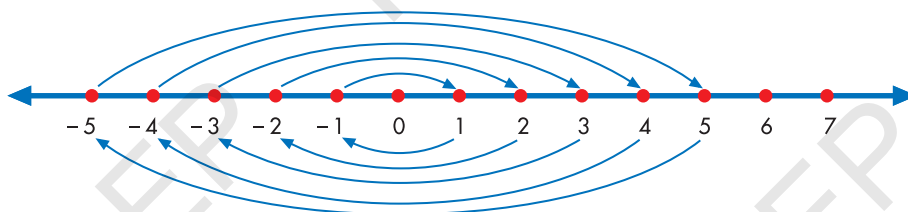
34. Observe como representar adições de inteiros na reta numerada:



Agora, represente na reta numerada e escreva a soma:

- a)  $(+3) + (+5)$       c)  $(+4) + (-7)$   
 b)  $(-4) + (-5)$       d)  $(-3) + (+8)$

35. Os pares de números ligados pelas linhas curvas chamam-se **números opostos**:



Responda:

- a) Qual é o oposto de +5?  
 b) Qual é o oposto de -5?  
 c) Qual é o oposto de -11?  
 d) As distâncias de dois números opostos ao número zero são iguais ou diferentes?  
 e) O oposto de um positivo pode ser positivo?

34. Desenhos dos alunos.

- a) +8;  
 b) -9;  
 c) -3;  
 d) +5.

35. a) -5;

- b) +5;  
 c) +11;  
 d) São iguais;  
 e) Não.

Explique que o oposto de um número **n** se representa por **-n**.

Assim,  $-(-3) = +3$   
 $-(+3) = -3$   
 $-(+2) = -2$   
 $-(-7) = +7$

36. a) +2,4;  
b) -5,32;  
c) +7,21;  
d) -1,29.

37.

	-2	+5	-7	+10	-5	+8	0	-100	+70
-6	-8	-1	-13	+4	-11	+2	-6	-106	+64
+13	+11	+18	+6	+23	+8	+21	+13	-87	+83
-18	-20	-13	-25	-8	-23	-10	-18	-118	+52
-2	-4	+3	-9	+8	-7	+6	-2	-102	+68
-10	-12	-5	-17	0	-15	-2	-10	-110	+60
+10	+8	+15	+3	+20	+5	+18	+10	-90	+80

36. Escreva os opostos dos números:

a) -2,4

c) -7,21

b) +5,32

d) +1,29

## Aprendendo em casa

37. Copie a **tabela** a seguir em seu caderno e **complete-a**, somando os pares de números:

+	-2	+5	-7	+10	-5	+8	0	-100	+70
-6	-8			+4					
+13									
-18									
-2									
-10									
+10									

38. Copie a **tabela** a seguir em seu caderno e complete-a, somando os pares de números. Considere cada positivo como saldo e cada negativo como débito:

38.

	-12,8	-8,7	+4,3	+6,9
+	-10,5	-19,2	-6,2	-3,6
-6,4	-19,2	-15,1	-2,1	+0,5
+8,3	-4,5	-0,4	12,6	15,2
+12,8	0	+4,1	17,1	19,7

+	-12,8	-8,7	+4,3	+6,9
-10,5				
-6,4			-2,1	
+8,3				
+12,8				

## Subtraindo números positivos e números negativos

### Explorando o que você já sabe

Você sabe que:

$$18 - 7 = 11 \text{ porque } 11 + 7 = 18$$

$$27 - 12 = 15 \text{ porque } 15 + 12 = 27$$

Agora, observe as adições a seguir e diga como completar as frases com a diferença correta:

Sabemos que	Logo, podemos dizer que
$(+5) + (+3) = +8$	◆ $(+8) - (+3)$ é igual a...
$(+9) + (-2) = +7$	◆ $(+7) - (-2)$ é igual a...
$(-8) + (+5) = -3$	◆ $(-3) - (+5)$ é igual a...
$(-6) + (-2) = -8$	◆ $(-8) - (-2)$ é igual a...

Ver, na página 11, observações sobre as atividades “Explorando o que você já sabe”.

#### ATIVIDADES ORAIS

- +5
- +9
- -8
- -6

### Aprendendo em sala de aula

Comparando com as adições, você viu que:

$$(+8) - (+3) = +5$$

$$(-3) - (+5) = -8$$

$$(+7) - (-2) = +9$$

$$(-8) - (-2) = -6$$

Agora, veja como obter esses resultados, transformando as subtrações dadas em adições e usando o que você já sabe: somar inteiros.

$$◆ (+8) - (+3) = (+8) + (-3) = +5$$

$$◆ (-3) - (+5) = (-3) + (-5) = -8$$

$$◆ (+7) - (-2) = (+7) + (+2) = +9$$

$$◆ (-8) - (-2) = (-8) + (+2) = -6$$

Você conclui que:

**PARA SUBTRAIR DOIS NÚMEROS INTEIROS, BASTA SOMAR AO PRIMEIRO NÚMERO O OPOSTO DO SEGUNDO NÚMERO.**

Solicite que os alunos escrevam, em seus cadernos, a frase em destaque no último quadro da página.

Em casa, os alunos devem anotar no caderno o segundo quadro em destaque do exercício 39.

**39.** Copie os exercícios a seguir e complete, em seu caderno, transformando as subtrações em adições do primeiro número com o oposto do segundo número:

a)  $(+25) - (+10) = ?$

c)  $(-25) - (+10) = ?$

b)  $(+25) - (-10) = ?$

d)  $(-25) - (-10) = ?$

39. a)  $(+25) + (-10) = +15$ ;  
b)  $(+25) + (+10) = +35$ ;  
c)  $(-25) + (-10) = -35$ ;  
d)  $(-25) + (+10) = -15$ .

40. Observe o quadro a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Subtrair é somar com o oposto			
subtração	adição	subtração	adição
$(+9) - (+3) = (+9) + (-3) = (+6)$		$(+8) - (-2) = (+8) + (+2) = (+10)$	
Números opostos		Números opostos	
subtração	a	subtração	e
$(-5) - (+5) = (-5) + (b) = (c)$		$(-4) - (-2) = (-4) + (f) = (g)$	
d		h	

40. (a) Adição;  
(b) -5;  
(c) -10;  
(d) Números opostos;  
(e) Adição;  
(f) +2;  
(g) -2;  
(h) Números opostos.

41. Discuta com seus colegas e decida se é verdadeiro ou falso: a soma de dois números opostos é igual a zero.

Observe um fato interessante:

Calcular a distância entre os dois pontos da reta numerada é equivalente a subtrair os números correspondentes (abscissa do ponto da direita menos abscissa do ponto da esquerda).

Veja:



A distância entre os pontos P e C é  $(+6) - (+2) = (+6) + (-2) = 4$ .

A distância entre os pontos Q e O é  $(+3) - (-2) = (+3) + (+2) = +5$ .

A distância entre H e N é  $(-4) - (-8) = (-4) + (+8) = +4$ .

41. Verdadeiro.

Em casa, os alunos devem anotar no caderno os quadros em destaque dos exercícios 40 e 41.

42. a)  $(+4) - (+1) = +3$ ;  
b)  $(+6) - (+1) = +5$ ;  
c)  $(+8) - (+1) = +7$ ;  
d)  $(+7) - (+2) = +5$ ;  
e)  $(+4) - (-2) = +6$ ;  
f)  $(+6) - (-2) = +8$ ;  
g)  $(+7) - (-3) = +10$ ;  
h)  $(+2) - (-7) = +9$ ;  
i)  $(-5) - (-8) = 3$ ;  
j)  $(-3) - (-8) = +5$ ;  
k)  $(-1) - (-7) = +6$ ;  
l)  $(-2) - (-7) = +5$ .

42. Observe a reta numerada da figura anterior e calcule as distâncias entre os pares de pontos a seguir, usando subtrações:

- a) A e G  
b) A e C  
c) A e J  
d) P e R  
e) Q e G  
f) Q e C

- g) F e R  
h) D e P  
i) H e B  
j) H e F  
k) D e M  
l) D e Q



## Aprendendo em casa

43. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente as letras:

Porque	Dizemos que
$(+13) + (+6) = (+19)$	$(+19) - (+6) = a$
$(+20) + (-13) = (+7)$	$(+7) - (-13) = b$
$(-12) + (+10) = (-2)$	$(-2) - (+10) = c$
$(-11) + (-13) = (-24)$	$(-24) - (-13) = d$

43. a) +13;  
b) +20;  
c) -12;  
d) -11.

44. Copie em seu caderno e calcule, somando o primeiro número com o oposto do segundo:

a)  $(+5) - (+2) = ?$   
b)  $(+3) - (+9) = ?$   
c)  $(-9) - (+4) = ?$   
d)  $(-3) - (+6) = ?$   
e)  $(+7) - (+4) = ?$

f)  $(+3) - (-5) = ?$   
g)  $(-9) - (-3) = ?$   
h)  $(-2) - (-7) = ?$   
i)  $(+8) - (-3) = ?$   
j)  $(-8) - (+1) = ?$

44. a) +3;  
b) -6;  
c) -13;  
d) -9;  
e) +3;  
f) +8;  
g) -6;  
h) +5;  
i) +11;  
j) -9.

45. Observe a tabela abaixo, que registra o saldo de gols de um campeonato esportivo.

Complete, em seu caderno, o que deve substituir corretamente cada letra:

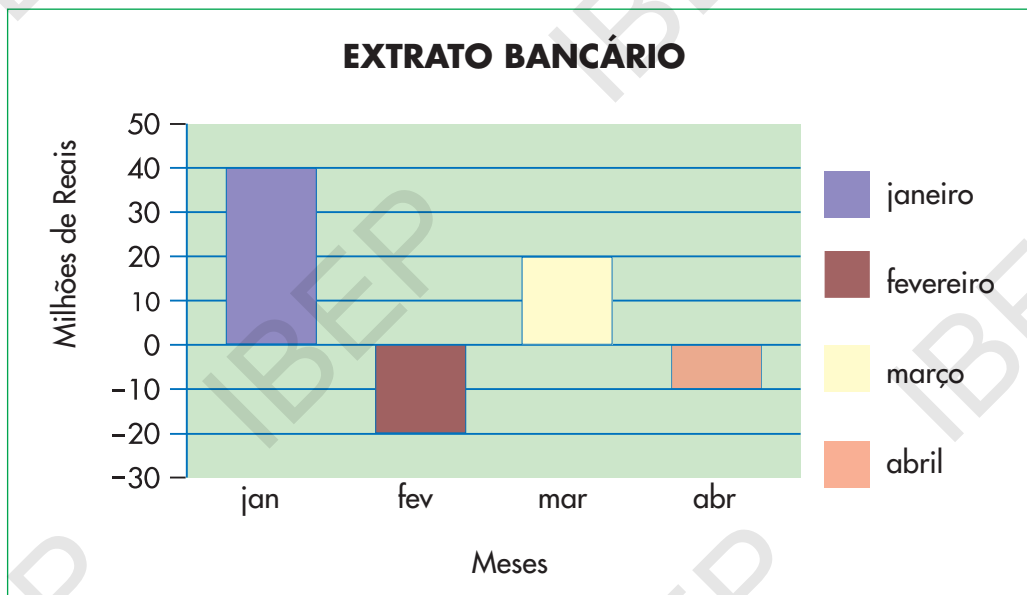
Times	Gols feitos	Gols sofridos	Saldo de gols	Representação matemática
Flamengo	20	5	15	$(+20) + (-5) = +15$
Cruzeiro	14	14	0	a
Palmeiras	12	8	4	b
Bahia	5	20	-15	c
Grêmio	8	12	-4	d

45. a)  $(+14) + (-14) = 0$ ;  
b)  $(+12) + (-8) = +4$ ;  
c)  $(+5) + (-20) = -15$ ;  
d)  $(+8) + (-12) = -4$ .

46. Veja o **extrato bancário** mensal do Sr. José representado em **um gráfico**. Os valores nele anotados representam milhares de reais. Assim, por exemplo, 20 representa um saldo de 20 mil reais e -10 representa um débito de 10 mil reais:

Explique para os alunos que a “fonte” é o órgão ou a instituição que forneceu os dados necessários para se fazer esse gráfico, ou até mesmo dados pessoais. Explique também que os gráficos têm outras partes que eles conhecerão ao resolver diversos exercícios, como títulos, legendas, grandezas, escalas, etc. Pouco a pouco, ao explorar os exercícios, destaque estas partes ou solicite aos alunos que as identifiquem.

Diga que diversos gráficos a seguir são caracterizados como tendo “fonte imaginária”, ou seja, os autores os criaram imaginando situações que podem ocorrer no dia a dia.



Responda:

46. a) Janeiro e março;  
b) Fevereiro e abril;  
c) 40 mil reais;  
d) Débito de 10 mil reais.

47. a) Saldos;  
b) Débitos;  
c) Se, ao final, restou saldo ou débito.

Caso seja necessário, explore outras atividades de cálculos de adições, subtrações e expressões no quadro.

- a) Inicialmente, com inteiros;  
b) Depois, com decimais.

Em casa, os alunos devem anotar, no caderno, o quadro em destaque do exercício 47.

Recomende ou explore a leitura de:

Atividades com jogos e com números. (p. 51-58)  
Marion Smoothey – Tradução de Sérgio Quadros  
Investigação Matemática  
Editora Scipione

47. Observe a expressão numérica a seguir e relacione números positivos com saldos e números negativos com débitos.

$$(+40) + (-20) + (+20) + (-10) =$$

$$= (+40) + (+20) + (-20) + (-10) =$$

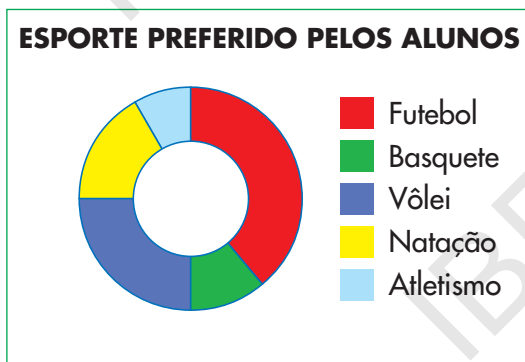
$$= (+60) + (-30) = (+30)$$

- a) A que correspondem as parcelas positivas dessa conta?  
b) A que correspondem as parcelas negativas dessa conta?  
c) A que corresponde a soma obtida?

## Calculando possibilidades e interpretando gráficos

### Explorando o que você já sabe

Observe o gráfico abaixo e responda, com base nele:

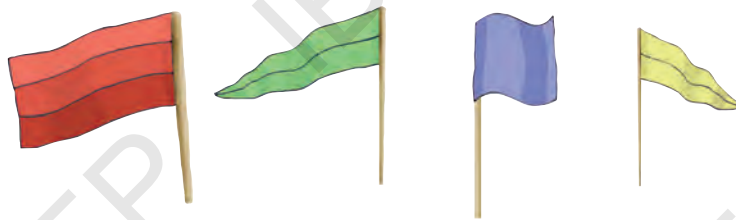


- Qual é o esporte de maior preferência dos alunos?
- Qual é o esporte de menor preferência?
- Na ordem de preferência, qual é o segundo esporte?

- Mauricinho é muito vaidoso. Ele gosta sempre de variar a maneira de se vestir. De quantas maneiras diferentes Mauricinho pode se vestir se tem 5 pares de sapato, 12 camisas e 7 calças?

### Aprendendo em sala de aula

48. Um técnico de futebol combinou um **código secreto** com seus jogadores, usando bandeiras. Para isso, usa bandeiras triangulares, quadradas ou retangulares. Cada uma pode ser azul, verde, vermelha ou amarela. Cada bandeira, de uma forma e de uma cor diferente, significa uma jogada treinada que ele quer que o time faça durante o jogo.



Júlia Bianchi, 2006

- a) Se ele usar apenas bandeiras triangulares, quantas mensagens diferentes poderá transmitir?
- b) Quantas mensagens diferentes poderá transmitir, ao todo?

49. Usando os mesmo dados do exercício anterior, suponha que o técnico tenha combinado, com os jogadores, que trocar uma bandeira da mão direita para a esquerda significa outra mensagem. **Quantas mensagens diferentes** ele poderá transmitir, ao todo?

Ver, na página 11, observa es sobre as atividades "Explorando o que você já sabe".

#### ATIVIDADES ORAIS

- Futebol.
- Atletismo.
- Vôlei.

Esclareça que a fonte   imaginária porque os autores imaginaram os dados (não se basearam em fontes conhecidas).

$$5 \times 12 \times 7 = 420.$$

Relembre como utilizar a árvore de possibilidades para resolver o problema do Mauricinho e vários outros semelhantes.

Particularize o problema do Mauricinho e vários outros a seguir, com dados numéricos menores para facilitar o uso da árvore de possibilidades. Por exemplo, proponha outro personagem que tem 3 pares de sapatos, 2 camisas e 3 calças, desenhando no quadro a árvore de possibilidades.

48. a) 4;  
b) 12.

**Professor(a):** Neste capítulo, usamos, em alguns exercícios, o **PRINCÍPIO MULTIPLICATIVO** que pode ser enunciado assim: "se uma decisão A pode ser tomada de m maneiras diferentes e, uma vez tomada a decisão A, uma decisão B pode ser tomada de n maneiras diferentes, então o número de maneiras diferentes de se tomarem as decisões A e B sucessivamente é dado pelo produto m.n.

49. 24.

**Professor(a):** Explore também situações diferentes, como a que segue: Em uma lanchonete, há 5 sabores de refrigerantes e 3 sabores de salgados. Suponha que uma pessoa só vai escolher um refrigerante **OU** um salgado. Quantos são os possíveis pedidos que essa pessoa pode fazer?

R) 8 pedidos diferentes.

Chame a atenção dos alunos para a diferença entre **ou** e **e**. O mesmo problema enunciado com **e** no lugar do **ou** daria 15 pedidos diferentes.

50. Sugira aos alunos que, usando as iniciais dos nomes das cidades, B, F e R, façam desenhos representando todos os possíveis caminhos entre cada par de cidades, facilitando assim, a contagem pretendida.

- a) 9;  
b) 6.

51. a) 5;  
b) 20.

52. a) 618;  
b) 47 (36 nas centenas: 301, 302,...,336, mais 11 nas salas: 03, 13, 23, 30, 31, 32, 33, 34, 35 e 36);  
c)  $47 + 5 \times 11 = 102$

53. a) 10;  
b) 13;  
c) 9;  
d) 7.

50. As cidades de Berimbau, Foguete e Rojão são ligadas pelos seguintes meios de transporte:

Entre Berimbau e Foguete: barco, trem, ônibus.

Entre Foguete e Rojão: ônibus, trem e avião.

Entre Rojão e Berimbau: ônibus ou avião.

- a) De quantos modos diferentes é possível viajar de Berimbau para Rojão, passando por Foguete?  
b) De quantos modos é possível viajar de Rojão para Foguete, passando por Berimbau?

51. Quantos códigos diferentes de duas letras podem ser formados escrevendo, como primeira letra, uma das 4 consoantes **b, d, m e p** e, como segunda letra, uma das 5 vogais:

- a) Começando com uma consoante fixa e terminando com qualquer uma das vogais?  
b) Começando com qualquer consoante e terminando com qualquer vogal?

52. As salas de um edifício são numeradas com placas nas quais o algarismo das centenas corresponde ao andar no qual a sala se situa. O número correspondente a cada sala é formado pelos algarismos das dezenas e unidades, sendo que a numeração das salas começa com o algarismo 1 nas unidades. Por exemplo, a primeira sala do quarto andar tem número 401, e 427 corresponde à sala 27 do quarto andar.

- a) Escreva o número correspondente à sala 18 do sexto andar.  
b) Se cada andar tem 36 salas, quantas vezes o algarismo 3 foi escrito ao serem feitas todas as placas das salas contidas no terceiro andar?  
c) Se o edifício tem 6 andares, quantas vezes aparece o algarismo 3 na numeração de todas as suas salas?

53. Um comerciante anotou quantas caixas de frutas comprou na segunda-feira. Veja, no quadro, como ele fez as anotações:

Fruta	Laranja	Goiaba	Banana	Pera
Contagem				
Frequência	a	b	c	d

Escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente cada uma das letras da tabela feita pelo comerciante. (Cada tracinho representa uma caixa.)

54. Responda, com base na **tabela** do exercício anterior:

- Qual foi o tipo de fruta que o comerciante comprou em maior quantidade de caixas?
- Quantas caixas de frutas ele comprou ao todo?

55. Faça, em seu caderno, uma **tabela de frequência** como a do exercício 53 para registrar as notas de Matemática de 40 alunos. Registre que: 5 alunos tiraram nota 3, 4 alunos tiraram nota 4, 11 alunos tiraram nota 5, 9 alunos tiraram nota 6, 4 alunos tiraram nota 7 e 7 tiraram nota 8.

56. No **quadro** a seguir, você vê as notas que os 39 alunos da turma B tiraram na última prova de Português:

2	5	3	7	5	1	6	8	10	9	4	3	5
6	5	4	5	2	7	8	4	9	5	5	6	10
3	2	8	6	2	6	8	7	8	4	10	6	10

- Faça a **tabela de frequência** correspondente.
- Quantos alunos tiraram notas abaixo de 6?
- Quantos alunos tiraram notas acima de 6?

57. Um jornal fez uma **pesquisa sobre a preferência dos eleitores** por certo candidato a prefeito da cidade de Verdadópolis. Foram entrevistados eleitores de ambos os sexos e **registrados os dados** a seguir:

De um total de 800 homens entrevistados, 450 foram favoráveis, 100 não tinham opinião e os demais foram contrários. Das 1 000 mulheres entrevistadas, 200 não tinham opinião, 500 foram favoráveis e as demais foram contrárias.

Copie a tabela a seguir, em seu caderno, e organize os dados da pesquisa.

	Homens	Mulheres	Total
Favoráveis	450	500	
Não favoráveis			
Sem opinião	100	200	
Total	800	1 000	

Discuta com seus colegas, responda e justifique as respostas:

Se, para ganhar a eleição, o candidato tem que receber mais da metade dos votos dos eleitores, pelo dados da pesquisa ele ganharia a eleição:

- Somente com os votos dos homens, se todos os homens votassem nele?
- Somente com os votos das mulheres, se todas as mulheres votassem nele?
- Com os votos de homens e mulheres registrados na pesquisa?

58. No exercício anterior, proporcionalmente, **o candidato é mais preferido pelos homens ou pelas mulheres?**

- Goiaba;
- 39 caixas.

55.

	3	4	5	6	7	8
Notas	3	4	5	6	7	8
Contagem	5	4	11	9	4	7
Frequência	5	4	11	9	4	7

56. a)

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Notas	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
Contagem	1	4	3	4	7	6	3	5	2	4
Frequência	1	4	3	4	7	6	3	5	2	4

b) 19; c) 14.

Inicialmente, calcule o total de homens não favoráveis (250). Depois, de mulheres não favoráveis (300). Estes valores permitirão completar a coluna de totais. Totais: favoráveis = 950; não favoráveis = 550; sem opinião = 300; total = 1 800.

- Não, porque 800 é menor que a metade de 1 800;
- Sim, porque 1 000 é maior que a metade de 1 800;
- Sim, porque teria 950 votos favoráveis em um total de 1 800 votos, ou seja, mais da metade dos votos dos eleitores.

58. Pelos homens (ver observação na página seguinte).

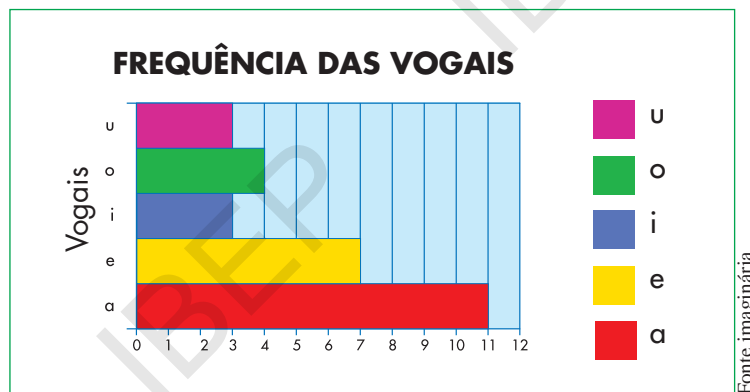


59. O professor de Português da turma **B** pediu que os alunos lessem um texto e anotassem, em uma tabela, quantas vezes cada vogal aparecia nesse texto.

Observação:

Proporcionalmente, entre os homens ele teria mais de 56% dos votos e, entre as mulheres, exatamente 50%. Portanto, proporcionalmente, teria mais votos de homens que de mulheres.

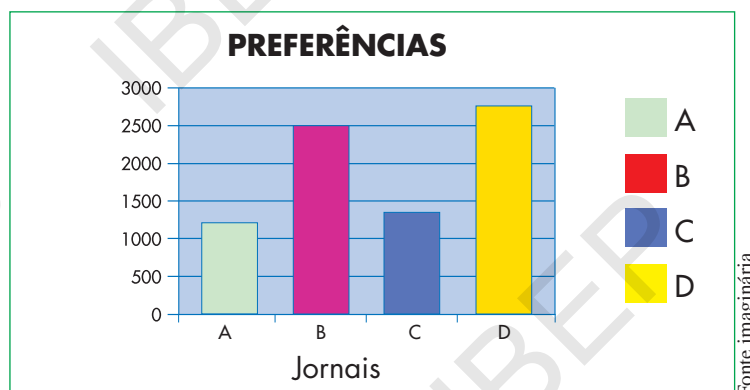
Depois de anotar a **frequência com que cada vogal apareceu em todo o texto**, a turma elaborou o gráfico a seguir:



Responda, com base no **gráfico**:

59. a) u, i;  
b) 3 vezes;  
c) a;  
d) 11;  
e) 28;  
f) 25%;  
g) e, o.
- a) Quais foram as duas vogais que tiveram a mesma frequência no texto?  
b) Quantas vezes essas vogais apareceram no texto?  
c) Qual foi a vogal de maior frequência?  
d) Quantas vezes essa vogal apareceu no texto?  
e) Qual foi a soma das frequências de todas as vogais?  
f) Em relação a essa soma, qual foi a porcentagem de frequência da vogal e?  
g) A frequência da vogal a é a soma da frequência de duas outras vogais. Quais?

60. Na cidade de Noticiópolis, foi feita uma **pesquisa sobre a quantidade de assinantes de quatro jornais** (A, B, C e D). O resultado foi registrado no gráfico a seguir:



60. a) Jornal D;  
b) Jornal B;  
c) A, C.

Responda:

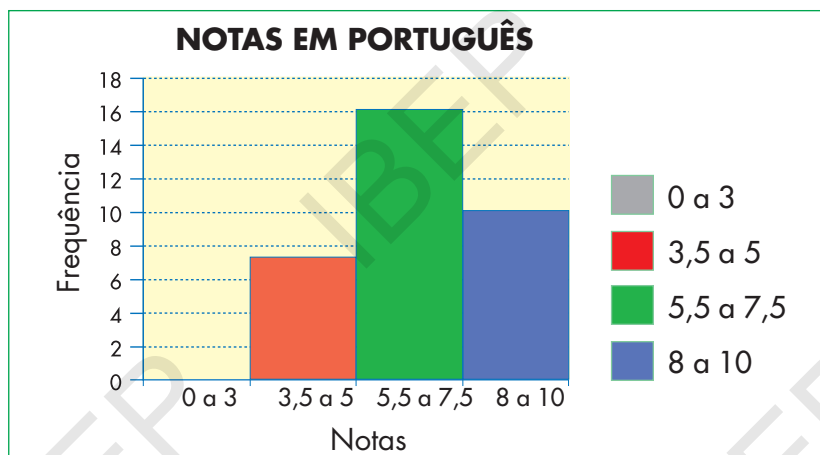
- a) Qual é o jornal que tem maior número de assinantes?  
b) Qual é o jornal que tem exatamente 2 500 assinantes?  
c) Dois jornais têm mais de 1 000 e menos de 1500 assinantes. Quais?

61. Na última prova de Português, foram registradas as seguintes notas:

- ◆ Sete alunos tiraram notas de 3,5 a 5.
- ◆ Dezesesseis alunos tiraram notas de 5,5 a 7,5.
- ◆ Dez alunos tiraram notas de 8 a 10.
- ◆ 2 alunos tiraram nota 1.

O professor pediu a Marcelo que fizesse um gráfico com base nesses dados.

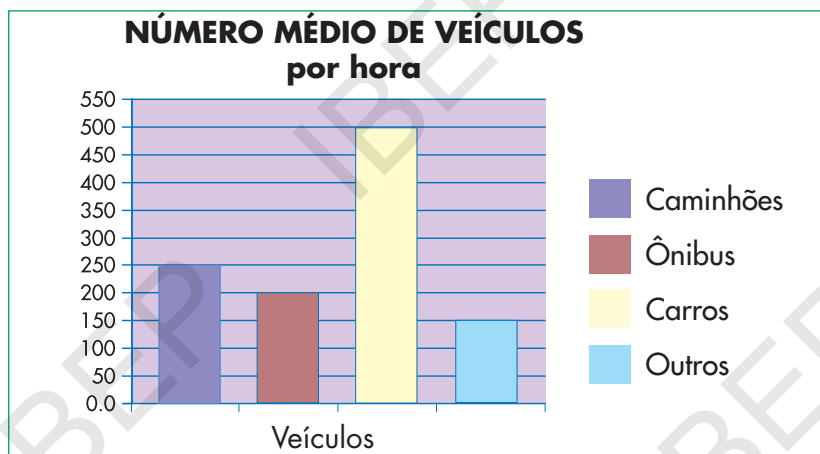
Marcelo entregou o gráfico a seguir para o professor:



Fonte imaginária

- a) O que está errado no gráfico?  
b) É possível consertar o erro facilmente? Diga como.

62. Os técnicos especializados em organizar o trânsito de uma cidade fizeram uma pesquisa da quantidade média de veículos que passam por hora em um de seus viadutos. Eles publicaram o gráfico a seguir com os dados colhidos:



Fonte imaginária

- a) Qual é o tipo de veículo que passa em maior quantidade média pelo viaduto?  
b) Em média, por hora, passam 200 veículos de determinado tipo por esse viaduto. Que tipo de veículo é esse?  
c) Cláudio disse que, pelo gráfico, é possível dizer que passam, em média, mais de 180 motos por hora nesse viaduto. Você concorda com ele? Justifique sua resposta.

Observe que as notas são registradas em intervalos não adjacentes, isto é, por exemplo, não foram registradas notas entre 3 e 3,5. Este é o motivo de estarem lado a lado as colunas correspondentes. Entretanto, é conveniente destacar para os alunos este fato, pois ele difere da representação dos números na reta numerada.

61. a) Marcelo não indicou no gráfico o número de alunos que tiveram nota 1;  
b) Colorindo no gráfico, com a cor especificada na legenda, os dois alunos que tiraram nota 1.

Promova uma discussão entre os alunos sobre a finalidade de uma pesquisa como a descrita no exercício 62.

62. a) Carro;  
b) Ônibus;  
c) Não. Os outros veículos correspondem a 150.

Este é um dos motivos por que não se pode dizer que passam mais de 180 motos por hora nesse viaduto. Pergunte aos alunos se, então, se poderia dizer que passam 150 motos por hora, em média, no viaduto. (R: Também não se pode garantir isto, pois esta medição conta todos os veículos que não são carros, ônibus ou caminhões, e pode incluir, entre outros, camionetes.)

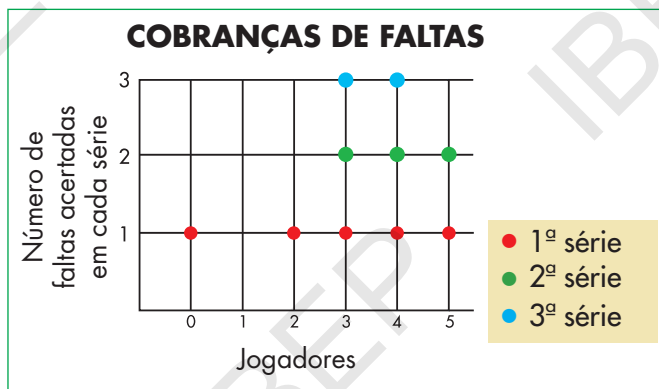
63. a) Jogador 4;  
b) Jogador 1;  
c) Os jogadores 0 e 2;  
d) Jogador 5;  
e) 17.

Use a resposta (e) para o cálculo da porcentagem de acertos.

17 acertos em 54 cobranças representam, aproximadamente, 31% de acertos. Destaque o cálculo do total de cobranças: 6 jogadores, 3 séries, 3 faltas. Logo,  $6 \times 3 \times 3 = 54$  cobranças.

**Professor(a):** Se julgar conveniente, por analogia com o gráfico do exercício 63, explore a localização de pontos no plano, usando coordenadas cartesianas.

63. Um técnico de futebol treinou seis de seus jogadores para cobrar faltas. O objetivo era acertar uma placa colocada em um dos ângulos da trave. Cada jogador, com camisas numeradas de 0 a 5, cobrou 3 séries de 3 faltas.



O auxiliar técnico anotou os resultados no gráfico ao lado.

Por exemplo, o jogador 3 acertou uma vez em uma das séries, duas vezes em outra e três vezes na outra.

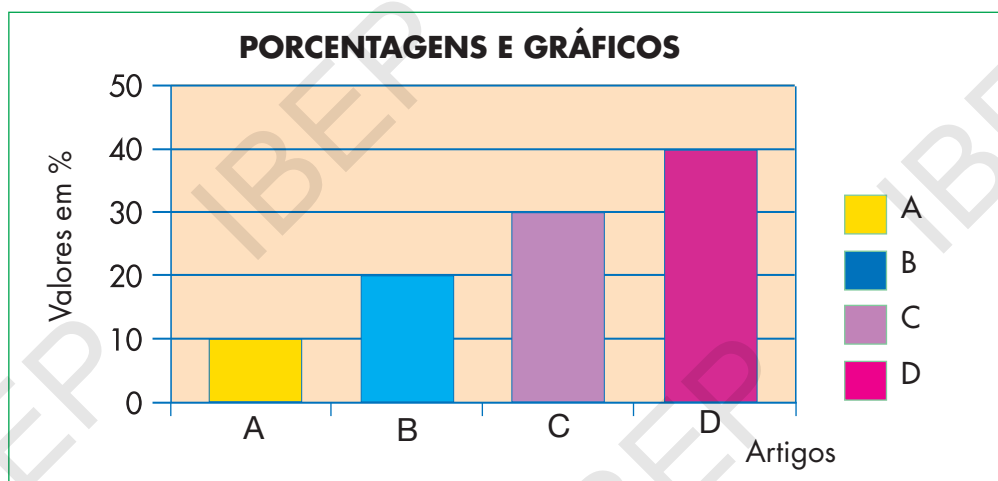
Responda:

- a) Qual foi o jogador que teve o mesmo rendimento que o jogador 3?  
b) Qual foi o jogador de pior rendimento?  
c) Quais jogadores acertaram apenas uma das nove faltas que cobraram?  
d) Qual foi o jogador que acertou exatamente 3 das nove faltas que cobrou?  
e) Qual foi o total de faltas acertadas?

64. a) 40%;  
b) O artigo C.

O exercício 64 tem por objetivo fazer com que os alunos entendam a função das legendas nos gráficos.

64. Você sabe que  $10\% = 0,10 = \frac{10}{100}$ . O gráfico a seguir corresponde a aumentos percentuais em um mesmo mês, sobre preços de artigos



representados pelas letras **A**, **B**, **C** e **D**. Responda:

- a) Qual o aumento percentual que teve o artigo D?  
b) Qual artigo teve aumento percentual de 30%?

65. Calcule as seguintes porcentagens:

- a) 30% de 200    b) 10% de 200    c) 20% de 200    d) 40% de 200

65. a) 60;  
b) 20;  
c) 40;  
d) 80.

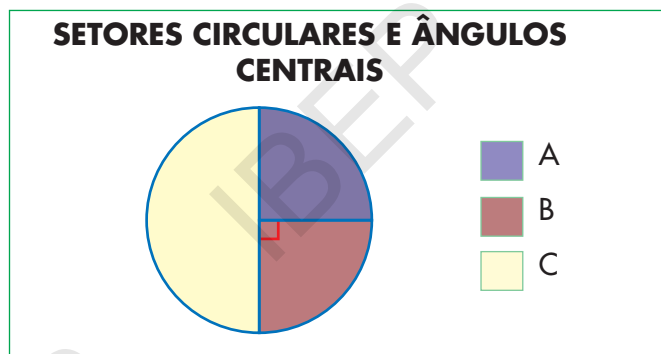
260

66. Imagine que o gráfico do exercício 64 representa a preferência de 200 pessoas por quatro sabores diferentes de sucos: de manga, de laranja, de abacaxi e de pêssego.

- Se 20 pessoas preferem o suco de manga, qual é a coluna que representa essa quantidade de pessoas?
- Se 80 pessoas preferem o suco de laranja, qual é a coluna que representa essa quantidade de pessoas?

66. a) A;  
b) D.

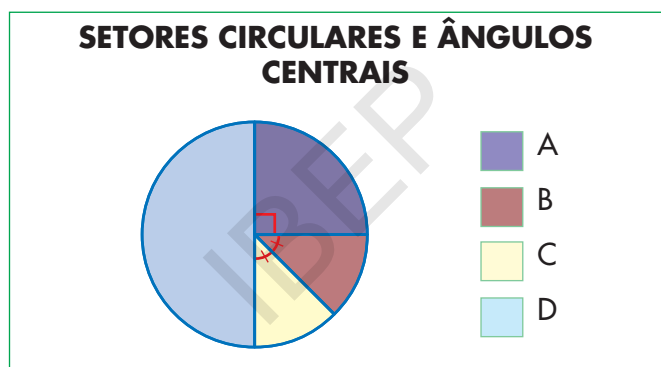
67. Na figura a seguir, você vê três setores circulares de uma circunferência.



67. a)  $90^\circ$ ;  
b)  $180^\circ$ ;  
c)  $360^\circ$ .

- Quanto medem, em graus, os ângulos centrais correspondentes aos setores A e B?
- Quanto mede, em graus, o ângulo central correspondente ao setor C?
- Qual é a soma, em graus, das medidas desses três ângulos centrais?

68. Observe outros setores circulares:



68. a)  $90^\circ$ ;  
b)  $45^\circ$ ;  
c)  $180^\circ$ ;  
d)  $360^\circ$ .

- Quanto mede, em graus, o ângulo central correspondente ao setor A?
- Quanto medem, em graus, os ângulos centrais correspondentes aos setores B e C, se tais medidas são iguais?
- Quanto mede, em graus, o ângulo central correspondente ao setor D?
- Quanto mede, em graus, a soma das medidas dos quatro ângulos centrais?

69. O ângulo central correspondente a uma circunferência mede  $360^\circ$ . Use esse fato para responder:

- A qual fração da circunferência corresponde um ângulo central de  $90^\circ$ ?
- A qual fração da circunferência corresponde um ângulo central de  $36^\circ$ ?

69. a)  $1/4$ ;  
b)  $1/10$ .

Dê, como atividade que antecede o exercício a seguir, o cálculo de  $1/4$  como quociente de 1 por 4, usando ou divisão aproximada, ou, de preferência, a calculadora.

70. a) 90°;  
b) 36°.

70. Você sabe que  $\frac{1}{4} = \frac{25}{100} = 0,25 = 25\%$  e que  $\frac{1}{10} = \frac{10}{100} = 0,10 = 10\%$ .

Agora, responda:

71. a) R\$ 480,00;  
b) R\$ 400,00;  
c) R\$ 400,00.

Explore a soma das 4 porcentagens.

72. a) 108°;  
b) 108°;  
c) 72°;  
d) 72°.

73. Maristela está correta: cada ângulo central citado representa 25% de 360°, que correspondem a 90°.

Explore o exercício 74 propondo aos alunos que pesquisem sobre o que seja um orçamento doméstico e planejamento financeiro.

74. a) 72°  $\Rightarrow$  20%;  
b) 72°  $\Rightarrow$  20%;  
c) 36°  $\Rightarrow$  10%;  
d) 108°  $\Rightarrow$  30%;  
e) 72°  $\Rightarrow$  20%.

Explore a soma das cinco porcentagens.

Explore mais os exercícios listados a seguir, fazendo o que sugerimos:

Ex.: 56 – Use os dados da tabela de frequência do item (a) e faça o gráfico de colunas correspondente.

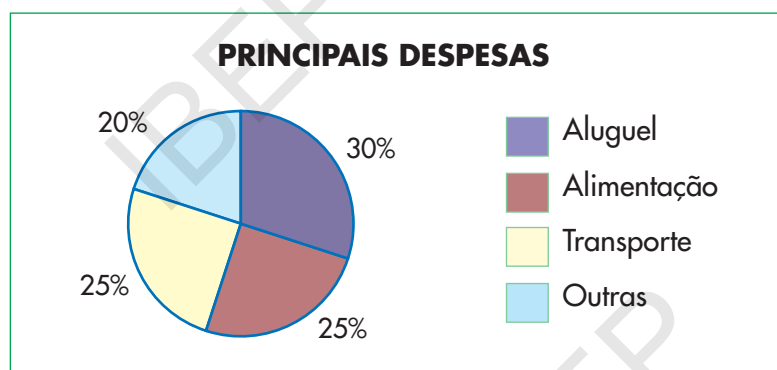
Ex.: 59 – Faça o gráfico de colunas correspondente.

Ex.: 62 – (A) Calcule as razões entre os seguintes pares de quantidades de veículos, pela ordem: 1ª) quantidade de ônibus/quantidade de caminhões; 2ª) quantidade de ônibus/quantidade de carros. (B) Simplifique as razões obtidas.

Ex.: 71 – Faça o gráfico de colunas correspondente.

- a) Qual a medida, em graus, de um ângulo central que corresponde a 25% da circunferência?  
b) E a medida de um ângulo central que corresponde a 10% da circunferência?
71. Anderson anotou as principais despesas que teve no mês passado, com as quais gastou, ao todo, R\$ 1 600,00. Se o gráfico a seguir representa essas despesas, responda quanto Anderson gastou:

- a) Com o aluguel. b) Com o transporte. c) Com alimentação.



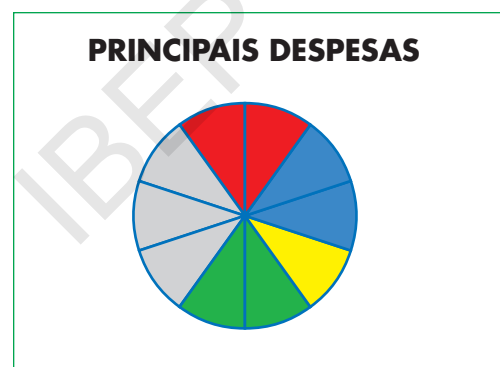
72. Responda:

- a) A quantos graus equivalem 30% de 360 graus?  
b) Quantos graus mede o setor que representa o aluguel no gráfico anterior?  
c) A quantos graus correspondem 20% de 360 graus?  
d) Quantos graus mede o setor que representa as outras despesas no gráfico anterior?

73. Maristela disse que os ângulos centrais correspondentes à alimentação e ao transporte no gráfico anterior medem, cada um, 90 graus. Faça cálculos usando porcentagens de 360 graus para comprovar se o que ela disse é correto ou não.

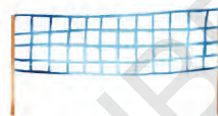
74. No gráfico a seguir, você vê dez setores circulares de mesma medida. Escreva, em seu caderno, o que deve substituir corretamente cada letra da tabela ao lado do gráfico.

Despesa com	Cor	%
Água		a
Telefone		b
Luz		c
Aluguel		d
Alimentação		e





## Aprendendo em casa



Júlia Bianchi, 2006

Faça breve abordagem oral sobre as atividades do “Aprendendo em casa” para verificar se os alunos estão aptos a resolvê-las.

75. Na turma **A**, realizou-se uma **pesquisa** com a seguinte pergunta: **Qual é o seu esporte preferido**: futebol, basquete ou voleibol?

Veja os resultados na tabela a seguir:

Esporte		Futebol	Basquete	Voleibol
Preferências	Alunas	4	2	19
	Alunos	8	4	3

75. a) 40;  
b) Futebol;  
c) Voleibol;  
d) Voleibol.

- a) Quantos estudantes foram entrevistados?  
b) Qual é o esporte de maior preferência dos alunos?  
c) Qual é o esporte de maior preferência das alunas?  
d) Qual é o esporte de maior preferência dos estudantes?

76. Em um **gráfico de colunas** representando porcentagens, a coluna que representa 100% tem a altura medindo 10 cm. Responda:

76. a) 4 cm;  
b) 7 cm;  
c) 30%.

- a) Qual é a altura da coluna que representa 40%?  
b) Qual é a altura da coluna que representa 70%?  
c) Quantos por cento são representados por uma coluna cuja altura mede 3 cm?

77. Carlitos fez um **gráfico de colunas** em um papel quadriculado. Para representar 100%, ele utilizou uma coluna com 20 quadradinhos. Quantos quadradinhos de altura ele usou para cada uma das colunas a seguir?

77. a) 10;  
b) 5;  
c) 3;  
d) 12.

- a) Coluna representando 50%.  
b) Coluna representando 25%.  
c) Coluna representando 15%.  
d) Coluna representando 60%.

78. Use papel quadriculado e **faça um gráfico** como o do Carlitos.

78. Desenho do aluno.

263

79.

Notas	3	4	5	6	7	8	9	10
Contagem	6	6	2	7	3	6	3	3
Total	6	6	2	7	3	6	3	3

79. No quadro a seguir, você vê as notas que os alunos da turma A tiraram na última prova de Geografia:

8	4	3	5	8	3	6	6	10	4	7	6
4	9	8	10	6	3	6	8	4	8	9	6
7	7	4	3	6	8	4	3	5	9	10	3

- Faça a tabela de frequência correspondente.
- Quantos alunos tiraram notas abaixo de 6?
- Quantos alunos tiraram notas acima de 6?
- Quantos alunos fizeram prova?

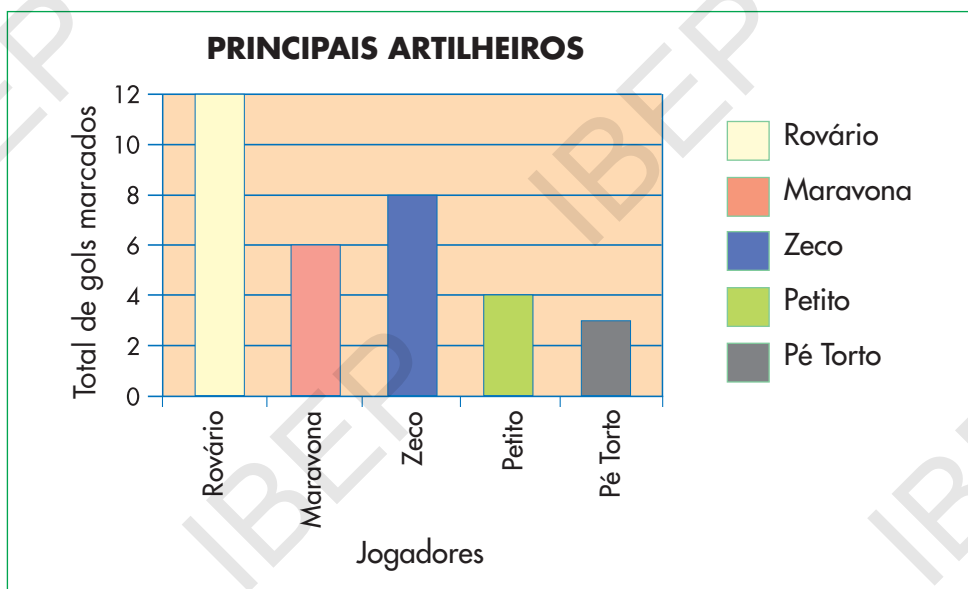
80. O jornal “Futebol de Hoje” apresentou o gráfico a seguir, do total de gols marcados por alguns jogadores em 12 jogos disputados em um campeonato.

b) 14; c) 15; d) 36.

**Professor(a):** Se julgar conveniente, destaque para os alunos que, em certos gráficos, as colunas não necessariamente devem aparecer na ordem na qual estão sendo apresentadas (exercícios 62, 80 e outros). Já em outros, é importante a sequência na qual aparecem (exercício 46 e 61, por exemplo).

80. a) Rovário;  
b) Pé Torto;  
c) 1/4;  
d) 25%;  
e) Rovário;  
f) 33;  
g) 33%.

Em relação ao item (e) do exercício 80, comente com os alunos que se pede a frequência em relação ao número de jogos, no seguinte sentido: considera-se que um jogador tem um índice de 100% de aproveitamento se marcou número de gols igual ao número de partidas. Com este conceito em mente, pergunte aos alunos qual seria o rendimento de Rovário se houvesse marcado 14 gols? Comente ainda que a expressão “100%” de aproveitamento é mais usada no sentido de que um jogador marcou pelo menos um gol em cada partida, ou em cada tentativa de chute ao gol.



- Qual é o jogador com maior frequência de gols?
- E o de menor frequência?
- Qual é a razão entre o número de gols feitos por Pé Torto e o número de jogos disputados?
- Qual é a porcentagem do total de gols marcados pelo jogador Pé Torto?
- Qual é o jogador cuja frequência de gols é de 100%?
- Quantos gols foram marcados, ao todo, pelos jogadores?
- Escreva em “por cento” a razão aproximada entre o número de gols marcados por Petito e o total de jogos.

81. Copie a tabela a seguir e registre nela os dados do gráfico do exercício anterior. Complete, também, as colunas de razões e porcentagens:

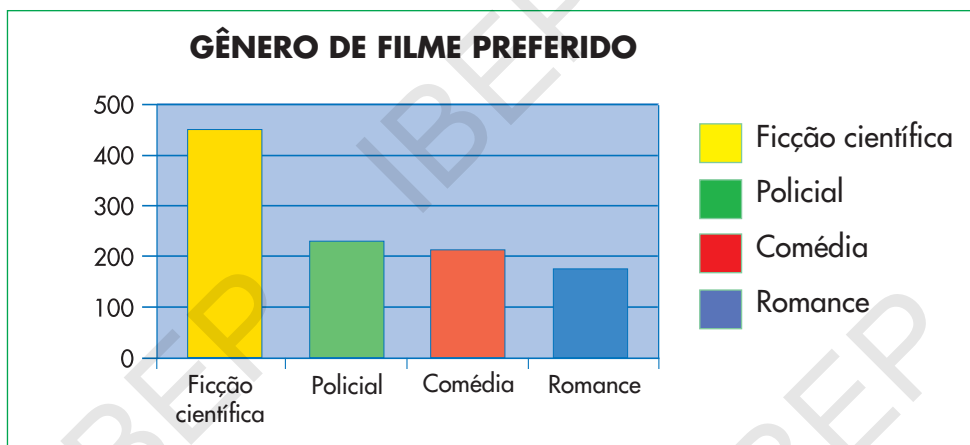
Jogador	Total de gols em 12 jogos	Razão entre o número de gols marcados e o de jogos	Razão aproximada escrita na forma de porcentagem
Rovário			
Maravona			
Zeco			
Petito			
Pé Torto			

81.

Jogador	Total de gols em 12 jogos	Razão entre o número de gols marcados e o de jogos	Razão escrita na forma de porcentagem
Rovário	12	1:1	100 %
Maravona	6	1:2	50 %
Zeco	8	2:3	67 %
Petito	4	1:3	33 %
Pé Torto	3	1:4	25 %

## Explorando o que você aprendeu e aprendendo mais

82. A rede de televisão “TV Curiosa” encomendou uma **pesquisa sobre a preferência dos telespectadores** com relação a 4 gêneros de filmes. O resultado foi apresentado no gráfico a seguir, do qual constam os gêneros de filmes pesquisados e o número de entrevistados que preferem cada um desses gêneros.



82. a) Ficção científica;  
b) Romance;  
c) Policial e comédia.

- a) Qual foi o gênero de filmes de maior preferência entre os pesquisados?  
b) Qual foi o gênero de menor preferência?  
c) Dois gêneros de filmes tiveram a preferência indicada entre 200 e 300 entrevistados. Quais gêneros?

83. a) 155/1000;  
b) 31/200;  
c) 0,155;  
d) 15,5%.

83. O gráfico da pesquisa anterior foi baseado na seguinte **tabela de dados**:

Filmes	Ficção científica	Policia	Comédia	Romance	Soma
<b>Preferência</b>	420	215	210	155	1 000

- a) Dê a razão entre o número de pessoas que preferem romance e o total de pessoas entrevistadas.  
b) Simplifique a razão do item (a), dividindo seus termos por 5.  
c) Escreva a razão do item (a) na forma de número decimal.  
d) Qual porcentagem do total de entrevistados manifestou preferir os filmes do gênero “romance”?

84. a) 42%;  
b) 21,5%;  
c) 21%.

84. Use os quatro passos do exercício anterior para calcular a porcentagem de preferência entre os entrevistados por filmes do gênero:

- a) Ficção científica.  
b) Policial.  
c) Comédia.

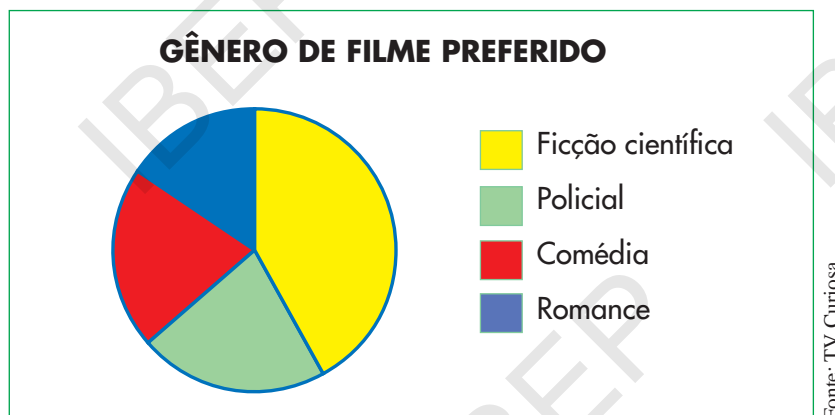
85. a) 54°;  
b) 72°;  
c) 90°;  
d) 144°.

85. Calcule os ângulos que correspondem às seguintes porcentagens do ângulo de 360°:

- a) 15%  
b) 20%  
c) 25%  
d) 40%

86. a) 151°;  
b) 77°;  
c) 76°;  
d) 56°.

86. O resultado da **pesquisa de preferência por gêneros de filmes** também pode ser apresentado na forma de gráfico de setores, como o gráfico a seguir:



Responda, com base nos exercícios anteriores, quanto mede, em graus, aproximadamente, o ângulo de cada setor circular correspondente à preferência por filmes do gênero:

- a) Ficção científica.  
b) Policial.  
c) Comédia.  
d) Romance.

87. Em um jogo de futebol, os torcedores utilizaram as seguintes partes do estádio:

Parte **A** – Cadeiras numeradas superiores.

Parte **B** – Cadeiras numeradas inferiores.

Parte **C** – Arquibancadas.

A presença de torcedores em cada uma dessas partes do estádio foi registrada no gráfico a seguir, com essas partes representadas por setores circulares identificados pelas mesmas letras maiúsculas. Os ângulos centrais correspondentes medem, respectivamente,  $45^\circ$ ,  $135^\circ$  e  $180^\circ$ .



Responda e justifique:

- a) Qual a fração do total de torcedores que ocuparam a parte das cadeiras numeradas inferiores?
- b) Qual a fração do total de torcedores que ocuparam a parte das cadeiras numeradas superiores?
- c) Se compareceram a esse jogo 39 600 torcedores, quantos ocuparam as arquibancadas?
- d) Qual porcentagem do total de torcedores representa o grupo que ocupou as cadeiras numeradas superiores?

87. a)  $\frac{3}{8}$ ;  
b)  $\frac{1}{8}$ ;  
c) 19 800 torcedores;  
d) 12,5%.

**Professor(a):** Explore situações que levem o aluno à compreensão do significado da média aritmética como tendência de uma pesquisa. Exemplificando: (a) somando as notas dos trabalhos de um aluno em determinado período e dividindo a soma pelo total de parcelas, obtém-se um valor que representa o aproveitamento médio do mesmo no período; (b) procedimento análogo com relação a consumo médio de água ou energia de determinada residência durante um intervalo de alguns meses. Observar que, se entre os dados houver um valor muito discrepante, (por exemplo: 2, 3, 5, 4, 9, 56), a média aritmética não é a melhor medida de tendência (e que existem outras chamadas moda e mediana que serão estudadas futuramente). Observar também que, ao calcular a média aritmética de um conjunto de valores com repetições (como 3, 3, 3, 4, 4, 5, 5, 5, 6 – média = 4,3), se diz que 4,3 é a média aritmética de 3, 4, 5 e 6 com frequências 3, 2, 4 e 1, respectivamente. No momento, restrinja-se a focar apenas estes fatos. Estudos mais completos serão feitos posteriormente.



## Seção olímpica

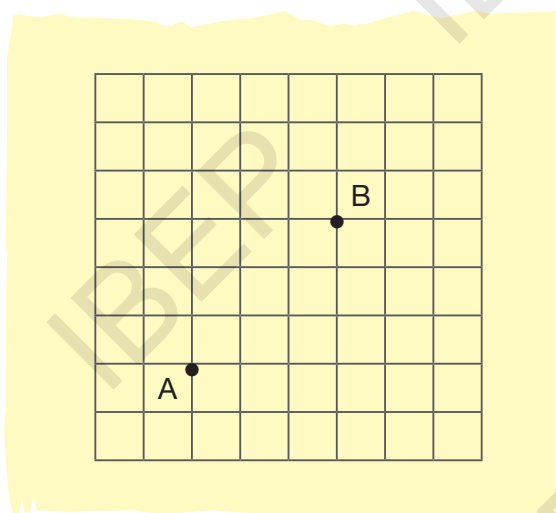
1. 5. O segmento AB pode ser um dos lados do retângulo. Há 4 retângulos que podem ser construídos com essa propriedade. Se o segmento AB for uma diagonal do retângulo, podemos construir apenas um retângulo, totalizando 5 possibilidades.

2. Para cada uma das camisas preta e azul, é possível escolher três camisas de cores diferentes, num total de  $3 \times 3 = 9$  possibilidades; notamos que estar com uma camisa preta de mangas curtas é diferente de estar com uma de mangas compridas. Para as camisas cinza e brancas, podemos escolher qualquer calça, num total de  $2 \times 4 = 8$  possibilidades. Ao final, temos  $9 + 8 = 17$  possibilidades.

3. 14. A pessoa separa 40 garrafas vazias e as troca por 10 garrafas de 1 litro cheias de leite. Esvaziadas as 10 garrafas, ela pode juntá-las com as 3 vazias que restaram e trocá-las por 3 garrafas cheias, sobrando ainda 1 garrafa vazia. Esvaziando as 3 cheias e juntando com a garrafa vazia, ainda se pode obter em troca mais uma garrafa cheia. Ao todo se podem obter, por sucessivas trocas,  $10 + 3 + 1 = 14$  garrafas cheias de leite, todas a partir das 43 vazias.

4. Letra E. As três bolas retiradas são brancas ou vermelhas. Como há somente duas bolas brancas, haverá pelo menos uma vermelha entre as retiradas.

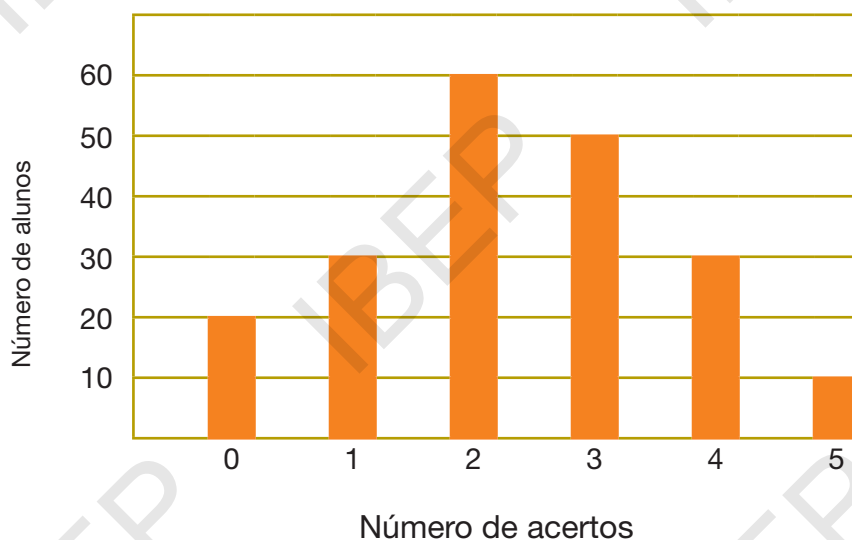
1. (OBM) Quantos são os retângulos que têm os pontos A e B como vértices, e cujos vértices estão entre os pontos de interseção das 9 retas horizontais com as 9 retas verticais da figura abaixo?



2. (OBMEP 2008) Fábio tem cinco camisas: uma preta de mangas curtas, uma preta de mangas compridas, uma azul, uma cinza e uma branca, e quatro calças: uma preta, uma azul, uma verde e uma marrom. De quantas maneiras diferentes ele pode se vestir com uma camisa e uma calça de cores distintas?
3. (OBM) A prefeitura de uma certa cidade fez uma campanha que permite trocar 4 garrafas de 1 litro vazias por uma garrafa de 1 litro cheia de leite. Até quantos litros de leite pode obter uma pessoa que possua 43 dessas garrafas vazias?
4. (OBM) Numa caixa, havia várias bolas, sendo 5 azuis, 4 amarelas, 3 vermelhas, 2 brancas e 1 preta. Renato retirou 3 bolas da caixa. Sabendo que nenhuma delas era azul, nem amarela, nem preta, podemos afirmar a respeito dessas 3 bolas que:
- São da mesma cor.
  - São vermelhas.
  - Uma é vermelha e duas são brancas.
  - Uma é branca e duas são vermelhas.
  - Pelo menos uma é vermelha.

5. (OBMEP 2009) Os alunos do sexto ano da Escola Municipal de Quixajuba fizeram uma prova com 5 questões. O gráfico mostra quantos alunos acertaram o mesmo número de questões; por exemplo, 30 alunos acertaram exatamente 4 questões. Qual das afirmações a seguir é verdadeira?

5. Letra D. Sugestão: inicie contando quantos alunos fizeram a prova. Depois, use o resultado para analisar cada opção (se verdadeira ou falsa). Aproveite a oportunidade para dizer aos alunos o que é um contraexemplo.



- a) Apenas 10% do total de alunos acertaram todas as questões.
- b) A maioria dos alunos acertou mais de 2 questões.
- c) Menos de 200 alunos fizeram a prova.
- d) 40 alunos acertaram pelo menos 4 questões.
- e) Exatamente 20% do total de alunos não resolveram nenhuma questão.

Leia o texto A RESOLUÇÃO DE PROBLEMAS na margem da seção “Verifique se você aprendeu” do capítulo 2.

**REVISÃO** – A seu critério, proponha e verifique se os alunos utilizam com compreensão algumas ou todas as atividades a seguir:

Identificar números positivos e números negativos.

Relacionar números positivos e números negativos com altitudes, temperaturas, saldos ou débitos, distâncias na reta numerada.

Somar ou subtrair números positivos ou números negativos.

Representar números positivos e números negativos na reta numerada.

Comparar decimais positivos ou negativos com diversas ordens decimais.

Representar adições ou subtrações de números positivos ou negativos na reta numerada.

Associar a subtração de positivos ou negativos com a distância entre dois pontos da reta numerada.

Calcular possibilidades de escolhas.

Organizar dados em tabelas.

Representar dados usando gráficos de colunas ou barras.

Representar dados usando gráficos de setor.

Interpretar os dados de diversos tipos de gráficos.

Resolver problemas relacionados com porcentagens e gráficos.



## Verifique se você aprendeu

Se ainda tem dúvidas sobre	Reveja os exercícios
Como identificar números positivos ou números negativos e representá-los na reta numerada.	1 a 16, 23, 24 a 29.
Como identificar decimais positivos ou negativos e representá-los na reta numerada.	17 a 23.
Como comparar decimais positivos ou negativos.	18.
Como somar números positivos ou negativos.	30 a 38
Como subtrair números positivos ou negativos.	39 a 47.
Como resolver problemas relacionados com cálculo de possibilidades.	48 a 52.
Como organizar e interpretar dados em tabelas.	53 a 58, 75, 79, 83.
Como interpretar ou organizar dados em diversos tipos de gráficos.	46, 59 a 74, 78, 80 a 82, 86.
Como relacionar gráficos com porcentagens e com medidas de ângulos centrais.	64 a 74, 76, 77, 84, 85, 86, 87.

# CAPÍTULO 8

Revendo e aprendendo mais



Tiago Estima | Dreamstime.com

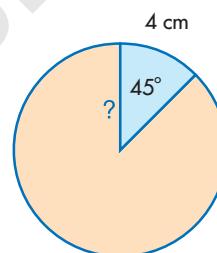
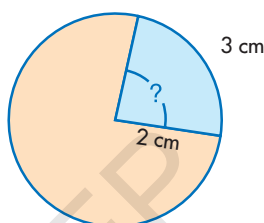
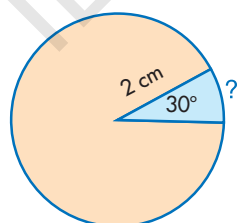
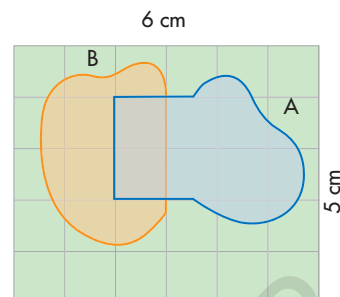
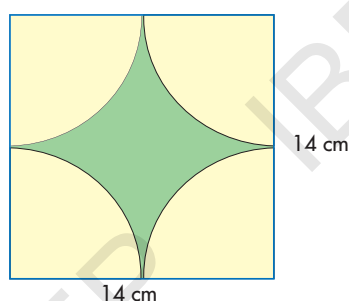
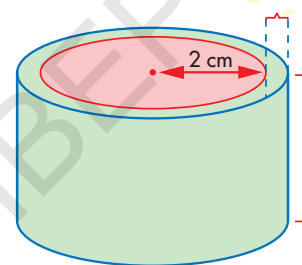
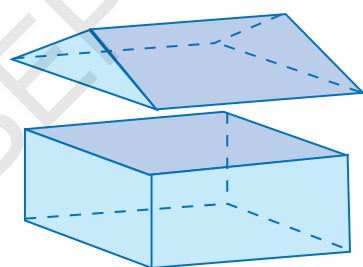
Ao lado, explicitamos os objetivos gerais do capítulo. Sugerimos um breve comentário sobre os mesmos, utilizando as ilustrações da página.

**Professor(a):** Neste e em outros capítulos, são exploradas diversas situações para que os alunos “descubram”, a partir de casos particulares, propriedades de números, de figuras, regras de cálculos etc. É extremamente importante que, após estas “descobertas”, sejam feitas observações afirmando que tais conclusões são verdadeiras (e, eventualmente, provar estes fatos) para que não fique a falsa ideia de que, a partir de poucos casos particulares, é possível generalizar. Sempre que possível, use expressões algébricas para expressar tais generalizações, bem como de algumas regularidades relacionadas com sequências numéricas.

Neste capítulo, você vai rever os principais assuntos que estudou e aprender um pouco mais sobre eles.

Ele é bem diferente dos anteriores, mas será muito útil porque você:

- Vai rever, um a um, os capítulos anteriores.
- Vai aprender um pouquinho mais sobre cada assunto já estudado.





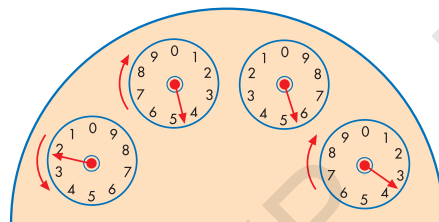
## Revisando os capítulos de 1 a 4 e aprendendo um pouco mais

- Observe a tabela de Custo Unitário Básico a seguir. Ela permite calcular o **custo aproximado de construções por metro quadrado**:

CUB (Custo Unitário Básico) Residencial R\$ por m <sup>2</sup>						
Padrão Pavimento	2 QUARTOS			3 QUARTOS		
	Baixo	Normal	Alto	Baixo	Normal	Alto
H01	936,09	1 053,83	1 158,08	792,15	884,53	977,75
H04	696,01	799,83	981,19	617,92	703,68	846,41
H08	676,28	779,28	955,67	591,07	679,16	823,77
H12	657,60	765,07	937,79	579,97	669,08	812,97
H16	677,37	788,03	965,94	597,39	689,16	837,35
H20	697,06	810,97	994,08	614,80	709,23	861,71

CUB/MG - Janeiro/2005: 0,75% – Fonte: Sinduscom-MG

- Na primeira coluna à esquerda, H01 significa construções de um pavimento e H04, construções de 4 pavimentos.  
Quantos pavimentos são representados pela sigla H12?
  - A segunda, terceira e quarta colunas representam os preços médios, por metro quadrado, de apartamentos de 2 quartos.  
O que representam as três últimas colunas de preços médios?
  - São representados valores para três padrões de construção: baixo, normal e alto. Escreva uma frase que explique o que significam esses três padrões de construção.
  - Observando a tabela, verificamos que um apartamento de 2 quartos em um prédio de 4 pavimentos e de padrão baixo custava, na época, em média, R\$ 696,01 por metro quadrado. Assim, para construir um apartamento desse tipo com 100 metros quadrados, seriam gastos, no mínimo, R\$ 69 601,00. Explique que conta se fez para se chegar a esse valor.
- Observe o **medidor de luz** da casa do Eustáquio e escreva o número correspondente à medida nele anotada.



Faça uma revisão dos capítulos de 1 a 4, propondo exercícios análogos aos listados a seguir:

CAPÍTULO 1: exercícios 20, 34, 37, 117, 121, 122.

CAPÍTULO 2: exercícios 11, 13, 29, 30, 41, 43, 49, 68.

CAPÍTULO 3: exercícios 3, 4, 7, 28, 32, 59, 60, 73 (b), 73 (d), 74 (e), 74 (j).

CAPÍTULO 4: exercícios 21, 35, 36, 46, 51, 61, 77, 81, 84, 91, 92, 100, 121 a 124.

- 12 pavimentos;
- Preços médios por metro quadrado de apartamentos de 3 quartos;
- Dizer que a construção tem padrões baixo, normal e alto significa dizer a respeito da qualidade menor ou maior da construção;
- Multiplicou-se 696,01 por 100.

Explique para os alunos que essa tabela não se refere a **todas** as despesas de construção, mas sim às principais despesas.

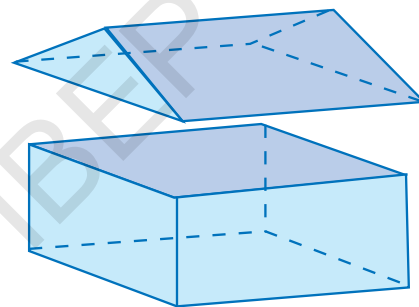
- Desenho do aluno:  
2 453 ⇒ (número correspondente à medida anotada no medidor de luz).

3.a) Primeira parte:  $20 \times 30 + 2(20 + 30) \times 8 + 20 \times 3 = 600 + 800 + 60 = 1460$ ; Telhado:  $24 \times 30 = 720$ ; Soma:  $2\ 180\text{ cm}^2$ ;

b) 175%;

c) Impostos:  $8,40 \times 0,45 = 3,78$ . Lucro:  $14,70 - 8,40 - 3,78 = 2,52$ . R) R\$ 2,52.

3. Em uma fábrica de brinquedos, são feitas casinhas de madeira compostas de duas partes: uma em forma de paralelepípedo retângulo e outra, representando o telhado, em forma de prisma de base triangular. As medidas da primeira parte são: 20 cm por 30 cm por 8 cm. A parte do telhado tem duas faces triangulares, de 3 cm de altura por 20 cm de base, e duas faces superiores, medindo 12 cm por 30 cm.



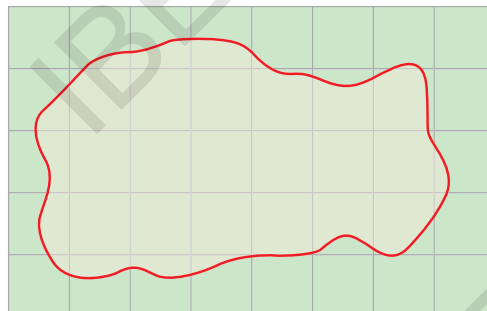
- Calcule a quantidade de madeira necessária, em  $\text{cm}^2$ , para fazer uma dessas casinhas, desprezando as perdas.
- Cada casinha tem um custo final de R\$ 8,40 e é vendida ao preço de R\$ 14,70. O preço de venda representa quantos por cento do preço de custo?
- Se, sobre o preço de custo, a fábrica tem despesa de 45% entre impostos e outras despesas, qual é o seu lucro final, por casinha fabricada?

4. Paulina observou, pelo desenho, que a figura da lagoa contém mais de 18 quadrados e está inserida num retângulo com 40 quadrados. Como cada quadrado representa uma área de  $1\text{ km}^2$ , Paulina conclui que a lagoa ocupa uma área maior que  $18\text{ km}^2$  e menor que  $40\text{ km}^2$ .

4. Na figura a seguir, você vê o desenho de uma lagoa.

Os lados dos quadradinhos representam distâncias de 1 km.

Paulina disse que a lagoa ocupa uma área maior que  $18\text{ km}^2$  e menor que  $40\text{ km}^2$ . Explique o que ela teria feito para chegar a essa conclusão.



5. Júlio foi contratado para fazer reformas no galpão (visto na figura). No contrato, estavam previstas as seguintes atividades:



- ◆ Trocar sete tábuas das paredes que estavam estragadas.
- ◆ Pintar com tinta esmalte as partes retangulares das quatro paredes de madeira do galpão.
- ◆ Pintar com tinta a óleo a parte triangular das paredes da frente e dos fundos.
- ◆ Trocar 15 telhas quebradas.
- ◆ Retirar todas as telhas, escová-las e pintar a face externa com líquido impermeabilizante.

5. a) R\$ 152,30;  
b) R\$ 582,40;  
c) R\$ 36,00;  
d) R\$ 120,00;  
e) R\$ 180,00;  
f) R\$ 1 070,70.

Nos exercícios a seguir, você vai refazer cada conta correspondente às parcelas das despesas que Júlio apresentou ao terminar o serviço. Para isto, escreva em seu caderno os valores que substituem corretamente as letras, usando arredondamentos para os centavos, quando necessário.

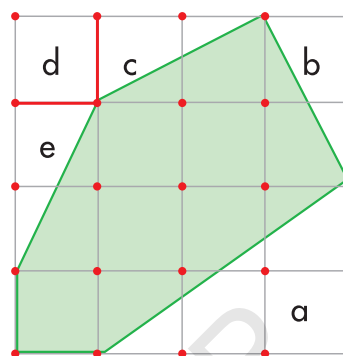
Sete tábuas de 3,2 m por 0,8 m a R\$ 8,50 o m <sup>2</sup> .	<b>a</b>
Tinta esmalte para quatro paredes de madeira que, juntas, formam um retângulo de 3,2 m de altura e 26 m de base: R\$ 7,00 o m <sup>2</sup> .	<b>b</b>
Tinta a óleo para pintar as duas partes triangulares das paredes medindo 5 metros de comprimento por 0,8 m de altura cada uma: R\$ 9,00 o m <sup>2</sup> .	<b>c</b>
Quinze telhas novas a R\$ 8,00 cada uma.	<b>d</b>
Líquido impermeabilizante para 15 telhas de 3,20 m por 1,5 m: R\$ 2,50 o m <sup>2</sup> .	<b>e</b>
Total das despesas.	<b>f</b>

6. Se Júlio cobrou R\$ 1 400,00 pelos serviços, calcule a **despesa total com a reforma** do galpão do exercício anterior.

7. Um sítio ocupa uma área representada pela **parte verde da figura** ao lado. Cada pequeno quadrado representa uma área quadrada de 1 km de lado. Calcule a área do sítio.

8. Em uma fundição, foi fabricada uma peça em forma de cano, como se vê na figura:

- a) Calcule os raios interno e externo, em milímetros.
- b) Expresse a altura, em milímetros.
- c) Calcule a quantidade aproximada de material gasta para fazer a peça, em mm<sup>3</sup>.

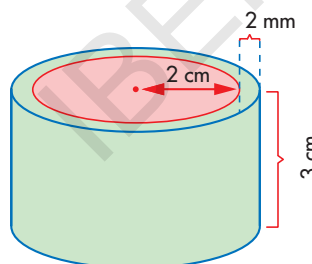


6. R\$ 2 470,70.

Sugira aos alunos que calculem a área do sítio como diferença entre a área da região quadrada maior e as somas das áreas das regiões externas ao contorno do sítio. (regiões triangulares **a**, **b**, **c**, **e**, e do quadrado **d**).

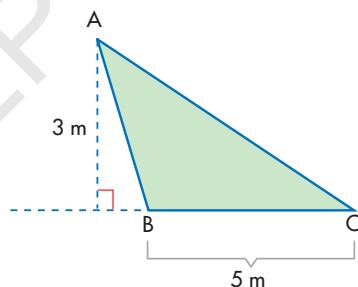
7. 9 km<sup>2</sup>  
16 - (3 + 1 + 1 + 1 + 1).

Proponha outros modos de calcular a área do sítio.

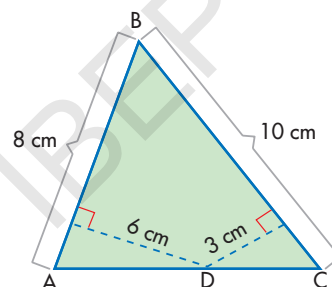


8. a) 20 mm e 22 mm;  
b) 30 mm;  
c) 7 912,8 mm<sup>3</sup>.

9. Calcule as áreas dos triângulos representados nas figuras a seguir:



9. a)  $7,5 \text{ cm}^2$ ;  
b)  $39 \text{ cm}^2$ . (Trace BD e some as 2 áreas.)



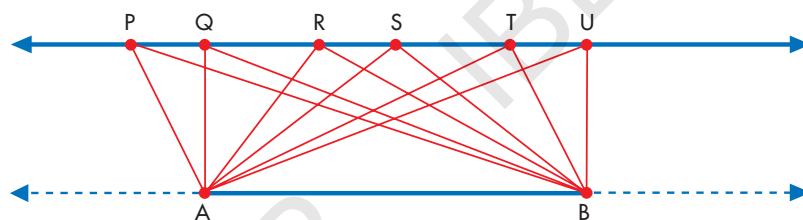
10. a) 80 m; 100 m; 60 m;  
30 m;  
b)  $(2\,400 + 1\,500) \text{ m}^2 = 3\,900 \text{ m}^2$ .

10. Se a segunda figura da ilustração anterior representa uma praça na escala de 1: 1 000, calcule:

- a) As medidas dos lados e dos segmentos perpendiculares a eles, em metros.  
b) A área da praça, em metros quadrados.

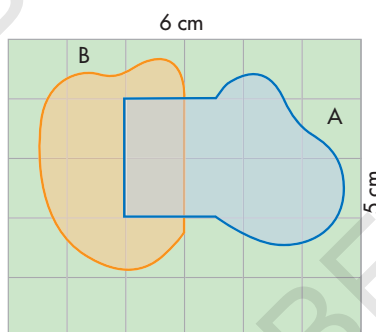
11. Fabiana falou que, se as retas AB e PU da figura a seguir são paralelas, então todos os triângulos com base AB e vértice P, Q, R, S, T ou U têm áreas iguais.

Você concorda com Fabiana? Justifique sua resposta.



11. Concordo; já que a base e a altura de todos os triângulos são as mesmas, a área também será a mesma.  
(Metade do produto da base pela altura.)

12. Faça uma estimativa das áreas A e B representadas na figura a seguir:



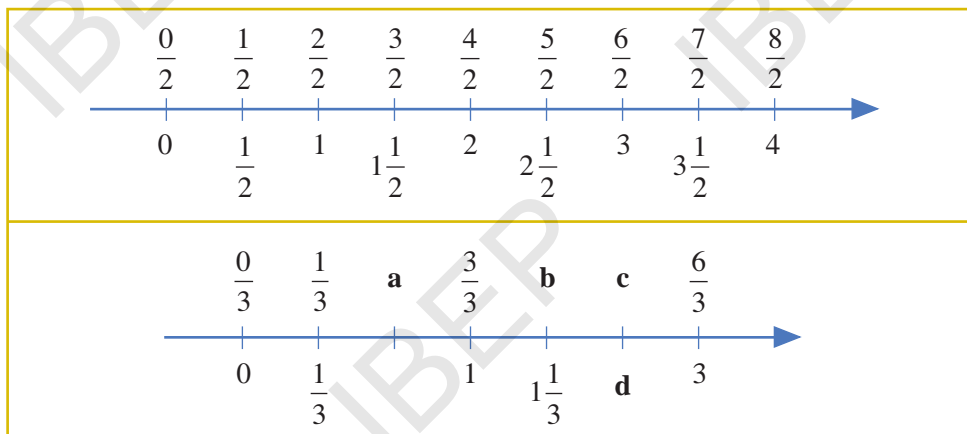
12. B  $\Rightarrow 6 \text{ cm}^2$ ;  
A  $\Rightarrow 7,5 \text{ cm}^2$ .

13. Não, já que as áreas A e B possuem partes coloridas em comum.

13. Celso disse que, para fazer uma estimativa de toda a área limitada pelo contorno externo da figura anterior, basta somar as estimativas feitas para as áreas A e B. Você concorda? Justifique sua resposta.

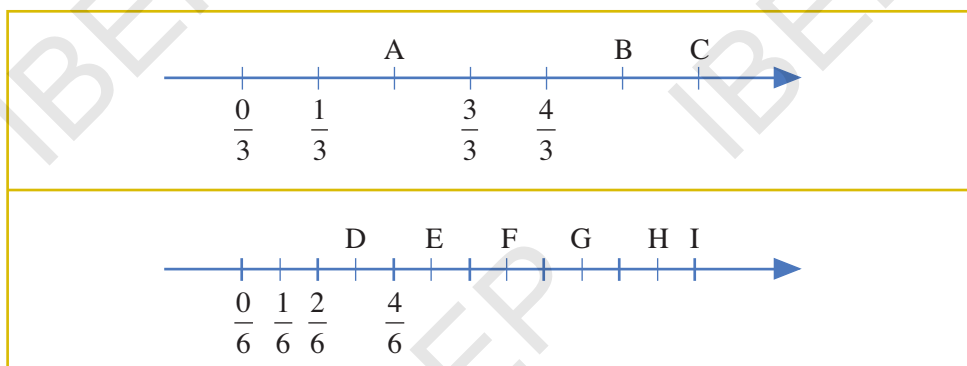
14. Na primeira das **retas numeradas** a seguir, você vê o modo de representar os números naturais como frações de denominador dois, bem como os pontos médios dos segmentos cujos extremos são 0, 1, 2, 3 e 4.

Vê, também, algumas representações usando os “**números mistos**”.

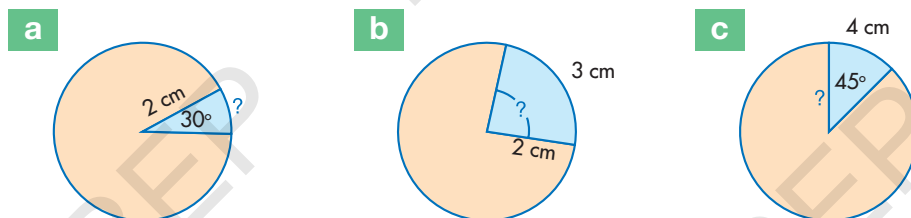


Agora, observe a segunda reta e escreva o que deve substituir corretamente as letras **a, b, c, d**.

15. Observe a figura e escreva o que deve substituir corretamente cada letra:



16. Observe as figuras a seguir e resolva os exercícios relacionados com elas:



Dê as medidas exatas ou aproximadas:

- Do **arco** da figura (a).
- Do **ângulo central** da figura (b).
- Do **raio** da figura (c), **em centímetros**.

14. a)  $\Rightarrow 2/3$ ;  
b)  $\Rightarrow 4/3$ ;  
c)  $\Rightarrow 5/3$ ;  
d)  $\Rightarrow 1 \frac{2}{3}$ .

15. A)  $\Rightarrow 2/3$ ;  
B)  $\Rightarrow 5/3$ ;  
C)  $\Rightarrow 6/3$ ;  
D)  $\Rightarrow 3/6$ ;  
E)  $\Rightarrow 5/6$ ;  
F)  $\Rightarrow 7/6$ ;  
G)  $\Rightarrow 9/6$ ;  
H)  $\Rightarrow 11/6$ ;  
I)  $\Rightarrow 12/6$ .

16. O arco em (a) é a fração  $30/360$  do comprimento da circunferência. Em (b), o ângulo central é a fração de 360 graus dada pelo quociente de 3 pelo comprimento da circunferência que tem raio 2. Em (c), calcule o comprimento da circunferência (8 vezes 4 cm) e divida por  $2\pi$ .  
a) 1,05 cm;  
b)  $86^\circ$ ;  
c) 5 cm.

**OBSERVAÇÃO IMPORTANTE:**

O professor tem ótima oportunidade de explorar o exercício para definir o radiano como sendo o arco cuja medida é igual à medida do raio. E, como a circunferência circunscreve o hexágono (que no caso da circunferência de raio  $r$  tem perímetro  $6r$ ), é natural “aceitar” que o comprimento da circunferência seja um pouco maior que  $6r$ , ou seja, este fato confirma o valor explorado até aqui, intuitivamente, de que o comprimento da circunferência é de, aproximadamente, 6,28 raios ( $2 \times 3,14r$ ). Logo, é razoável aceitar que a medida da circunferência, em radianos, é  $2\pi$ .



Faça uma revisão do capítulo 5, propondo exercícios análogos aos listados a seguir: 2, 4, 6, 9, 35, 37, 84, 86.

## Revisando o capítulo 5 e aprendendo um pouco mais

17. a)  $x = 5$  cm;  
b)  $x = 15$  cm.

Aproveite a oportunidade para lembrar aos alunos como verificar as respostas. Proponha que, nos dois casos, substituam os valores encontrados para  $x$  e verifiquem que os perímetros correspondentes são os dos enunciados.

18. a)  $\Rightarrow$  Perímetro 15 cm;  
b)  $\Rightarrow$  Perímetro 13,5 cm;  
c)  $\Rightarrow$  Perímetro 52,5 cm;  
d)  $\Rightarrow$  Perímetro calculado: 78 m;

Ela errou os três primeiros cálculos.

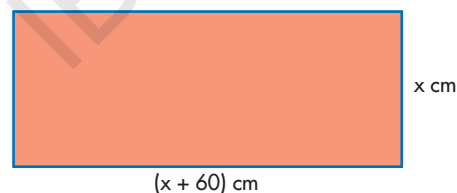
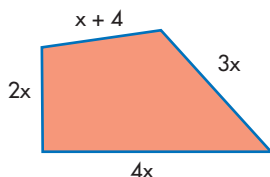
19. Não é possível.

Explique para os alunos que no espaço existem retas, como as destacadas na figura, que não podem estar contidas em um mesmo plano. Tais retas chamam-se “retas reversas”. Exiba modelos para os alunos. Argumente, no caso da figura que, qualquer plano que passe pela reta horizontal, ou vai ser paralelo à vertical (caso da face posterior do cubo), ou vai ter um único ponto de interseção com a vertical (caso da face superior do cubo). Use encontro de paredes da sala com teto e piso para exemplificar mais (ou também arestas de sólidos em forma de paralelepípedos).

20. a) Paralelogramo;  
b) Sim;  
c) A e C são iguais e  $A + B$  é igual a  $180^\circ$ .

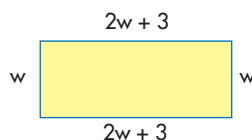
Caso seja oportuno, diga para os alunos que os resultados (b) e (c) serão provados, teoricamente, no oitavo ano.

17. Nos quadriláteros a seguir, as letras representam medidas em centímetros:



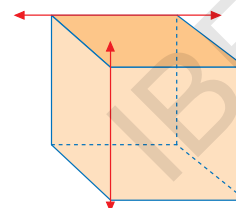
- a) Se o perímetro da primeira figura mede 54 cm, calcule o valor de  $x$ .  
b) Se o perímetro da segunda figura mede 180 cm, calcule o valor de  $x$ .

18. Catarina calculou os perímetros do quadrilátero a seguir para os valores de  $w$ , escritos em uma tabela, mas errou alguns cálculos. Descubra quais cálculos ela errou:

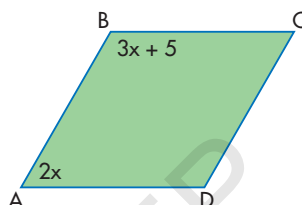
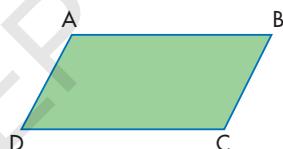


	Valor de $w$	Perímetro calculado
a	1,5 cm	18 cm
b	1,25 m	16 m
c	7,75 mm	66 mm
d	12 m	78 m

19. Na figura ao lado, você vê destacadas duas retas que passam pelas arestas de um cubo. Responda: é possível existir um plano que contenha essas duas retas?



20. Observe a primeira figura e responda:



- a) Se AB e DC são lados paralelos, bem como AD e BC, como se chama esse quadrilátero?  
b) Se AB e DC são lados paralelos e de mesma medida, é possível dizer que o quadrilátero é um paralelogramo?  
c) Se o quadrilátero é um paralelogramo, o que se pode dizer dos ângulos A e C? E dos ângulos A e B?

21. Observe o paralelogramo da segunda figura anterior e calcule as medidas dos ângulos A e B.

**Professor(a):** Sugerimos usar calculadora nos cálculos do exercício 21.

22. Observe a tabela de percentuais de inflação, de agosto de 2004 a janeiro de 2005.

21. A:  $70^\circ$ ;  
B:  $110^\circ$ .

Explique para os alunos que inflação é uma porcentagem média de aumento de preços de produtos em determinado intervalo de tempo. Por exemplo, na tabela a seguir, existem diversos percentuais de inflação ao final de cada mês (desde agosto de 2004 até janeiro de 2005). Explique que existem diversos órgãos que calculam a inflação usando métodos e grupos de artigos diferentes, o que explica índices diferentes em um mesmo mês. Peça aos alunos que pesquisem os significados das diversas siglas contidas na tabela (INPC, IBGE etc.).

INFLAÇÃO (%)								
variação %								
Índices	Agosto	Setembro	Outubro	Novembro	Dezembro	Janeiro	Acum. no ano 2004	Acum. 12 meses
INPC (IBGE)	0,50	0,17	0,17	0,44	0,86	0,57	6,13	5,86
IPC/FIPE	0,99	0,21	0,62	0,56	0,67	0,56	6,57	6,47
IGP-DI (FGV)	1,31	0,48	0,53	0,82	0,52	0,33	12,13	11,61
IGP/M (FGV)	1,22	0,69	0,39	0,82	0,74	0,39	12,42	11,87
IPCA (IPEAD)	1,05	0,12	0,14	1,08	1,43	0,50	8,74	8,22
IPCA (IBGE)	0,69	0,33	0,44	0,69	0,86	0,58	7,60	7,41

Fonte: IGP/M (FGV), FEV. 2005.

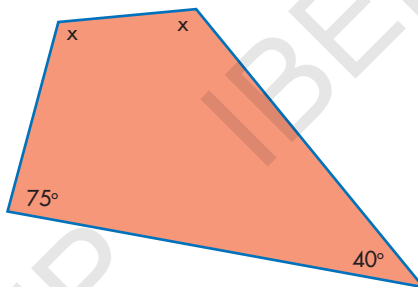
Um comerciante reajusta, sempre no início de cada mês, o preço dos artigos que tem para vender. Para isso, ele consulta tabelas de inflação, como a que se vê acima.

Imagine que ele usou essa tabela para reajustar preços, usando sempre os percentuais do IGP/M, e responda:

- Qual foi o preço reajustado no dia 01/12/2004, de um artigo que custava R\$ 2 500,00 no dia 01/11/2001?
- Qual foi o preço reajustado no dia 01/01/2005, de um artigo que custava R\$ 4 000,00 no dia 01/12/2001?
- Se um artigo foi comprado nos primeiros dias de outubro por R\$ 3 624,84, qual era seu preço em 01/09/2004?

22. a) R\$ 2 520,50 (dois métodos: 1º) Multiplicar 2 500 por 0,0082 e somar com 2 500 ou 2º) Multiplicar 2 500 por 1,0082); (Lembre aos alunos que 0,82% é igual a  $0,82/100$ , ou, equivalentemente,  $82/10\ 000$ , ou seja, 0,0082);  
b) R\$ 4 029,60;  
c) R\$ 3 600,00.

23. Emília calculou os ângulos de medidas representadas pela letra x no quadrilátero ao lado e encontrou  $115^\circ 30'$ . Verifique se ela acertou.



23. Emília errou, já que a resposta correta é  $x = 122^\circ 30'$ .

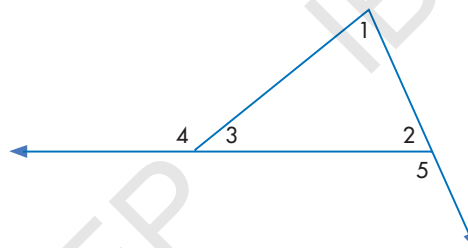
24. a) Que a soma dos ângulos 1 e 2 é igual à medida do ângulo 4, ou seja,  $150^\circ$ ;

b)  $1 \Rightarrow 50^\circ$ ;  
 $2 \Rightarrow 50^\circ$ ;  
 $3 \Rightarrow 80^\circ$ ;  
 $4 \Rightarrow 100^\circ$ .

24. Observe a figura a seguir e responda:

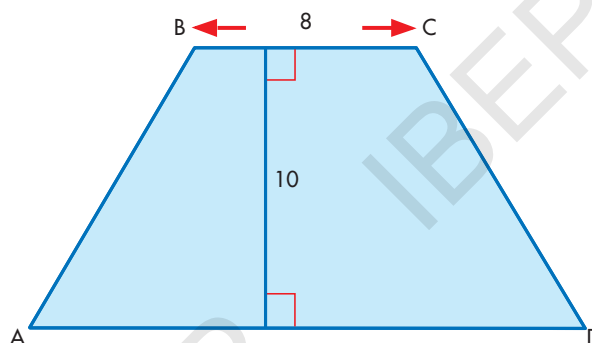
a) Se o ângulo 4 mede  $150^\circ$ , o que se pode dizer das medidas dos ângulos 1 e 2?

b) Se o ângulo 5 mede  $130^\circ$  e os ângulos 1 e 2 têm medidas iguais, calcule as medidas dos ângulos 1, 2, 3 e 4.



25.  $AD = 18 \text{ km}$   
 $(8 + AD) \times 10/2 = 130$ .

25. Uma fazenda tem a forma do trapézio da figura abaixo, com as medidas em quilômetros e área de  $130 \text{ km}^2$ . Quanto mede o lado  $AD$  dessa fazenda?

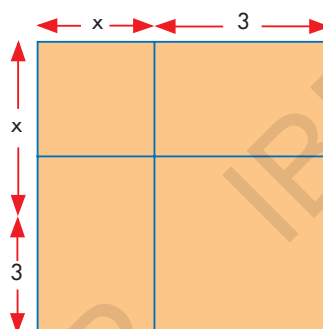


26. a)  $x^2 + 6x + 9$ ;  
b)  $(3 + x)^2$ .

26. Observe a figura e escreva a área do quadrado de duas maneiras diferentes:

a) Como soma das áreas de dois retângulos e dois quadrados.

b) Como quadrado da soma de duas medidas.



## Revisando os capítulos 6 e 7 e aprendendo um pouco mais

Faça uma revisão dos capítulos 6 e 7, propondo exercícios análogos aos listados a seguir:




Capítulo 6: 30, 62, 71, 72, 73, 95, 97, 101 a 105.

Capítulo 7: 31, 33, 45, 51, 52, 57, 62, 68, 80.

Diga para os alunos que, na representação do exercício 27, as meias maçãs representam 25 000 maçãs.

27. a) 50%;  
b) 325 000.

27. A tabela a seguir representa a produção de maçãs de uma fazenda nos anos de 2010, 2011 e 2012. Cada desenho de uma maçã representa 50 000 maçãs; logo, o desenho de meia maçã representa 25 000 maçãs.

	<u>2010</u>
	<u>2011</u>
	<u>2012</u>

Júlia Bianchi, 2006

Responda:

- a) A produção em 2011 foi quantos por cento maior que a produção do ano anterior?  
b) Quantas maçãs foram colhidas em 2012?

28. Uma tabela ou gráfico que tem os valores representados por uma figura que lembra os objetos contados chama-se **tabela pictórica** ou **gráfico pictórico**, respectivamente.

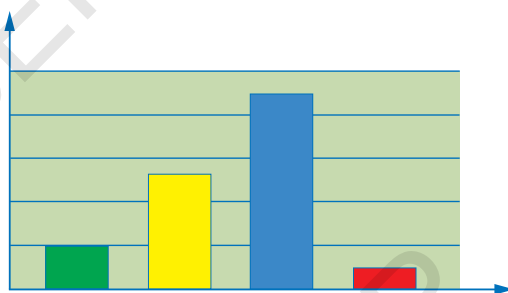
Faça tabelas pictóricas que representem:

- a) Produção de automóveis por uma fábrica em três anos consecutivos.  
b) Produção de bolas por uma fábrica de brinquedos.

29. No gráfico a seguir, a coluna azul representa a produção de livros de uma editora em 2012: 450 mil livros.

Se, da esquerda para a direita, as colunas representam os anos de 2010, 2011, 2012 e 2013, copie o gráfico em seu caderno e complete-o:

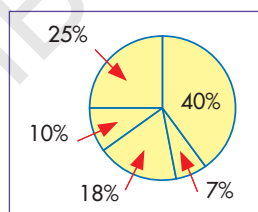
- a) Escrevendo esses quatro anos nos locais correspondentes.  
b) Escrevendo valores, em centenas de milhares, ao lado das horizontais correspondentes.  
c) Escreva o título.



30. Ainda em relação ao gráfico anterior, dê valores aproximados das produções de livros pela editora nos anos:

- a) 2010      b) 2011      c) 2013

31. Observe o gráfico a seguir e escreva em seu caderno os valores correspondentes às porcentagens nele registradas, relativas a uma despesa de R\$ 8 400,00 que Luiz teve na reforma de sua casa.

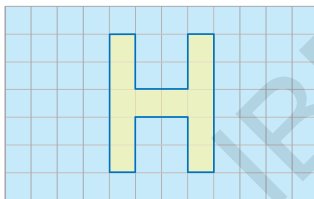


29. Tarefa do aluno.  
30. a) 100 mil livros;  
b) 250 mil livros;  
c) 50 mil livros.  
(b e c valores aproximados)

31. 7% ⇒ R\$ 588,00;  
18% ⇒ R\$ 1 512,00;  
10% ⇒ R\$ 840,00;  
25% ⇒ R\$ 2 100,00;  
40% ⇒ R\$ 3 360,00.

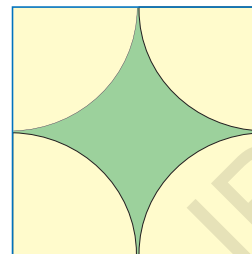
32. Desenho do aluno.  
(Mediatriz do segmento horizontal e mediatriz dos dois verticais.)

32. Copie a letra **H** em seu caderno e **desenhe** dois eixos de simetria dela:



33. a)  $0,5 \text{ m}^2$  aproximadamente;  
b)  $0,56 \text{ m}^2$  aproximadamente.

33. Denise fez o desenho ao lado como modelo de uma janela de vidros coloridos. A janela vai ter moldura em forma quadrada, com medidas de  $1,60 \text{ m}$  de lado. As partes de vidro amarelo têm a forma de setores circulares com centro nos vértices do quadrado.

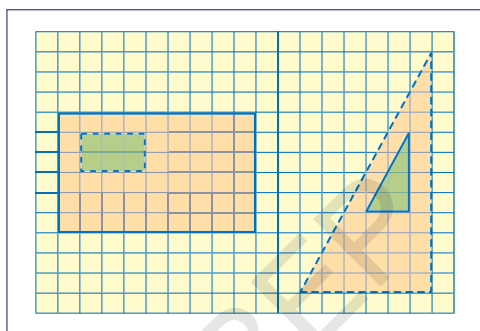


a) Qual a área aproximada de cada uma das partes em vidro amarelo?

b) Qual a área aproximada da parte em vidro verde?

34. a)  $1 : 3$ ;  
b)  $3 : 1$ ;  
c)  $3 : 1$ ;  
d)  $1 : 3$ .

34. Na ilustração a seguir, as figuras contidas no retângulo quadriculado e de mesma forma **são semelhantes**. Calcule a razão de semelhança em cada caso:



a) Do retângulo menor para o maior.

b) Do retângulo maior para o menor.

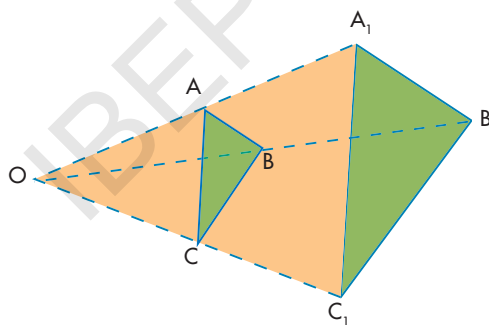
c) Do triângulo maior para o menor.

d) Do triângulo menor para o maior.

35. Desenho do aluno.

35. Os triângulos  $A_1B_1C_1$  e  $ABC$  da figura a seguir são semelhantes. A **razão de semelhança** entre eles é a mesma razão entre os segmentos  $OC_1$  e  $OC$ , nesta ordem.

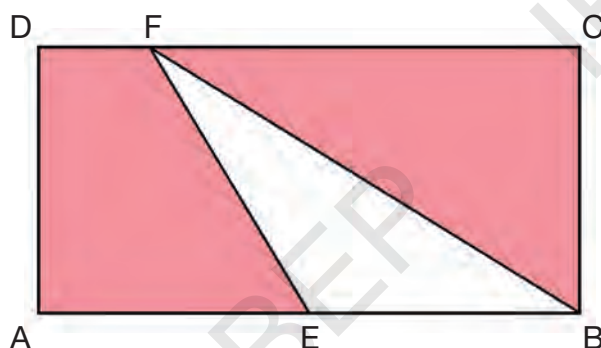
Desenhe um triângulo **ABC** e faça um desenho, como o da figura, para obter outro triângulo **DEF** semelhante a ele, de forma que a razão de semelhança entre o menor e o maior seja de  $1 : 3$ .





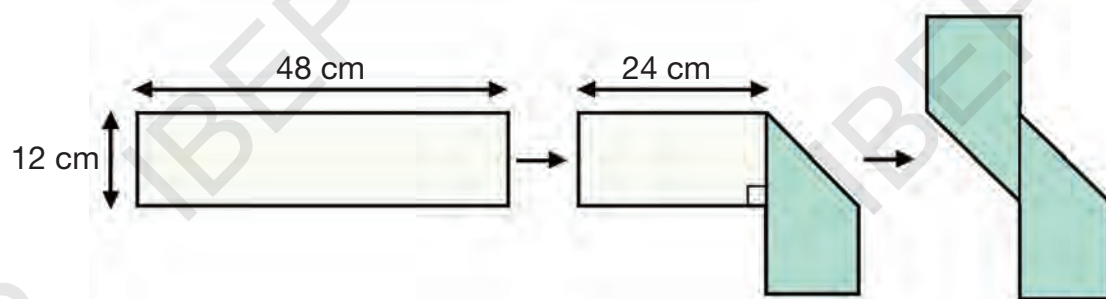
## Seção olímpica

1. (OBMEP 2006) No retângulo da figura temos  $AB = 6$  cm e  $BC = 4$  cm. O ponto E é o ponto médio do lado AB. Qual é a área da parte colorida?



1. A área do triângulo BEF é  $EB \times AD / 2 = 3 \times 4 / 2 = 6 \text{ cm}^2$ . A área do retângulo é  $AB \times AD = 6 \times 4 = 24 \text{ cm}^2$ . Logo, a área da parte colorida é  $24 - 6 = 18 \text{ cm}^2$ .

2. (OBMEP 2008) Uma tira retangular de cartolina, branca de um lado e verde do outro, foi dobrada como na figura, formando um polígono de 8 lados. Qual é a área desse polígono?

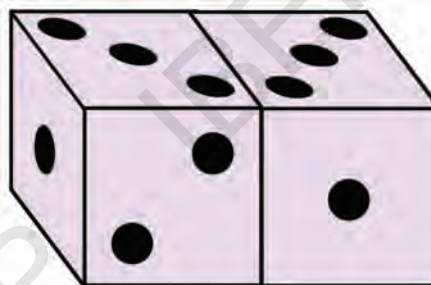


2. Na figura dada, a parte cinza obtida depois da primeira dobradura pode ser dividida em duas: um quadrado de lado 12 cm e um triângulo de área igual a metade da área do quadrado. A área do quadrado é  $12 \times 12 = 144 \text{ cm}^2$ ; logo, a área do triângulo é  $\frac{1}{2} \times 144 = 72 \text{ cm}^2$ . Assim, a área dessa parte cinza é  $144 + 72 = 216 \text{ cm}^2$ . Depois da segunda dobradura, obtemos duas partes cinza iguais, cuja área total é  $2 \times 216 = 432 \text{ cm}^2$ .

3. (OBMEP 2008) Uma papelaria monta estojos. Dentro de cada estojo são colocadas 3 canetas, que podem ser azuis ou vermelhas, numeradas com 1, 2 e 3. Cada estojo recebe uma etiqueta com a letra A se as cores das canetas 1 e 2 são iguais, uma com a letra B se as cores das canetas 1 e 3 são iguais e uma com a letra C se as cores das canetas 2 e 3 são iguais (o mesmo estojo pode receber mais de uma etiqueta). Em certo dia foram utilizadas 120 etiquetas A, 150 etiquetas B e 200 etiquetas C, e exatamente 200 estojos receberam apenas uma etiqueta. Quantos estojos foram montados nesse dia?

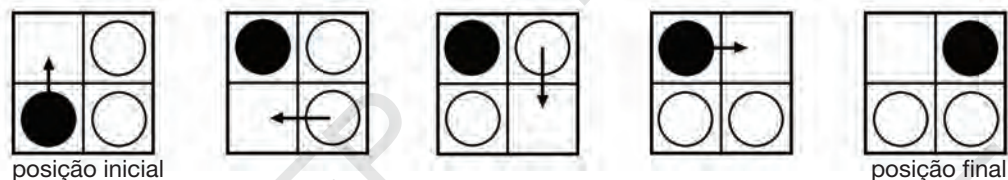
3. 290

4. (OBMEP 2010) Em um dado a soma dos números de duas faces opostas é sempre 7. Dois dados iguais foram colados como na figura. Qual é a soma dos números que estão nas faces coladas?



4. 11

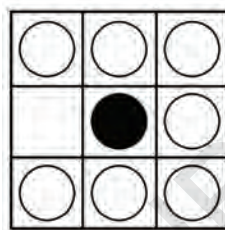
5. (OBMEP 2010) No jogo **Arrasta um** usa-se um tabuleiro quadriculado e peças redondas, uma preta e as outras brancas. Coloca-se uma peça em cada casa do tabuleiro, exceto em uma que é deixada vazia. Um movimento consiste em deslocar para a casa vazia a peça de uma casa adjacente. O jogo termina quando a peça preta chega ao canto superior direito do tabuleiro. Veja um exemplo de como terminar o Arrasta um em quatro movimentos em um tabuleiro  $2 \times 2$ .



Essa sequência de movimentos pode ser descrita por uma lista de setinhas:  $(\uparrow, \leftarrow, \downarrow, \rightarrow)$ .

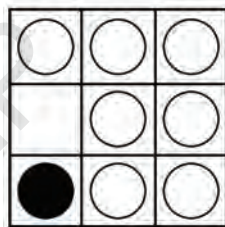
- a) Descreva como terminar o Arrasta um em seis movimentos no tabuleiro  $3 \times 3$  abaixo.

5.a)



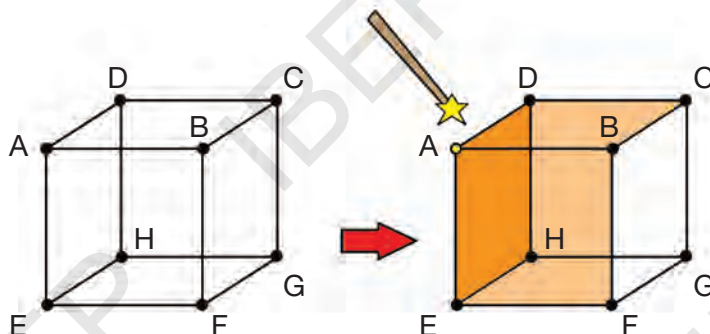
b) A figura mostra como chegar, em quatro movimentos, à configuração do item a. Daí, é só fazer os 6 movimentos indicados acima.

- b) Descreva como terminar o Arrasta um em dez movimentos no tabuleiro  $3 \times 3$  abaixo.



6. No final, o cubo terá todas as faces brancas.

6. (OBMEP 2014) Talia tem um cubo mágico; toda vez que ela toca um vértice desse cubo, as três faces que se encontram nesse vértice mudam de branco para laranja ou de laranja para branco. Começando com o cubo totalmente branco, ela tocou o vértice A e as três faces ABCD, ABFE e ADHE mudaram de branco para laranja, como na figura. Ela continuou tocando todos os outros vértices uma única vez. Quantas faces do cubo terminaram brancas?



# CAPÍTULO 9

## Actividades complementares



Musik Christian | Dreamstime.com





## Atividades complementares do capítulo 1

1. Para calcular  $6 + 7 + 8 + 9 + 10 + 11 + 12 + 13$ , podemos reescrever esta expressão assim:  $(6 + 13) + (7 + 12) + (8 + 11) + (9 + 10)$ .

- a) Escrita desta forma, a expressão representa uma soma de parcelas iguais. Qual o valor de cada uma delas e quantas são?
- b) É possível calcular o valor da expressão usando uma multiplicação? Se for possível, quais serão os fatores e o produto?

1. a) 19; 4; b) Sim: fatores, 19 e 4. Produto: 76.

2. Considere a soma  $1 + 3 + 5 + 7 + 9 + 11 + 13 + 15 + 17 + 19$ .

- a) Reescreva esta soma em seu caderno, completando:  $(1 + 19) + (3 + 17) + \dots$
- b) Explique como calcular a soma das parcelas acima usando uma multiplicação.

2. a)  $\dots + (5 + 15) + (7 + 13) + (9 + 11)$ ;  
b) Sim: fatores: 20 e 5. Produto: 100.

3. Considere a expressão:  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 + 9 + 10$

- a) Responda sem contar: a quantidade de parcelas desta expressão é par ou ímpar? Justifique sua resposta.
- b) É possível reescrevê-la, reagrupando suas parcelas duas a duas, como soma de partes iguais? Caso afirmativo, quais e quantas são?
- c) Qual a relação entre a quantidade destas parcelas iguais e a quantidade das parcelas da expressão inicial?
- d) Usando as parcelas de somas iguais, como calcular a soma?

3. a) É par porque são dez parcelas;  
b) Sim:  $(1 + 10), (2 + 9), (3 + 8), (4 + 7), (5 + 6)$ ; logo, são cinco parcelas;  
c) Em quantidade, são a metade da quantidade das parcelas iniciais;  
d) Multiplicando  $5 \times 11 = 55$ .

4. Na expressão a seguir, os pontinhos representam todos os números naturais entre 6 e 95, considerados como parcelas:  $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + \dots + 95 + 96 + 97 + 98 + 99 + 100$

- a) Reescreva essa expressão como soma de parcelas iguais, analogamente ao que foi feito no exercício anterior (use pontinhos para representar várias delas).
- b) Na representação obtida no item a, quantas são as parcelas iguais e qual o valor delas? Justifique.
- c) Calcule a soma da expressão usando uma multiplicação.

4. a)  $(1+100), (2+99) \dots (50+51)$ ;  
b) São cinquenta parcelas iguais a 101. O total delas é dado pela primeira parcela de cada parêntese;  
c)  $50 \times 101 = 5\,050$ .

5. Na expressão  $N = 2n$ ,  $N$  representa números naturais que podem ser obtidos dando a  $n$ , sucessivamente, os valores 4, 5, 6, 7, 8, 9. (lembre-se que  $2n$  representa a multiplicação de  $n$  por 2)

- a) Fazendo as substituições propostas para  $n$ , quais valores são obtidos para  $N$ ?
- b) Considere novamente a expressão  $N = 2n$  e imagine que sejam dados a  $n$  sucessivamente os valores 0, 1, 2, 3, 4, 5, .... (ou seja, todos os valores representados pelos números naturais). Como se chama a sucessão de números obtida?
- c) Imagine agora, que  $n$  seja substituído por toda a sucessão de números naturais na expressão  $N = 2n + 1$ . Como se chama a sucessão de números obtida neste caso?

5. a) 8, 10, 12, 14, 16, 18; b) Sucessão dos números pares; c) Sucessão dos números ímpares.



6. Representam números pares:  $2n$ ,  $4n$  porque o produto de um número par por qualquer número natural é um número par. Também a sucessão  $4n+2$  porque é a soma de dois números pares. As sucessões  $2n+3$  e  $4n+1$  representam números ímpares porque a soma de um número par com outro número ímpar é um número ímpar.

**Professor(a):** Afirme para os alunos que é possível provar que: 1) o produto de um número par por outro (par ou ímpar) é um número par; 2) a soma de dois números pares é um número par; 3) a soma de um número par com outro ímpar é um número ímpar.

7. É a expressão  $3n$ .

8. a) A sucessão dos múltiplos de sete; b) A sucessão dos múltiplos de onze.

9. 36, 78 e 312 cujas somas dos algarismos são 9, 15 e 6, respectivamente. Todas essas somas são múltiplos de 3: 9, 15 e 6.

10. 4.518.120 é múltiplo de três porque a soma  $4 + 5 + 1 + 8 + 1 + 2 + 0 = 21$  é um múltiplo de três.

**Professor(a):** afirme para os alunos que é possível provar que todo número cuja soma dos algarismos é um múltiplo de três é também um múltiplo de três.

11. Os algarismos das unidades são ou zero ou cinco; suponho que posso concluir que todo número cujo algarismo das unidades é zero ou cinco é um múltiplo de cinco.

**Professor(a):** Afirme para os alunos que é possível provar que todo número cujo algarismo das unidades é zero ou cinco, é um múltiplo de cinco.

12. Neste caso,  $N = 10\,000\,000$ , ou seja, possui 7 algarismos zero. **Professor(a):** aqui, exploramos a regularidade dos produtos obtidos: têm um zero a mais que cada um dos fatores que substituem  $n$ .

13. Seriam iguais a 10 e 1, respectivamente. **Professor(a):** aqui, exploramos a regularidade das sucessivas potências obtidas: cada uma é a anterior dividida por 10.

14.  $25\,619 = 2 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 6 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$ .

15. a) 3 271.

b) 503 010.

16. a)  $3 \cdot 10^6 + 2 \cdot 10^5 + 3 \cdot 10^4 + 1 \cdot 10^3 + 4 \cdot 10^2 + 2 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$ ;

b)  $9 \cdot 10^6 + 0 \cdot 10^5 + 1 \cdot 10^4 + 5 \cdot 10^3 + 0 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^1 + 9 \cdot 10^0$ .

6. Considere  $n$  representando qualquer número natural nas expressões a seguir, e indique as que representam números pares e as que representam números ímpares, justificando suas respostas:

$2n$ ,  $4n$ ,  $2n + 3$ ,  $4n + 2$ ,  $4n + 1$

7. Usando  $n$  para representar qualquer número natural, escreva em seu caderno a expressão que representa todos os múltiplos de três.

8. Se  $n$  representa números naturais, identifique o que significa cada uma das expressões a seguir:

a)  $7n$       b)  $11n$

9. Na expressão  $N = 3n$ , dê sucessivamente a  $n$  os valores  $n = 12$ ,  $n = 26$ ,  $n = 104$ ,  $n = 1\,011$ ; depois, calcule as somas dos algarismos dos valores obtidos para  $N$  em cada caso. Alguma dessas somas dos algarismos não é um múltiplo de três?

10. O que você diria do número 4 518 120: é múltiplo de 3? Justifique.

11. Na expressão  $N = 5n$ , substitua, sucessivamente,  $n$  pelos valores  $n = 12$ ,  $n = 27$ ,  $n = 28$ ,  $n = 31$ . Agora, observe os algarismos das unidades dos valores obtidos para  $N$ . Que conclusão você pode supor verdadeira a partir desta observação?

12. Na expressão  $N = 10n$ , substitua  $n$  por  $n = 10$ ,  $n = 100$ ,  $n = 1\,000$ , sucessivamente. Em seguida, observe os valores obtidos para  $N$  e responda: quantos algarismos 0 tem  $N$  quando  $n = 1\,000\,000$ ?

13. Na expressão  $N = 10^n$ , dê, sucessivamente a  $n$ , os valores  $n = 4$ ,  $n = 3$ ,  $n = 2$ , e calcule as potências correspondentes. Observando a regularidade dos resultados, o que você diria das potências correspondentes a  $n = 1$  e  $n = 0$ ?

14. Escreva o número 25 619 como soma de produtos de cada um de seus algarismos por uma potência de 10. (para os algarismos 1 e 9, use suas conclusões do exercício anterior).

15. Quais os números naturais representados pelas somas a seguir?

a)  $3 \times 10^3 + 2 \times 10^2 + 7 \times 10^1 + 5 \times 10^0$

b)  $5 \times 10^5 + 3 \times 10^3 + 1 \times 10^1$

16. Escreva, em seu caderno, cada número a seguir como soma de produtos de algarismos por potências de dez:

- a) Três milhões, duzentos e trinta e um mil, quatrocentos e vinte e nove.  
b) Nove milhões, quinze mil e dezenove.
17. Em uma divisão, represente o dividendo por **D**, o divisor por **d**, o quociente por **q** e o resto por **r** e escreva, em seu caderno, a igualdade que relaciona **D** com os demais termos desta divisão.
18. Use a expressão do exercício anterior para calcular:  
a)  $D$  se  $d = 4$ ,  $q = 3$  e  $r = 2$     b)  $q$  se  $D = 19$ ,  $d = 6$  e  $r = 1$
19. Considere todos os possíveis pares de números cuja soma seja 300:  $(0 + 300, 1 + 299, 2 + 288, \text{etc.})$ . Ao multiplicar os dois números de cada um desses pares, qual deles corresponde ao maior produto e qual é este produto?
20. Considere todos os números pares entre 7 e 23 e escreva em seu caderno cada um deles como soma de dois números primos.
21. Cláudio disse que o menor múltiplo de 31 que é maior que 1 000 é 1 023. Explique como ele pode ter chegado a esta conclusão.
22. Imagine que você tem 12 objetos para distribuir em caixas, em quantidades iguais. Quais as quantidades de caixas que representam todas as soluções possíveis para esta situação?
23. Verdadeiro ou falso:  
a) Se um número é múltiplo de 6, então é múltiplo de 3.  
b) Se um número é divisor de 6, então é divisor de 3.  
c) Se um número é múltiplo de 3, então é múltiplo de 6.  
d) Se um número é múltiplo de 2 e de 3, então é múltiplo de 6.  
e) Se um número é múltiplo de 2 ou de 5, então é múltiplo de 10.
24. Escreva, em seu caderno, o número 60 como produto do maior número de fatores diferentes possível.
25. Verdadeiro ou falso:  
a) Se  $N = 3^2 \times 5^3$ , então  $N$  é múltiplo de 45.  
b) Se  $N = 2^3 \times 3^2$ , então  $N$  é divisível por 12.  
c) Se  $N = 2^2 \times 5^2$ , então  $N$  é divisível por 40.
26. Uma fábrica produz uma lâmpada a cada 20 segundos e um interruptor a cada 45 segundos. Se duas máquinas produziram, em um mesmo momento, uma lâmpada e um interruptor, depois de quantos segundos ocorrerá pela primeira vez esta coincidência?

17.  $D = d \cdot q + r$ .

18. a)  $D = 4 \times 3 + 2 = 14$ ; b)  $19 = 6 \times q + 1$ , logo,  $18 = 6 \times q$ , ou seja,  $q = 3$ .

19.  $150 \times 150 = 22\,500$  Obs.: **Professor (a)**: O aluno deve observar que os produtos obtidos vão sucessivamente aumentando, mas, a partir do par  $(150, 150)$ , começarão a obter produtos já obtidos, agora em ordem decrescente de valor, como, por exemplo,  $(149, 151)$  e  $(151, 149)$ . Este resultado pode ser explorado em geometria, permitindo “concluir” (apenas para valores naturais), que dentre todos os retângulos de mesmo perímetro, o de maior área é o quadrado.

20.  $8 = 3 + 5, 10 = 3 + 7, 12 = 5 + 7, 14 = 7 + 7, 16 = 3 + 13, 18 = 7 + 11, 20 = 3 + 17, 22 = 11 + 11$  (ou outras soluções). **Professor (a)**: Sugira a pesquisa de outras soluções, afirmando que alguns dos números podem ser escritos de outras somas de dois números primos. Comente ainda que esta é a famosa Conjectura de Goldbach (1690 - 1764), matemático alemão, apresentada a Leonhard Euler (1707 - 1783), outro matemático alemão muito famoso. A conjectura diz que todo número par maior do que dois pode ser escrito como a soma de exatamente dois primos, e não foi demonstrada até hoje (por isto, é chamada de “conjectura”).

21. Dividindo 1 000 por 31, obtêm-se quociente 32 e resto 8. Logo, o produto  $31 \times 32$  é menor que 1 000 oito unidades. Portanto, o produto de 31 por 33 (1 023) é o menor múltiplo de 31 que é maior que 1 000.

22. 12 caixas, ou 6, ou 4, ou 3, ou 2, ou 1.

23. a) V; b) F; c) F; d) V; e) F. OBS: **Professor (a)**: explore exemplos para os itens verdadeiros e contraexemplos para os itens falsos.

24.  $60 = 1 \times 3 \times 4 \times 5$

25. a) V;  
b) V;  
c) F (Fatore 45, 12 e 40 para decidir).

26. Depois de 180 segundos (o m.m.c. de 20 e 45).

27. 18 metros (o m.d.c. de 90 e 126).

28. 104, 117, 130, 143, 156. (Mesmo raciocínio do exercício 21 para encontrar 104; depois, acrescentar, sucessivamente, 13).

29. a) 8 cm (m.d.c. de 104 e 120);  
b)  $(104:8) \times (120:8) = 13 \times 15 = 195$  peças.

30. a) RECIBO, MARMORE, ABOBORA  
b) 8676542, 2925236 e 8278432. Sugira aos alunos que pesquisem sobre Criptografia.

31. É de 3 para 4, ou seja, para cada 4 lançamentos, é provável que o produto dos números seja par. Justificativa: para que o produto seja par, é necessário que, pelo menos um dos números seja par; observe que as possibilidades dos lançamentos são quatro: (par, par), (par, ímpar), (ímpar, par) e (ímpar, ímpar); destas, três satisfazem a condição procurada. Outra forma de calcular é por contagem direta, já que o número de possibilidades é pequeno: são um total de  $6 \times 6 = 36$  lançamentos possíveis, dos quais, em 27, uma das faces contém um número par, donde  $27/36 = 3/4$ . Para explorar mais ainda este exercício, sugerimos que sejam levados para sala dados e que os alunos façam diversos lançamentos e contem as possibilidades; após várias repetições, chegarão a este valor de  $3/4 = 75\%$ .

32. Uma possível solução é: na diagonal principal, 17, 13 e 9 e nas linhas: 17, 11, 11; 7, 13, 19 e 15, 15 e 9. Outra solução: linhas 8, 17, 11; 15, 12, 9; 13, 7, 16. Discuta outras soluções dos alunos. Sugira os seguintes sites para pesquisa: Sugira o seguinte site para pesquisa: [http://pt.wikipedia.org/wiki/Quadrado\\_mágico](http://pt.wikipedia.org/wiki/Quadrado_mágico). Nesse outro site há material para o professor explorar em sala: <http://m3.ime.unicamp.br/recursos/1028>.

33. a) 14 b) 11

27. Duas cordas medem 90 metros e 126 metros, respectivamente. Se elas vão ser partidas em pedaços de mesmo tamanho, de forma que sejam os maiores possíveis, quanto medirá cada um desses pedaços?

28. Escreva, em seu caderno, todos os múltiplos de 13 compreendidos entre 100 e 160.

29. Uma chapa metálica retangular de 104 cm de largura por 120 cm de comprimento vai ser cortada em peças quadradas de maior área possível.

a) Qual a medida dos lados dessas peças?

b) Quantas dessas peças vão ser obtidas?

30. Observe a tabela a seguir. Nela, foi convencionado um código no qual cada letra é representada pelo algarismo da mesma coluna, e vice-versa.

Exemplificando: 28172 representa a palavra AMORA

A	E	I	O	M	R	T	C	B
2	6	4	1	8	7	3	5	9

a) Escreva, em seu caderno, as palavras representadas por 765491, 8278176 e 2919172.

b) Escreva, em seu caderno, os códigos relacionados com as palavras MERECIA, ABACATE e MARMITA.

31. Ao lançar uma só vez dois dados e multiplicar os números correspondentes às faces de cima, qual a probabilidade do produto obtido ser par? Justifique sua resposta.

32. Desenhe, em seu caderno, um quadrado mágico com 3 linhas e 3 colunas da seguinte forma: escreva em uma das diagonais, três números naturais diferentes entre 10 e 25 e em qualquer outra parte, o número 17. Agora, complete seu quadrado mágico contendo todas as linhas, colunas e diagonais com a mesma soma.

33. Copie, em seu caderno, e complete o segundo membro de cada expressão abaixo com o menor número natural possível para que as desigualdades a seguir sejam verdadeiras.

a)  $4 + 13 < 4 + \dots$

b)  $12 + 5 > \dots + 5$

34. Em cada desigualdade a seguir,  $n$  representa os números naturais que a tornam verdadeira. Relacione todos os valores possíveis em cada caso:

a)  $5 < n \leq 21$

b)  $12 \leq n < 35$

## Atividades complementares do capítulo 2

Copie o tangram da figura do exercício 7, página 52 e recorte suas sete peças. Mantenha a página 52 aberta para resolver os exercícios de 35 a 43, ou observando a figura do tangram, ou usando suas peças recortadas.

**35.** Construa usando todas as peças:

- a) um triângulo;
- b) um retângulo;
- c) um paralelogramo;
- d) um trapézio.

**36.** O que você conclui sobre as áreas das quatro figuras que construiu?

**37.** O perímetro do triângulo que você construiu é maior ou menor que o perímetro do tangram? Justifique sua resposta.

**38.** Identifique, pelas letras dos vértices, todas as peças em forma de triângulos retângulos. O que você conclui sobre os ângulos agudos do triângulo AEF? Justifique sua resposta.

**39.** Compare, com superposições, os ângulos agudos dos demais triângulos com os ângulos agudos do triângulo AEF. O que você conclui?

**40.** Identifique dois triângulos tais que o cateto de um deles tem a mesma medida da hipotenusa do outro.

**41.** Identifique um triângulo e um quadrado tais que o cateto do triângulo e os lados do quadrado tenham a mesma medida.

**42.** Construa um quadrado usando:

- a) 2 peças;
- b) 3 peças;
- c) 4 peças;
- d) 5 peças.

**43.** Representando a área do triângulo **N** por **s**, identifique:

- a) Dois polígonos cuja área é  $2s$ .
- b) Polígonos cuja área é  $3s$ .
- c) Um polígono cuja área é  $6s$ .

**34.** a) 6, 7, 8, 9, ..., 19, 20, 21;  
b) 12, 13, 14, 15, ..., 33, 34.

**35.** Soluções dos alunos.

**36.** Todas têm áreas iguais porque suas áreas equivalem à área total do tangram.

**37.** É maior, porque a medida de um de seus lados é igual à soma das medidas de dois lados do tangram, mas, os outros dois lados têm medidas maiores que os lados do tangram.

**38.** EAF, GIH, EJD, DIC, CIB. Os ângulos agudos do triângulo AEF são de mesma medida porque se opõem a lados de mesma medida.

**39.** Todos esses ângulos têm as mesmas medidas dos ângulos do triângulo AEF.

**40.** Uma possível solução: o cateto AE do triângulo EAF tem a mesma medida da hipotenusa DE do triângulo DEJ.

**41.** Uma possível solução: o triângulo T e o quadrado M.

**42.** Soluções dos alunos.

**43.** a) O quadrado M e o paralelogramo GFBH;  
b) Os trapézios DEGI, JEGH e GFBH;  
c) O trapézio DEFB.

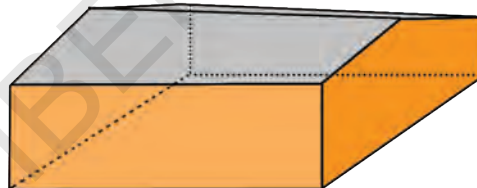


44. a) 10 vértices;  
 b) 15 arestas;  
 c) Sete faces;  
 d) Dois pares de faces paralelas;  
 e) A face da frente e a face dos fundos;  
 f)  $9 \times 5 \times 13 \times 2 = 1\,170$ . R) R\$ 1 170,00. ( $9 \times 5$ ) é a área em metros quadrados de cada parede. ( $9 \times 5$ )  $\times 13$  é quanto se pagaria para pintar uma das paredes. Como são duas paredes, o produto  $9 \times 5 \times 13 \times 2$  é a expressão que gera o custo final.

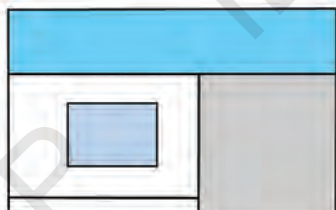
45. a) A;  
 b) B;  
 c) Cinco cômodos;  
 d) Lateral direita;  
 e) A planta arquitetônica;  
 f) O desenho B;  
 g) O desenho C;  
 h) O desenho B.

44. Você vê na figura ao lado o desenho de um galpão. As medidas das paredes retangulares do mesmo são: comprimento 9 metros e altura 5 metros. Responda ou calcule.

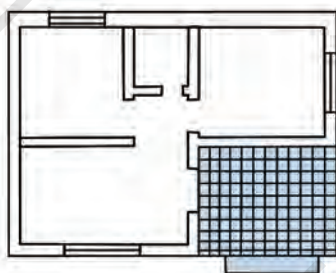
- a) Quantos vértices tem essa figura?  
 b) Quantas arestas?  
 c) Quantas faces?  
 d) Quantos pares de faces paralelas?  
 e) Identifique duas faces que têm 5 lados.  
 f) Quantos reais você gastaria para pintar as duas paredes retangulares desse galpão se, para pintar cada metro quadrado, gasta-se R\$13,00 ?



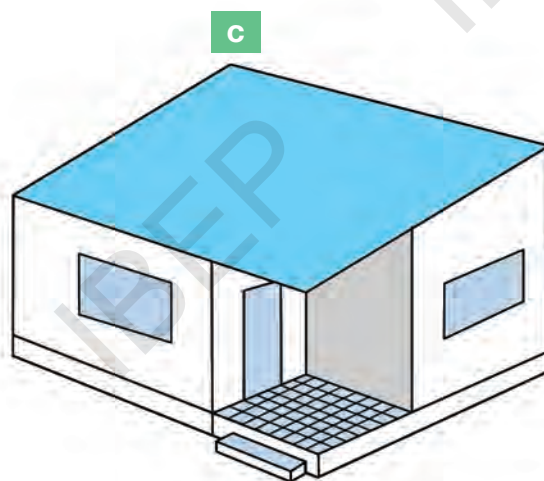
45. Observe os desenhos do projeto de uma mesma casa popular, e responda ou faça o que se pede:



a

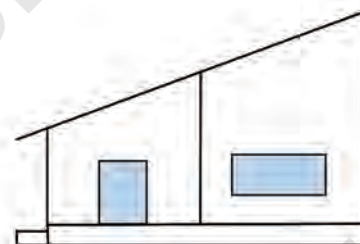


b



c

- a) Qual dos desenhos corresponde à vista de frente da casa?  
 b) Qual dos desenhos corresponde à vista de cima da casa, tirando o telhado?  
 c) Contando a varanda, quantos cômodos a casa tem?  
 d) O desenho ao lado corresponde à vista lateral da direita ou da esquerda?  
 e) Qual dos desenhos informa quantos cômodos tem uma casa: o da fachada, a planta arquitetônica, ou a perspectiva?  
 f) Qual dos três desenhos orienta um pedreiro para fazer o alicerce de uma casa?





- g) Qual dos três desenhos dá ideia do tipo de telhado que a casa vai ter?
- h) Qual dos três desenhos dá ideia de onde serão colocadas as portas e as janelas da casa?

46. Escreva, em seu caderno, os nomes dos polígonos cujos ângulos são todos ângulos retos.

47. Escreva, em seu caderno, nomes de dois polígonos tais que, em cada um deles, os lados são todos de mesma medida.

48. Usando régua e transferidor, desenhe duas retas que se cortam formando um ângulo que mede  $50^\circ$ .

- a) Quais as medidas dos outros três ângulos que elas formam?
- b) Como se chamam dois desses ângulos que têm medidas iguais?

49. Usando régua e transferidor, desenhe:

- a) Dois ângulos adjacentes tais que, um deles, meça 72 graus. Qual a medida em graus do outro ângulo que você desenhou?
- b) Dois ângulos que sejam suplementares, mas não sejam adjacentes.
- c) Dois ângulos de mesma medida que não sejam opostos pelo vértice.
- d) Um ângulo de  $86^\circ$  e a bissetriz do mesmo.

50. Observe o polígono ao lado e responda:

- a) Quanto ao número de lados do mesmo, como ele se chama?
- b) Quantos ângulos retos ele tem?
- c) Quantos ângulos obtusos ele tem?
- d) Quantos lados verticais, em relação ao seu ponto de vista, ele contém? E quantos lados horizontais?



51. Paula usou dois esquadros do tipo 30-60-90 para medir os ângulos do polígono ao lado. Como ajuda, veja os esquadros abaixo:



- a) Qual a medida dos ângulos obtusos do polígono?
- b) Qual a medida dos ângulos agudos do polígono?
- c) Qual é a soma dos quatro ângulos do polígono?

46. Quadrado e retângulo.

**Professor(a):** Se julgar conveniente, explore o fato de que um quadrado é um retângulo, mas nem todo retângulo é um quadrado.

47. Um triângulo equilátero e um quadrado, por exemplo.

48. a) Outro de  $50^\circ$ , e dois de  $130^\circ$ ;  
b) Ângulos opostos pelo vértice.

49. a) 108 graus;  
b) Dois ângulos cuja soma das medidas seja 180 graus, mas que não tenham como lados, semirretas opostas;  
c) Basta que tenham medidas iguais e que não tenham pares de lados como semirretas opostas;  
d) Desenho de cada aluno.

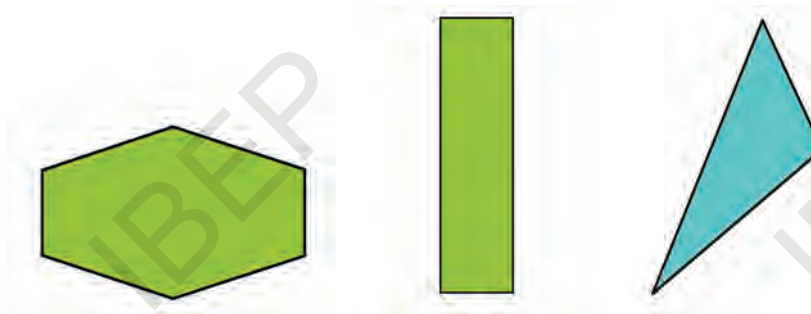
50. a) Pentágono;  
b) Dois ângulos retos;  
c) Dois ângulos obtusos;  
d) Dois e um.

51. a) 150 graus;  
b) 30 graus;  
c) 360 graus.

52. a) Octógono, retângulo e triângulo;  
b) Porque não têm todos os lados de medidas iguais;  
c) O triângulo;  
d) Ambos têm dois eixos de simetria.

52. Observe os três polígonos a seguir e responda:

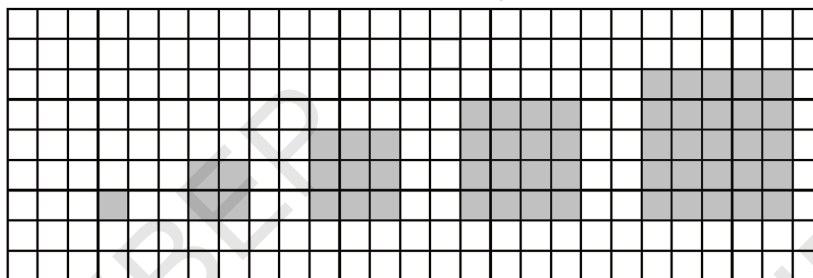
- a) Qual o nome que se dá a cada um deles considerando o número de lados ou os tipos de ângulos?  
b) Por que nenhum deles é um polígono regular?  
c) Qual o único deles não tem eixos de simetria?  
d) Quantos eixos de simetria tem o primeiro deles? E o segundo?



53. a) Pela ordem: 1, 4, 9, 16, 25;  
b) 144;  
c) 10.

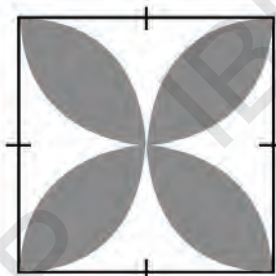
53. Na malha a seguir, considere os lados de cada quadradinho como unidade de medida de comprimento. Responda ou faça o que se pede:

- a) Escreva, em seu caderno, as áreas de cada quadrado que se vê desenhado na malha.  
b) Qual é a área de um quadrado cujo lado mede 12?  
c) Quanto mede o lado de um quadrado de área 100?



54. a) Quatro eixos de simetria: dois passando por vértices opostos e dois passando pelos pontos médios de lados opostos.

54. Observe a figura a seguir inscrita num quadrado. Descubra quantos eixos de simetria ela tem e os identifique, citando dois pontos pelos quais eles passam.



## Atividades complementares do capítulo 3

55. Um investidor perdeu a quarta parte de um capital na bolsa de valores. Em outros negócios, ganhou R\$ 150 000,00, tendo ficado, ao final de suas operações financeiras, com o dobro do capital inicial. Qual era o seu capital inicial?

55. R\$ 120 000,00.

56. Dívida R\$ 4 800,00 por três pessoas, de modo que as partes da primeira e da segunda sejam, respectivamente,  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{4}{5}$  da parte a ser recebida pela terceira.

56. 1ª) R\$ 2 250,00;  
2ª) R\$ 750,00;  
3ª) R\$ 1 800.

57. O reservatório de água de uma casa está totalmente vazio. Para que fique completamente cheio, sem que dele nada se retire, bastam duas horas. Mas, se ao mesmo tempo em que se começa a enchê-lo, há uma vazão que o esvaziaria em dez horas, em quanto tempo ele ficará totalmente cheio?

57. Usando redução à unidade: em uma hora, enche a metade e esvazia  $\frac{1}{10}$ ; logo, em uma hora enche  $\frac{1}{2} - \frac{1}{10} = \frac{4}{10}$ ; para ficar totalmente cheio ( $\frac{10}{10}$ ), o tempo necessário será  $(\frac{10}{10}) / (\frac{4}{10}) = 10/4 = 2,5$  horas. R) 2 h 30 min.

58. Para construir três galpões, foram gastos 45 120 tijolos. Na construção do primeiro, foram gastos  $\frac{3}{4}$  dos tijolos utilizados no segundo, e, neste, foram gastos  $\frac{5}{3}$  dos utilizados no terceiro. Quantos tijolos foram gastos para construir cada um dos três galpões?

58. Soma das frações correspondentes ao terceiro, segundo e primeiro, respectivamente:  $1 + (\frac{5}{3}) + (\frac{3}{4} \times \frac{5}{3}) = \frac{47}{12}$  que correspondem ao total de tijolos. Logo, para o terceiro ( $\frac{12}{12}$ ) foram gastos 11 520 tijolos, para o segundo, 19 200 tijolos e, para o primeiro, 14 400 tijolos.

59. A Prefeitura de certa cidade desapropriou  $\frac{1}{8}$  de um terreno pagando uma indenização de R\$ 24 000,00. Pela desapropriação de  $\frac{1}{9}$  de outro terreno vizinho do primeiro, e com mesma área, pagou R\$ 23 400,00. Qual dos dois terrenos teve avaliação maior pela Prefeitura?

59. Preço total do primeiro: 192 000 reais e, do segundo, 210 600 reais. Logo, para a Prefeitura, o segundo terreno teve maior valor total que o do primeiro.

60. Numa pizzeria, quatro pessoas pedem três pizzas para serem divididas igualmente entre elas. Cada pizza custa R\$ 16,00.

Copie a figura abaixo em seu caderno para fazer o desenho correspondente à divisão e marque nas pizzas a parte que cada uma das pessoas receberá. Em seguida, responda às perguntas.

- Em cada pizza, que fração representa a parte que cada pessoa receberá?
- Que fração das três pizzas cada pessoa receberá?
- Se cada pessoa paga pelos pedaços de pizza que recebeu, quanto pagará cada uma?



Loopall | Dreamstime.com

61. a) Pela figura,  $\frac{1}{8} + \frac{1}{4} = \frac{3}{8}$  representam o que Márcia gastou. Logo, os 650 reais restantes correspondem a  $\frac{5}{8}$  do que ela possuía. Então,  $\frac{1}{8}$  corresponde a  $650 : 5 = 130$  reais e  $\frac{8}{8}$  correspondem a  $8 \times 130$  reais, R) R\$ 1 040,00.

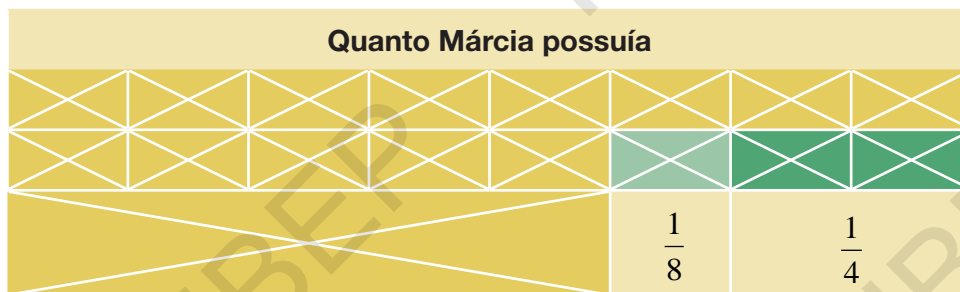
b) Em 6 partes iguais, R) 800 reais.

c) 12 partes. R) 720 reais.

d) O número de partes iguais em que a unidade é dividida é igual ao mínimo múltiplo comum de todos os denominadores dos problemas propostos. Se houver um único denominador, ele será o número de partes.

61. Pedrinho encontrou o seguinte problema num livro de matemática: Márcia gastou  $\frac{1}{8}$  e  $\frac{1}{4}$  do que possuía em duas compras, tendo ficado com R\$650,00. Quantos reais Márcia possuía?

Para resolvê-lo com mais facilidade, Pedrinho desenhou o diagrama abaixo:



a) Use o diagrama para resolver o problema.

b) Se, no problema, substituirmos as frações  $\frac{1}{8}$  e  $\frac{1}{4}$  por  $\frac{1}{6}$  e  $\frac{1}{3}$ , respectivamente, e a importância por R\$400,00, em quantas partes iguais ficaria dividida a unidade e qual seria a resposta do problema?

c) E se as substituições fossem  $\frac{1}{4}$ ,  $\frac{1}{6}$  e R\$ 420,00?

d) Qual a relação que existe entre o número de partes iguais em que a unidade é dividida e os denominadores dos problemas propostos?

62. a)  $\frac{9}{48}$ ;  
b)  $\frac{13}{48}$ ;  
c)  $\frac{42}{48}$ .

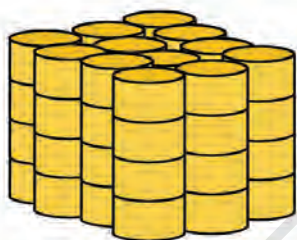
62. Certo dia, uma loja fez uma promoção de latas de tintas de mesma capacidade e marca, a partir das 8 horas. Na figura, você vê a evolução do estoque desde a hora em que começou a promoção até as 17 horas.

Que fração do estoque inicial tinha sido vendida:

a) Até as 10 horas?

b) Até as 15 horas?

c) Até as 17 horas?



8 horas



10 horas



15 horas



17 horas

**63.** Duas máquinas produzem o mesmo tipo de peças, mas, enquanto a primeira leva 3 horas para fazer uma caixa dessas peças, a outra leva 6 horas para fazer uma caixa com a mesma quantidade de peças.

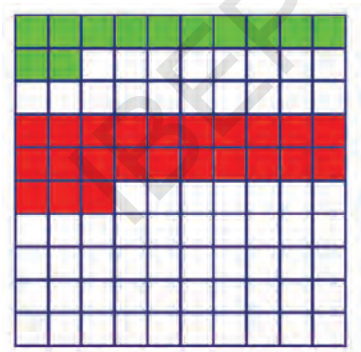
- Que fração da quantidade de peças a primeira máquina produz em uma hora? E a segunda máquina?
- Ligadas ao mesmo tempo, que fração da quantidade de peças as duas máquinas produzem em uma hora?
- Quantas horas levariam para fazer uma caixa contendo a mesma quantidade dessas peças?

**63.** a)  $\frac{1}{3}$  e  $\frac{1}{6}$  respectivamente;  
b)  $\frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2}$ ;  
c) Duas horas.

**64.** Observe o quadrado a seguir e responda:

- Quantos quadradinhos tem cada linha do mesmo? E cada coluna?
- O quadrado contém quantos quadradinhos?
- Se o quadrado representa o valor de certa grandeza, qual a fração de denominador 100 que você usaria para representar esse valor?
- Que fração e que decimal correspondem à parte colorida na cor verde?
- Que fração e que decimal correspondem à parte colorida em vermelho?
- Que fração e que decimal correspondem à parte não colorida entre a parte verde e a parte vermelha?
- Que fração e que decimal correspondem à união das duas partes coloridas?
- Escreva, em seu caderno, as adições de frações e decimais correspondentes à união das duas partes coloridas.
- Usando as somas das frações e decimais do item **h**, como calcular a fração e o decimal correspondentes à união das duas partes não coloridas?

**64.** a) Cada linha, 10 quadradinhos. Cada coluna, 10 quadradinhos;  
b) 100 quadradinhos;  
c)  $\frac{100}{100}$ ;  
d)  $\frac{12}{100} = 0,12$ ;  
e)  $\frac{23}{100} = 0,23$ ;  
f)  $\frac{18}{100} = 0,18$ ;  
g)  $\frac{35}{100} = 0,35$ ;  
h)  $\frac{12}{100} + \frac{23}{100} = \frac{35}{100}$ ;  
 $0,12 + 0,23 = 0,35$ ;  
i)  $\frac{100}{100} - \frac{35}{100} = \frac{65}{100}$   
ou  $1,00 - 0,35 = 0,65$ .



**65.** Você já sabe como multiplicar frações: basta multiplicar entre si os numeradores e entre si os denominadores e, ao final, para simplificar o resultado, dividem-se os membros da fração pelo máximo divisor comum dos mesmos. Por exemplo:

$$\frac{1}{5} \times \frac{15}{144} \times \frac{12}{13} = \frac{1 \times 15 \times 12}{5 \times 144 \times 13} = \frac{180}{9\,360} = \frac{3}{156}$$

(os termos foram divididos por 60)

**65.** a)  $\frac{1}{6}$ ;  
b)  $\frac{3}{14}$ ;  
c)  $\frac{1}{5}$ ;  
d)  $\frac{1}{52}$ .



66. a) Para medir dimensões de um quarto ou de um vão onde será colocada uma janela.  
 b) Para medir peças de madeira de um telhado, para fazer um caixote.  
 c) Para medir comprimentos de fios de eletricidade que se utilizará para ligar pontos como uma tomada de energia à rede geral de um imóvel, ou para ligar uma tomada a um ponto de iluminação.  
 d) Para calcular a quantidade recomendada de adubos ou outros materiais para cada tipo de plantação, ou para medir a profundidade recomendada para recolher amostras do solo para ter melhores resultados em suas plantações.  
 e) Para medir a quantidade de medicamentos a inserir em uma seringa de injeção, ou para medir a quantidade de gotas de determinada solução a ser administrada em um paciente.

Agora, veja como é possível simplificar antes de efetuar os cálculos na multiplicação a seguir:

$$\frac{7}{10} \times \frac{3}{11} \times \frac{10}{9} = \frac{7}{1} \times \frac{3}{11} \times \frac{1}{3} = \frac{7}{1} \times \frac{1}{11} \times \frac{1}{1} = \frac{7}{11}$$

Use o mesmo método para calcular os produtos a seguir, fazendo todas as simplificações possíveis antes de multiplicar:

$$\text{a) } \frac{3}{1000} \times \frac{500}{7} \times \frac{7}{9} \quad \text{b) } \frac{4}{7} \times \frac{5}{16} \times \frac{18}{15} \quad \text{c) } \frac{300}{7} \times \frac{7}{600} \times \frac{2}{5} \quad \text{d) } \frac{1}{5} \times \frac{15}{144} \times \frac{12}{13}$$

a) 1/6;

b) 3/14;

c) 1/5;

d) 1/52.

## Atividades complementares do capítulo 4

67. Como as pedras são do mesmo tipo de mármore e têm pesos iguais, podemos supor que seus volumes são proporcionais aos pesos, ou seja, seus volumes devem ser iguais. Logo, chamando de  $c$  o comprimento da segunda pedra, devemos ter:  $2,5 \times 1,8 \times 0,012 = c \times 0,6 \times 0,03$ , logo,  $0,054 = 0,018c$ , ou seja,  $c = 3$ . R) 3 metros.

68. Somando as horas trabalhadas, obteremos 37 horas. Somando os minutos, obteremos 105 minutos que equivalem a 60 minutos mais 45 minutos. Portanto, ele trabalhou 38 horas e 45 minutos excedentes e recebeu  $38 \times 8,40 + 45 \times 0,14$  reais. R) R\$ 325,50.

**Professor(a):** Observe, pelos dados do problema, que o valor para cada minuto excedente é diretamente proporcional ao valor de hora trabalhado. Neste caso, poderíamos ter calculado os valores de cada dia trabalhado e somado. O mesmo não ocorreria se o valor por minuto excedente não fosse diretamente proporcional ao valor aula. Explore este fato com exemplos.

69. a)  $(10 + 50)/800 = 75$ . R) 75 ml;  
 b)  $10/50 = 20/100 = 0,20$ . R) 20%.

66. Para cada um dos profissionais a seguir, cite pelo menos um exemplo de situação na qual ele usa números para medir:

a) Pedreiro; b) Carpinteiro; c) Eletricista; d) Agricultor; e) Enfermeiro.

67. Duas pedras, de um mesmo tipo de mármore, têm pesos iguais. A primeira tem 2,5 m de comprimento, 1,8 m de largura e 0,012 m de espessura. A segunda tem 0,6 m de largura e 0,03 m de espessura. Qual o comprimento da segunda pedra?

68. Um mecânico ganha R\$ 8,40 por hora de trabalho e R\$ 0,14 por minuto excedente, após somadas todas as horas trabalhadas na semana.

Na semana passada, foram registrados, em sua folha, os seguintes períodos diários de trabalho:

Dia	2ª feira	3ª feira	4ª feira	5ª feira	6ª feira
Horas de trabalho	8 h 13 min	7 h 15 min	8 h 18 min	8 h 12 min	6 h 47 min

Quanto ele recebeu por essa semana de trabalho?

69. Dispunha-se de 10 l de um desinfetante concentrado, que foram diluídos em 50 l de água pura.

Com toda a solução resultante, encheram-se completamente 800 vidros de igual capacidade.

- a) Qual era a capacidade de cada um desses vidros, em  $\text{m}\ell$ ?
- b) Qual a concentração percentual de desinfetante nesta solução?

70. Uma lata de 20 $\ell$  de óleo custou R\$ 128,00. Todo esse óleo foi colocado em embalagens de 250  $\text{m}\ell$ . Todas as embalagens foram vendidas ao mesmo preço com um lucro total de R\$ 360,00. Calcule o preço de venda de cada uma dessas embalagens.

70. Foram vendidas  $20\,000/250 = 80$  embalagens. O valor total das vendas foi  $128 + 360 = 488$ . Logo, cada embalagem custou  $488/80 = 6,10$  reais.

71. Jorge pagou R\$ 5,60 por 350 gramas de presunto.

71. R\$ 10,08.

Quanto Jorge teria pagado se tivesse comprado 630 gramas do mesmo presunto?

72. O comprimento, a largura e a altura internos da carroceria de um caminhão são, respectivamente, 3,5 m, 2 m e 0,8 m. O metro cúbico de areia custa R\$ 70,00.

72. R\$ 392,00.

Quanto vai custar uma carga completa de areia desse caminhão?

73. Numa sobreloja que mede 3,25 m de altura, foram empilhadas, até o teto, caixas de 12,5 cm de altura.

73. 26 caixas.

Calcule o número máximo de caixas colocadas em cada pilha.

74. Duas partidas de vôlei, disputadas em uma mesma quadra, em um mesmo dia, duraram 3 h 47 min 56 s e 2 h 45 min 52 s, respectivamente.

74. 6 h 48 min 48 s.

Calcule o tempo total de uso desta quadra se houve um intervalo de 15 min entre as duas partidas.

75. Manoel precisa embalar caixinhas em forma de paralelepípedos retângulo em caixotes com essa mesma forma.

75. 120 caixinhas.

Cada caixinha mede 2 cm por 10 cm por 12 cm. E cada caixote mede internamente, 20 cm por 40 cm por 36 cm. Calcule o número máximo de caixinhas que ele poderá colocar em cada caixote.

76. Numa padaria, 1 kg de queijo custa R\$ 22,40. Se Cláudia comprar 275 g desse queijo, quanto irá pagar?

76. R\$ 6,16.

77. Um comerciante comprou certa quantidade de manteiga pagando R\$ 16,00 o quilograma. Revendeu toda ela por R\$ 28,80 o quilograma. Nessa revenda, o lucro total desse comerciante foi de R\$ 704,00. Calcule a quantidade de manteiga comprada e revendida.

77. 55 kg

78. 6,480 litros.

78. Das 23 h de uma quarta-feira às 8 h da manhã seguinte, uma torneira mal fechada deixou vazar três gotas de água por segundo. Quinze dessas gotas correspondem a  $1\text{ cm}^3$ .

Calcule a quantidade de água perdida.

79. 47,75 kg.

79. Em determinada época, para se enviar correspondência de Belo Horizonte para o Rio de Janeiro, cobrava-se uma taxa de R\$ 0,82 por 100 gramas de peso. Certa empresa pagou, nessa época, R\$ 391,55 pela postagem de sua correspondência.

Calcule o peso total da correspondência enviada por essa empresa.

80. Em média, a cada 8 quilômetros, 1 litro de combustível foi consumido.

80. Observe este quadro:

Viagem	1ª	2ª	3ª	4ª	5ª
Distâncias percorridas	342 km	720 km	514 km	618 km	446 km
Litros	41,7	84,7	65,0	77,3	57,2

Nele, está anotado o consumo de combustível correspondente a cinco viagens de um determinado veículo.

Calcule o número médio de quilômetros percorridos por litro após as cinco viagens efetuadas por este veículo.

81. R\$ 6,00.

81. Certo dia, Luísa enviou para uma mesma cidade, três cartas que pesavam respectivamente, 40 g, 36 g e 64 g. Nessa postagem, ela gastou R\$ 8,40.

Quanto Luísa gastaria se quisesse mandar, para essa mesma cidade, no mesmo dia, uma outra carta que pesasse 100 g?

82. 1h 10 min 30s.

82. Certa máquina imprime 108 selos por minuto. Quanto tempo essa máquina levará para imprimir 7 614 selos?

83.  $V = \pi r^2 h$ . Logo,  $\pi 2^2 h = 24\pi \Rightarrow h = 6$  R) 6 metros.

83. Uma caixa d'água, em forma de cilindro de raio  $r\pi$  em metros, tem um volume de  $24\text{ m}^3$ .

Calcule a medida da altura.

84. Uma piscina, em forma de paralelepípedo retângulo, tem 25 m de comprimento e 15 m de largura. Nela, estão contidos 1 125 000 l de água.

Calcule a altura do nível da água.

84. 3 metros.

85. Um vaso cheio de água pesa 800 g. O peso desse vaso é igual a  $\frac{1}{7}$  do peso da água que ele contém. Calcule o peso do vaso.

85. 100 gramas.

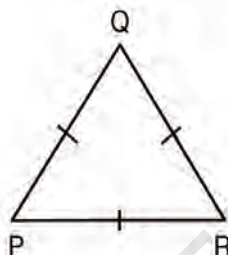
86. Um hidrômetro residencial registra um consumo médio de 2,4 l em um minuto. Mantido o consumo médio, após 1 h e 15 min, qual consumo esse mesmo hidrômetro registrará?

86. 180 litros.

## Atividades complementares do capítulo 5

87. Você já sabe que no triângulo ilustrado abaixo, as marcas iguais nos seus lados significam que eles têm a mesma medida, logo, ele é um triângulo equilátero.

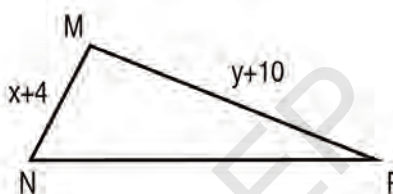
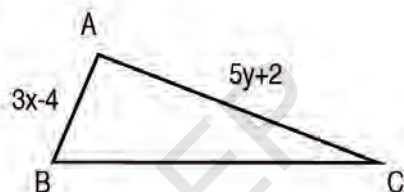
Calcule as medidas de seus lados usando as equações que forem necessárias, sabendo que  $PQ = 0,7x - 20$  e  $QR = 0,5x - 12$ .



87. Obtém-se  $x = 40$ , onde cada lado mede 8.

88. Observe os dois triângulos escalenos das figuras abaixo:

88.  $x = 4$  e  $y = 2$ .  $AB = 8$  e  $MP = 12$ .



Neles, os três pares de lados correspondentes são congruentes, isto é,  $AB = MN$ ,  $BC = NP$  e  $AC = MP$ .

- a) Calcule os valores de  $x$  e de  $y$ .  
b) Calcule as medidas dos lados  $AB$  e  $MP$ .

89. a) 23;  
b) 3,5;  
c) 6,53;  
d) 5.

89. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, os valores numéricos das expressões da primeira linha quando  $n$  é substituído pelo número indicado na segunda linha.

Expressão	$3n$	$4n + 3$	$\frac{n}{2} - 1$	$0,3n + 5$	$11 - 2n$
Valor de $n$	7	5	9	5,1	3
Resultado	21	a	b	c	d

90. a) R\$ 6,80;  
b) R\$ 7,90;  
c) R\$ 9,00.

90. Você já sabe que os sinais de multiplicação comumente utilizados são  $\times$  e um ponto.

Assim, “2 vezes  $n$ ” pode ser escrito como  $2 \times n$  ou  $2 \cdot n$ . Outra maneira de escrever “2 vezes  $n$ ” é assim:  $2n$  (sem símbolos entre o 2 e o  $n$ ).

O dono de uma papelaria calcula o preço  $V$  de venda de cada caderno, acrescentando, ao preço  $C$  de custo, 10% de seu valor, mais R\$ 0,20 de imposto.

Ele escreveu a fórmula no quadro de avisos:  $V = C + \frac{C}{10} + 0,20$

Calcule os preços de venda dos cadernos que custaram:

- a) R\$ 6,00;      b) R\$ 7,00;      c) R\$ 8,00.

91. a) R\$ 55,00;  
b)  $15 + 10N$ .

91. Um técnico em TV cobra R\$ 15,00 para visitar o cliente e mais R\$ 10,00 por hora de trabalho.

- a) Se o trabalho demorar 4 horas, quanto ele vai cobrar?  
b) E se o trabalho demorar  $N$  horas?

92. a)  $5 \cdot (x + 7) - 35 = 5x + 35 - 35 = 5x$ ;  
b)  $(6x + 15)/3 - 15/3 = (6x + 15 - 15)/3 = 6x/3 = 2x$ ;  
c)  $3 \cdot (x+2) + 2(3x-1) = 3x + 6 + 6x - 2 = 9x + 4$ .

92. Veja como Marlene fez os três cálculos a seguir:

$$1^{\circ}) 2 \cdot (3x + 5) = 2 \cdot 3x + 2 \cdot 5 = 6x + 10$$

$$2^{\circ}) \frac{15x + 3}{3} = \frac{15}{3}x + \frac{3}{3} = 5x + 1$$

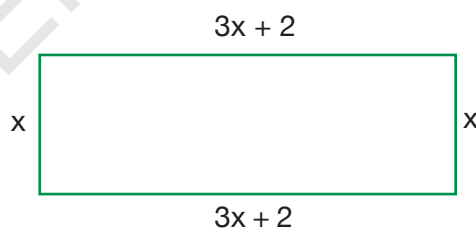
$$3^{\circ}) 2 \cdot (2x + 1) + 4 \cdot (3x - 2) = 4x + 2 + 12x - 8 = 4x + 12x + 2 - 8 = 16x - 6$$

Faça como Marlene e calcule :

- a)  $5 \cdot (x + 7) - 35$   
b)  $\frac{6x + 15}{3} - 5$   
c)  $3 \cdot (x + 2) + 2 \cdot (3x - 1)$



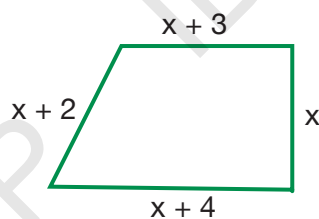
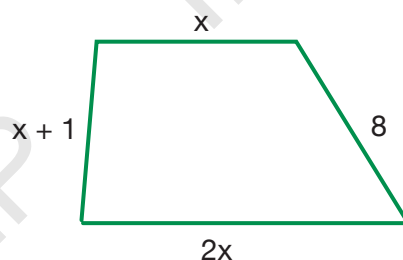
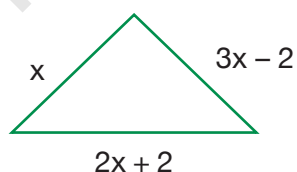
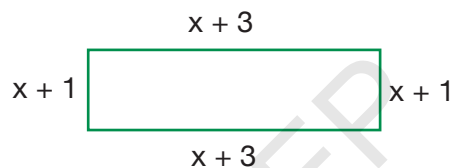
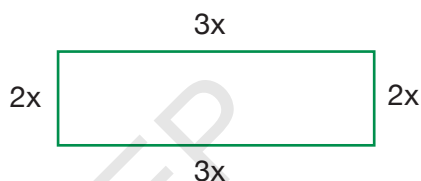
93. Veja como foi calculado o perímetro (soma das medidas dos lados) do retângulo a seguir:



93. Primeiro retângulo:  $3x + 2x + 3x + 2x = 10x$ ; segundo retângulo:  $4x + 8$ ; triângulo  $6x$ ; trapézio:  $4x + 9$ .

$$P = 2 \cdot x + 2 \cdot (3x + 2) = 2x + 6x + 4 = 8x + 4$$

Calcule, como no exemplo, os perímetros dos polígonos a seguir:



94. Pedro emprestou a Paulo o triplo do dinheiro que Paulo já possuía. Depois disso, Pedro e Paulo ficaram com R\$ 24,00 cada um. Quanto tinha cada um deles, antes do empréstimo?

94. Valores iniciais. Pedro:  $x$  Paulo:  $y$ . Depois do empréstimo: Pedro:  $x - 3y$  e Paulo  $4y$ . Logo,  $4y = 24 \Rightarrow y = 6$  e  $x - 18 = 24 \Rightarrow x = 42$ . Verificação:  $42 - 18 = 24$  e  $6 + 18 = 24$ . Logo, Pedro ficou com R\$ 42,00 e Paulo com R\$ 6,00.

95. Presunto: R\$ 4,80. Mussarela: R\$ 12,80. Total de R\$ 17,60.

95. Numa determinada mercearia, o preço de 1 kg de mussarela era o dobro do preço de 1 kg de presunto.

Ao comprar 200 g de presunto e 350 g de mussarela, Maria pagou R\$ 14,40.

Calcule o preço que Maria pagaria para comprar 300 g de presunto e 400g de mussarela.

96.  $A = B/3$  e  $C = B - 190$ .  
 $B + B/3 + B - 190 = 2820$   
 $\Rightarrow B = 1290$   $A = 430$   
 $B - A = 860$   
 R) R\$ 860,00.

96. Antônio, Beatriz e Cláudio possuem, juntos, R\$ 2 820,00. Cláudio tem R\$ 190,00 a menos que Beatriz e esta, o triplo do que tem Antônio.

Quanto Beatriz tem a mais que Antônio?

97. Se  $x$  representa a quantidade de camelos dada ao caçula, então  
 $x + 2x + 3x + 2 = 32$   
 R) Caçula: 5 camelos.  
 Filho do meio : 10 camelos. Filho mais velho: 17 camelos.

97. Um velho xeique árabe, antes de morrer, chamou sua mulher e disse: Meus 32 camelos serão dados aos meus 3 filhos. O filho do meio receberá o dobro do caçula e o mais velho, o triplo do caçula mais 2. Morto o xeique, quantos camelos recebeu cada um dos seus filhos?

98.  $35 + x = (9 + x) + (6 + x)$   
 $\Rightarrow x = 20$ .  
 Resposta: Dentro de 20 anos.

98. Em fevereiro deste ano, Ana completou 35 anos e suas filhas Cristina e Márcia completaram 9 e 6 anos, respectivamente (todas fazem aniversário nesse mês). Daqui a quantos anos a soma das idades das filhas será igual à idade da mãe?

99.  $2(x + 6 + x) = 92 \Rightarrow 4x + 12 = 92 \Rightarrow 4x = 80 \Rightarrow x = 20$ .  
 R) Comprimento, 26 metros; largura, 20 metros.

99. O comprimento de um jardim retangular é 6 metros maior que sua largura. Seu perímetro é de 92 metros. Quais são as medidas do jardim?



Alvera / Dreamstime.com

100.  $x + (x + 1) + (x + 2) = 10$   
 $+ (x + 1) + (x + 4) = x$   
 $= 12$  Linhas pela ordem:  
 10, 17, 12/ 15, 13, 11/  
 14, 9, 16.

100. No quadrado mágico abaixo, as somas dos três números escritos em cada linha, coluna ou diagonal é sempre a mesma.

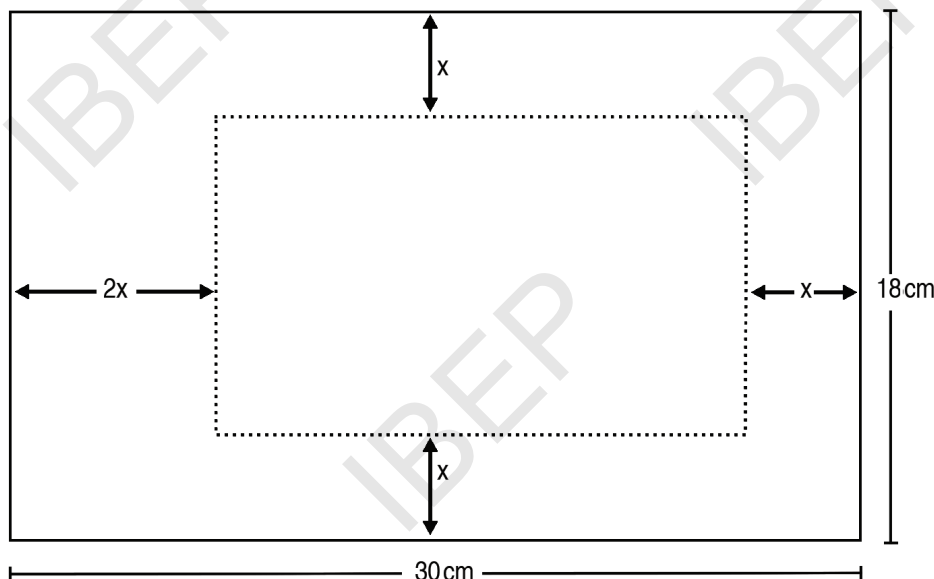
a) Calcule  $x$ .

b) Complete os números do quadrado mágico.

10		$x$
	$x + 1$	
$x + 2$		$x + 4$

101. Observe a figura abaixo:

101. R) 252 cm<sup>2</sup>.



Ela representa um cartão retangular de 30 cm por 18 cm. Nesse cartão, vai ser impressa uma mensagem que ocupará a área retangular tracejada, mantendo-se as margens assinaladas na figura. Se  $x$  mede 3 cm, calcule a área a ser impressa.

102. Antônio tem R\$ 2,80 a mais que Belizário e este, R\$ 3,50 a mais que Cláudio. Belizário e Cláudio têm, juntos, R\$ 104,62 a mais que Antônio. Quanto possuem os três juntos?

102. Antônio, R\$56,86, Belizário, R\$54,06 e Cláudio, R\$50,56. R) R\$ 161,48.

103. Armando, Beatriz e Carlindo possuem, juntos, R\$ 282,00. Carlindo tem R\$ 19,00 a menos que Beatriz e esta, o triplo do que tem Armando. Quanto Beatriz tem a mais que Armando?

103.  $b/3 + b + b - 19 = 282 \Rightarrow b = 129$ ,  $a = 43$ ,  $c = 110$ ; Armando, R\$ 43,00, Beatriz, R\$ 129,00 e Carlindo, R\$ 110,00. R) Beatriz tem R\$ 86,00 a mais que Armando.

104. O comprimento em metros de um terreno retangular é o triplo de sua largura. O perímetro desse terreno é de 96 m. Calcule a área desse terreno.

104.  $3x + x + 3x + x = 96 \Rightarrow x = 12$ . Área:  $36 \times 12 = 432$ . R) 432 metros quadrados.

105. Um refrigerante, um sanduíche e um salgadinho custam, juntos, R\$ 29,50. O refrigerante custa R\$ 1,50 a mais que o salgadinho e este, a quinta parte do preço do sanduíche.

105.  $5s + s + (s + 1,50) = 29,50 \Rightarrow s = 4$ . R) Salgadinho, R\$ 4,00; Sanduíche, R\$ 20,00 e refrigerante, R\$ 5,50. R) A diferença é de R\$ 14,50.

Calcule a diferença entre o preço do sanduíche e o do refrigerante.

106.  $(32 + x) - (21 + x) = 41,60 - 29,50$ . Logo, 11 metros cúbicos correspondem a R\$ 12,10. Portanto, o preço por metro cúbico é de R\$ 1,10.

106. Em certa cidade, a companhia fornecedora de água cobra, em cada conta que emite, uma taxa fixa pelos serviços de esgoto.

No mês de dezembro, Antônio consumiu  $32 \text{ m}^3$  de água e pagou um total de R\$ 41,60. No mesmo mês, Bernardo consumiu  $21 \text{ m}^3$  e pagou um total de R\$ 29,50.

Calcule o preço cobrado por metro cúbico de água.

107.  $43 + x = 3(5 + x) \Rightarrow x = 14$  R) R\$ 76,00.

107. Antônio e Bráulio possuíam R\$ 43,00 e R\$ 5,00, respectivamente. Após ambos receberem, a mais, uma mesma quantia, Antônio ficou com o triplo do que possuía Bráulio.

Calcule a soma das importâncias que ambos passaram a possuir.

108.  $D = F + 60 \Rightarrow F = D - 60$ ;  $D - 4,50 = 3F \Rightarrow D - 4,50 = 3(D - 60)$ . Logo,  $D = 92,25$ . De  $D - 4,50 = 3F$  resulta:  $92,25 - 4,50 = 3F$ , ou seja,  $F = \text{R\$ } 27,75$ . R) R\$ 7,75.

108. Dalmo recebe, por dia, R\$ 60,00 a mais que Fábio. Se ele gastar, diariamente, R\$ 4,50 com alimentação, fica, ainda, com o triplo do que Fábio recebe a cada dia.

Calcule quanto Fábio recebe, por dia.

109.  $A + P = 94$  e  $A - 6 + 10 = P - 10 \Rightarrow A = P - 14$  e  $P - 14 + P = 94 \Rightarrow P = 54$  e  $A = 40$ . R) R\$ 54,00.

109. Antônio e Pedro tinham, juntos, R\$ 94,00. Antônio perdeu R\$ 6,00. Pedro deu-lhe, então, R\$ 10,00 e, com isso, ambos ficaram com quantias iguais.

Calcule a quantia que Pedro possuía inicialmente.

110.  $(42 + x) + (48 + x) + 16x = 180 \Rightarrow x = 5$ . Logo, os ângulos medem 47 graus, 53 graus e 80 graus. Como as medidas dos ângulos são diferentes, o triângulo é um triângulo escaleno.

110. As medidas em graus dos três ângulos de um triângulo são representadas pelas expressões  $42 + x$ ,  $48 + x$  e  $16x$ . Calcule as medidas dos ângulos e diga o que você pode afirmar sobre este triângulo.

111.  $x = 20$ . Logo, os três ângulos medem 60 graus, e o triângulo é equilátero.

111. As medidas em graus dos três ângulos de um triângulo são representadas pelas expressões  $3x$  e  $2x + 20$  e  $11x - 160$ . Calcule as medidas dos ângulos e diga o que você pode afirmar sobre este triângulo.

112.  $5x + 10 + 4x + 7 + 3x + 19 = 180 \Rightarrow x = 12$ . Logo, os ângulos medem 70 graus, 55 graus e 55 graus. Logo, o triângulo é um triângulo isósceles.

112. As medidas em graus dos três ângulos de um triângulo são representadas pelas expressões  $5x + 10$ ,  $4x + 7$  e  $3x + 19$ . Calcule as medidas dos ângulos e diga o que você pode afirmar sobre este triângulo.

## Atividades complementares do capítulo 6

113. Na lista a seguir, quais as letras correspondentes aos pares de grandezas diretamente proporcionais?

113. Letras: a, d, g, i.

Grandeza A	Grandeza B	
Quantidade de laranjas	O valor pago por elas	<b>a</b>
Idade de uma pessoa	Altura de uma pessoa	<b>b</b>
Tempo de uma partida de futebol	Números de gols marcados	<b>c</b>
Tempo que uma torneira fica aberta com mesma vazão	Quantidade de água que sai da torneira neste tempo	<b>d</b>
Espessura de um livro	Preço do livro	<b>e</b>
Peso de uma pessoa	Altura de uma pessoa	<b>f</b>
Medida de lado de um quadrado	Perímetro de um quadrado	<b>g</b>
Medida do lado do quadrado	Área do quadrado	<b>h</b>
Número de bilhetes vendidos de uma rifa a um mesmo preço cada.	Dinheiro arrecadado com a venda dos bilhetes.	<b>i</b>

114. Três caixas iguais de bombons pesam 1,5 kg. Quantos quilos pesaram 5 caixas iguais do mesmo bombom?

114. 2,5 kg.

115. Aos 5 minutos do capítulo 532 da novela “Paixão Descabelada”, a atriz principal já tinha chorado oito vezes. É possível dizer quantas vezes ela chorou nos outros 25 minutos da novela?

115. Não. Não há proporcionalidade entre tais fatos.

116. Observe as tabelas a seguir e escreva em seu caderno quais números devem ser escritos em substituição às letras para que os números da linha I sejam diretamente proporcionais aos da linha II:

116. a = 9;  
b = 60;  
c = 160;  
d = 50;  
e = 15;  
f = 21;  
g = 126/5;  
h = 85/3;  
i = 2,4;  
j = 1,47;  
k = 0,3;  
l = 0,07.

I	16	36	<b>b</b>	<b>c</b>	200
II	4	<b>a</b>	15	40	<b>d</b>

I	3	9	<b>f</b>	<b>g</b>	17
II	5	<b>e</b>	35	42	<b>h</b>

I	1,2	0,24	<b>j</b>	0,03	<b>l</b>
II	12	<b>i</b>	14,7	<b>k</b>	0,7



117. a = 12 000  
b = 8 000  
c = 6 000  
d = 4 000  
e = 2 000

117. A importância de R\$ 24 000,00 vai ser distribuída em valores iguais entre algumas pessoas.

Observe a tabela a seguir e escreva em seu caderno quais números devem ser escritos em substituição às letras para que correspondam ao que cada pessoa receberá, dependendo da quantidade delas:

Número de pessoas	1	2	3	4	6	12
Valores em reais	24 000	a	b	c	d	e

118. Verdadeiro.

118. Verdadeiro ou falso:

No exercício anterior, as grandezas “número de pessoas” e “valores em reais” são inversamente proporcionais.

119. a = 2;  
b = 3;  
c = 8;  
d = 10;  
e = 7.

119. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, quais números devem ser escritos em substituição às letras para que os valores das grandezas G1 e G2 sejam inversamente proporcionais:

Dividindo G1 por:	2	3	c	d	7
G2 fica multiplicado por:	a	b	8	10	e

120. (4;30), (6;20); (12;2), (3;8); (9;16), (24;6); (5;5), (0,25, 100).

120. Copie, em seu caderno, e complete as tabelas para que os números da coluna **A** sejam inversamente proporcionais aos da coluna **B**.

A	B
2	60
4	
6	

A	B
24	1
12	
	8

A	B
36	4
9	
	6

A	B
2,5	10
5	
	100

121. a) 26;  
b) 12;  
c) 13,68.

121. Veja como Paula raciocinou para calcular 17% de 400:

$$17\% \text{ de } 400 \text{ é igual a } \frac{17}{100} \text{ de } 400 \text{ ou } \frac{17}{100} \times 400$$

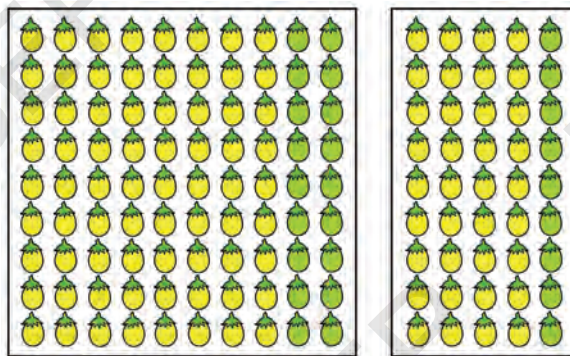
$$\text{mas } \frac{17}{100} \times 400 = \frac{17 \times 400}{100} = 17 \times 4 = 68.$$

Logo, 17% de 400 é igual a 68.

Agora, faça como Paula para calcular:

- a) 13% de 200      b) 15% de 80      c) 19% de 72

122. Na figura a seguir, você vê dois conjuntos contendo 100 e 50 objetos, respectivamente.



- a) No conjunto da esquerda, a quantidade de objetos amarelos corresponde a qual porcentagem do total de objetos do mesmo?  
b) No conjunto da direita, a quantidade de objetos verdes corresponde a qual porcentagem do total de objetos do mesmo?

122. a) 80%;  
b)  $10/50 = 20/100$  R) 20%.

123. Observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, os números que devem ser escritos em substituição às letras para que tais números correspondam à fração, porcentagem ou decimal contidos na mesma coluna.

%	5%	<b>b</b>	17%	<b>f</b>	105%	<b>j</b>
Fração	<b>a</b>	$\frac{31}{100}$	<b>d</b>	$\frac{120}{100}$	<b>h</b>	$\frac{231}{100}$
Decimal	0,05	<b>c</b>	<b>e</b>	<b>g</b>	<b>i</b>	<b>k</b>

123. a)  $5/100$ ;  
b) 31%;  
c) 0,31;  
d)  $17/100$ ;  
e) 0,17;  
f) 120%;  
g) 1,2;  
h)  $105/100$ ;  
i) 1,05;  
j) 231%;  
k) 2,31.

124. Uma camisa custava 25 reais e teve um aumento no preço de 22%. Qual o novo preço da camisa?

124.  $25 \times 1,22$  R) R\$ 30,50.

125. Marina comprou um fogão a gás pagando à vista, por isso ganhou um desconto de 13% sobre o preço do fogão que era de 200 reais. Calcule quanto Marina pagou pelo fogão.

125.  $200 \times (1 - 0,13) = 200 \times 0,87$   
 $= 174$  R) 174,00.

126. Uma geladeira custa R\$ 1 200,00. Calcule seu novo preço se ela tiver um aumento de :

a) 5%    b) 10%    c) 14%

126. a) R\$ 1 260,00;  
b) R\$ 1 320,00;  
c) R\$ 1 368,00.

127. Uma geladeira custava R\$ 1 200,00 e teve dois aumentos sucessivos de 5%. Calcule o novo preço da mesma.

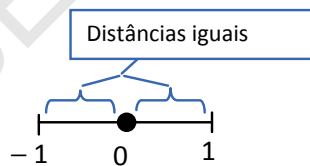
127.  $1\ 200 \times 1,05 \times 1,05 = 1\ 323$   
R) R\$ 1 323,00.

128. Compare as respostas do exercício 127 com a resposta do item **b** do exercício 126. Agora, responda: um aumento de 10% é equivalente a dois aumentos sucessivos de 5%?

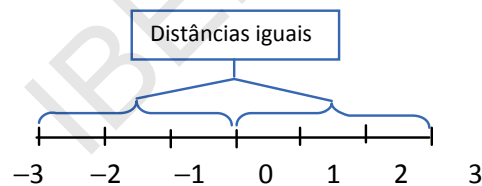
128. Não! Dois aumentos sucessivos de 5% são maiores que um aumento único de 10%.  
**Professor (a):** Explore situações análogas para que os alunos entendam o conceito de juros compostos.

## Atividades complementares do capítulo 7

Em cada figura, você vê um exemplo de dois números opostos:



$-1$  é o oposto de  $1$   
 $1$  é o oposto de  $-1$



$-3$  é o oposto de  $3$   
 $3$  é o oposto de  $-3$

129. a)  $+7$ ;  
b)  $-9$ ;  
c)  $+1,4$ ;  
d)  $-5,03$ .

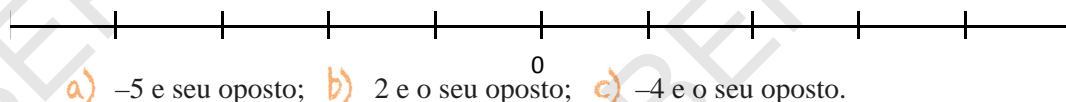
129. Escreva, em seu caderno, os números opostos de:

- a)  $-7$ ; b)  $+9$ ; c)  $-1,4$ ; d)  $+5,03$ .

130. Atividades dos alunos.

130. Nesse exercício, você vai usar o que foi visto acima:

Copie a reta abaixo em seu caderno, e marque na mesma:



- a)  $-5$  e seu oposto; b)  $2$  e o seu oposto; c)  $-4$  e o seu oposto.

131. a) Positivo;  
b) Negativo;  
c) Zero.

131. Complete em seu caderno:

- a) O oposto de um número negativo é um número ....  
b) O oposto de um número positivo é um número ....  
c) O oposto do número zero é .....

132. a)  $-7$ ;  
b)  $7$ ;  
c)  $-9$ ;  
d)  $9$ ;  
e)  $+6$ ;  
f)  $6$ ;  
g)  $+10$ ;  
h)  $10$ ;  
i)  $-5,3$ ;  
j)  $5,3$ ;  
k)  $+6,9$ ;  
l)  $6,9$ .

132. Observe a tabela abaixo: ela contém números, seus opostos e seus valores absolutos.

Número	$+4$	$+7$	$-4$	$-7$	$+5$	$-6$	$0$
Oposto do número	$-4$	$-7$	$+4$	$+7$	$-5$	$+6$	$0$
Valor absoluto do número	$4$	$7$	$4$	$7$	$5$	$6$	$0$

Agora, observe a tabela a seguir e escreva, em seu caderno, os números correspondentes a cada uma das letras da mesma:

Número	$+7$	$+9$	$-6$	$-10$	$+5,3$	$-6,9$
Oposto	a	c	e	g	i	k
Valor absoluto do número	b	d	f	h	j	l

133. Complete em seu caderno as frases a seguir usando uma das expressões: “o próprio número”, “o oposto do número” ou “é zero”.

- a) O valor absoluto de um número negativo é ...  
 b) O valor absoluto de zero é....  
 c) O valor absoluto de um número positivo é ....

133. a) O oposto do número;  
 b) Zero;  
 c) O próprio número.

134. Escreva, em seu caderno, os números correspondentes às letras da tabela a seguir:

Durante a semana					
	Eu tinha ( + )	Paguei ( - )	Cálculo indicado	Fiquei com	Fiquei devendo
2ª	+20	-12	$(+20) + (-12) = 8$	8	0
3ª	+7	-16	$(+7) + (-16) = -9$	0	9
4ª	+32	-32	$(+32) + (-32) = 0$	<b>a</b>	<b>b</b>
5ª	+41	0	$(+41) + 0 = 41$	<b>c</b>	0
6ª	0	-15	$0 + (-15) = -15$	0	<b>d</b>
Sab.	+14	-18	$(+14) + (-18) = -4$	0	<b>e</b>
Total	+114	-93	<b>f</b>	<b>g</b>	0

134. a) 0;  
 b) 0;  
 c) 41;  
 d) 15;  
 e) 4;  
 f)  $(+114) + (-93) = 21$ ;  
 g) 21.

135. Copie e complete, em seu caderno, com base nos resultados da tabela anterior, sublinhando a palavra correta, a seguinte frase: a soma de um número positivo e outro negativo é um número cujo valor absoluto é (a soma; a diferença) dos valores absolutos dos dois números e tem o mesmo sinal daquele que tem (maior; menor) valor absoluto.

135. A soma de um número positivo e outro negativo é um número cujo valor absoluto é (a soma; a diferença) dos valores absolutos dos dois números e tem o mesmo sinal daquele que tem (maior; menor) valor absoluto.

136. Escreva, em seu caderno, os números correspondentes às letras da tabela a seguir:

Tinha e recebi				
	Eu tinha ( + )	Recebi ( + )	Cálculo indicado	Fiquei com
	20	12	$(+20) + (+12) = \mathbf{a}$	<b>b</b>
	7	16	$(+7) + (+16) = \mathbf{c}$	<b>d</b>
Soma	27	28	$(+27) + (+28) = \mathbf{e}$	<b>f</b>

136. a) +32;  
 b) 32;  
 c) +23;  
 d) 23;  
 e) +55;  
 f) 55.

137. A soma de dois números positivos é um número (negativo, positivo) cujo valor absoluto é (a soma, a diferença) dos valores absolutos dos dois números.

138. a) -32;  
b) 32;  
c) -23;  
d) 23;  
e) -64;  
f) 64;  
g) 59;  
h) 60;  
i)  $(-59) + (-60) = -119$ ;  
j) 119.

139. A soma de dois números negativos é um número (negativo, positivo) cujo valor absoluto é (a soma, a diferença) dos valores absolutos dos dois números.

**Professor(a):** Escreva, no quadro, as adições a seguir:

- a)  $(+20) + (-12) = 8$   
 $(+7) + (-16) = -9$ ;  
b)  $(+20) + (+12) = +32$   
 $(+7) + (+16) = +23$ ;  
c)  $(-20) + (-12) = -32$   
 $(-7) + (-16) = -23$ .

**Comente:** Os sinais + têm duas funções: a primeira para representar adições, como em todos os itens a, b e c acima, os sinais + entre os pares de parênteses e, a segunda, para representar números positivos, como em  $(+20)$ ,  $(+7)$ ,  $(+16)$ ; já os sinais - em  $(-12)$ ,  $(-16)$  representam números negativos, enquanto na expressão  $(+17) - (+8)$ , o sinal - entre os pares de parênteses representa uma subtração.

140. a) 20 gramas;  
c) Para menos.

141. a) -2;  
b) -5,5;  
c) 4,5;  
d) -2,5;  
e) 6.

137. Copie e complete, em seu caderno, com base nos resultados da tabela anterior, sublinhando a palavra correta, a seguinte frase: a soma de dois números positivos é um número (negativo, positivo) cujo valor absoluto é (a soma, a diferença) dos valores absolutos dos dois números.

138. Escreva, em seu caderno, os números correspondentes às letras da tabela a seguir:

Tinha dívida e gastei mais				
	Eu devia ( - )	Gastei mais ( - )	Cálculo indicado	Fiquei devendo
	20	12	$(-20) + (-12) = \mathbf{a}$	<b>b</b>
	7	16	$(-7) + (-16) = \mathbf{c}$	<b>d</b>
	32	32	$(-32) + (-32) = \mathbf{e}$	<b>f</b>
<b>Total</b>	<b>g</b>	<b>h</b>	<b>i</b>	<b>j</b>

139. Copie e complete, em seu caderno, com base nos resultados da tabela anterior, sublinhando a palavra correta, a seguinte frase: a soma de dois números negativos é um número (negativo, positivo) cujo valor absoluto é (a soma, a diferença) dos valores absolutos dos dois números.

140. Ao verificar se os pesos marcados em 10 embalagens de determinado produto correspondem ao peso real, o funcionário de um supermercado pesou 10 pacotes que deveriam ter, cada um, 250 gramas. Ele anotou, em cada um, as diferenças encontradas, em gramas, usando números positivos para embalagens com peso maior, e negativos, para embalagens com peso menor, como se vê a seguir:

+5	-8	-12	+11	-7	-15	-5	+9	-2	+4
----	----	-----	-----	----	-----	----	----	----	----

- a) Qual a diferença total em gramas?  
b) Esta diferença total foi para mais ou para menos?

141. Escreva, em seu caderno, os números que substituem corretamente cada letra da terceira linha da tabela abaixo.

<b>x</b>	4,5	5,5	-4	7	-6	3,5
<b>y</b>	-2,5	-7,5	-1,5	-2,5	3,5	2,5
<b>x + y</b>	2,0	<b>a</b>	<b>b</b>	<b>c</b>	<b>d</b>	<b>e</b>



142. Escreva, em seu caderno, os números que substituem corretamente cada letra de **a** até **e**.

1ª parcela	<b>a</b>	<b>b</b>	-2	-8	<b>e</b>
2ª parcela	2	6	<b>c</b>	<b>d</b>	5
Soma	5	18	-5	-15	-16

142. a) 3;  
b) 12;  
c) -3;  
d) -7;  
e) -21.

143. Escreva, em seu caderno, as expressões que substituem corretamente as letras escrevendo a subtração como soma, usando o número oposto:

Subtração	Soma com o oposto
$(+7) - (+4) = +3$	$(+7) - (+4) = (+7) + (-4) = +3$
$(+5) - (-3) = +8$	<b>a</b>
$(-8) - (+6) = -14$	<b>b</b>
$(-6) - (-2) = -4$	<b>c</b>

143. a)  $(+5) - (-3) = (+5) + (+3) = +8$ ;  
b)  $(-8) - (+6) = (-8) + (-6) = -14$ ;  
c)  $(-6) - (-2) = (-6) + (+2) = -4$ .

144. Numa sacola, existem bolas vermelhas e brancas. Elas são usadas para um jogo cuja regra é: cada jogador retira da sacola um mesmo número de bolas. As **brancas** contam como **pontos positivos** e, as **vermelhas**, como **pontos negativos**. Na tabela a seguir, você vê como ficou a situação de cada jogador após todos terem retirado as bolas. Complete em seu caderno as expressões que substituem corretamente cada letra da tabela.

	Brancas	Vermelhas	Cálculo
<b>Antônio</b>	6	4	$(+6) + (-4) = 2$
<b>Bernardo</b>	3	4	<b>a</b>
<b>Carla</b>	6	3	<b>b</b>
<b>Denise</b>	7	7	<b>c</b>

144. a)  $(+3) + (-4) = -1$ ;  
b)  $(+6) + (-3) = +3$ ;  
c)  $(+7) + (-7) = 0$ .  
145. a) 50;

- b) 50%;  
c) 25;  
d) 25%;  
e) 25;  
f) 25%.

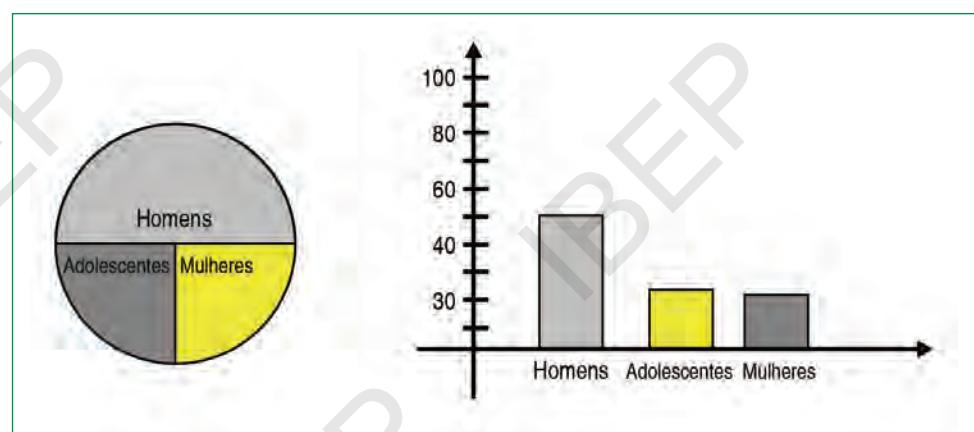
145. Em um supermercado, trabalham 75 adultos e 25 adolescentes. Dos adultos, 50 são homens e 25 são mulheres.

Com estes dados, escreva, em seu caderno, os números e porcentagens que substituem corretamente cada letra da tabela a seguir:

Empregados	Número de empregados	Porcentagem
Homens	a	b
Mulheres	c	d
Adolescentes	e	f

146. Soluções dos alunos.

146. Observe como representar em gráficos de setores e de colunas, os dados do problema anterior:



147.

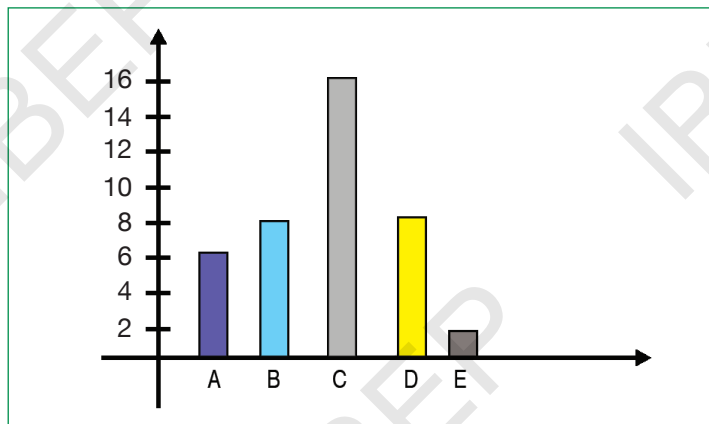
Conceitos	A	B	C	D	E
Frequências	6	8	16	8	2

Com base no exercício anterior, represente, em tabela e em gráficos de setores e de colunas, a distribuição de funcionários de uma empresa, se os dados forem: 60 adultos e 40 adolescentes, e se, dos adultos, 40 forem homens e 20 forem mulheres.

147. Na escola ABC, os conceitos de cada bimestre são representados pelas letras: A, B, C, D, e E, em ordem decrescente nas avaliações. No primeiro bimestre, em Matemática, 6 alunos tiveram conceito A, 8 tiveram conceito B, 16 tiveram conceito C, 8 tiveram conceito D e 2 tiveram conceito E.

Construa, em seu caderno, uma tabela de frequência com duas linhas, a primeira contendo as letras dos conceitos e, a segunda, as respectivas frequências de tais conceitos.

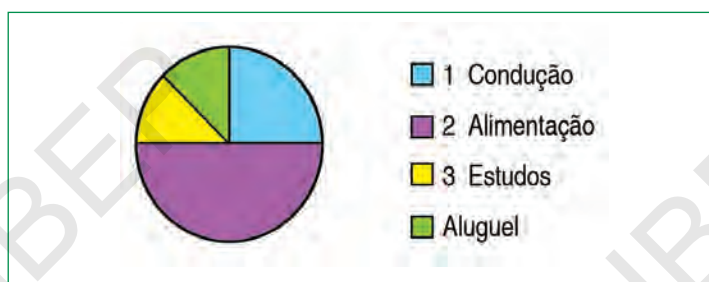
148. Observe o gráfico de colunas correspondente à tabela de frequência que você construiu ao resolver o problema anterior:



Agora, construa em um papel quadriculado um gráfico de colunas que represente os dados contidos na tabela de frequência a seguir:

Notas em Geografia	Frequência
3	4
4	2
5	6
6	8
7	12
8	2
9	4
10	2

149. No gráfico de setores a seguir, você vê dois setores de 45 graus, um de noventa graus e outro de 180 graus.



Do total da renda familiar do Sr. Fábio, esse gráfico representa 64% das despesas. Escreva, em seu caderno, em porcentagens, quanto representam, da renda familiar do Sr. Fábio, as despesas com os quatro itens: condução, alimentação, estudos e aluguel.

148. Gráficos feitos pelos alunos.

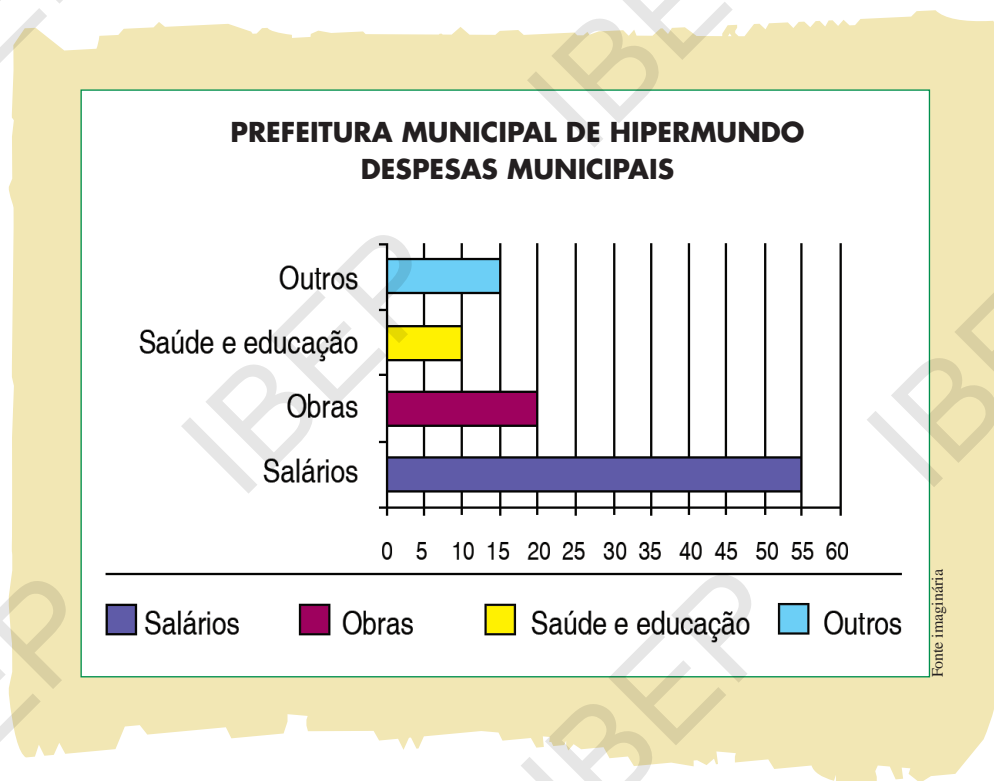
149. Condução e alimentação:  $12,5\%$  de  $64\% = 0,125 \times 0,64 = 0,08$  R) 8%

Estudos: 16%; Aluguel: 32%.

Professor (a) : Comente que, em exercícios anteriores, foram utilizados gráficos de setores para comparar as relações existentes entre um conjunto e suas partes. O gráfico de setores é o indicado quando se deseja visualizar melhor essas relações, facilitando a comparação das partes com o todo e das partes entre si.

150. a) Em saúde e educação;  
b) Em salários;  
c) Em obras.

150. No gráfico de barras a seguir, você vê as despesas da Prefeitura Municipal de Hipermundo. Consideradas como totalizando 100% das despesas, cada uma é representada pelo percentual correspondente:



Escreva em seu caderno:

- Em que a Prefeitura tem menor despesa?
- Em que a Prefeitura tem maior despesa?
- Em qual dos itens a Prefeitura gasta 20% do total de suas despesas?

151.

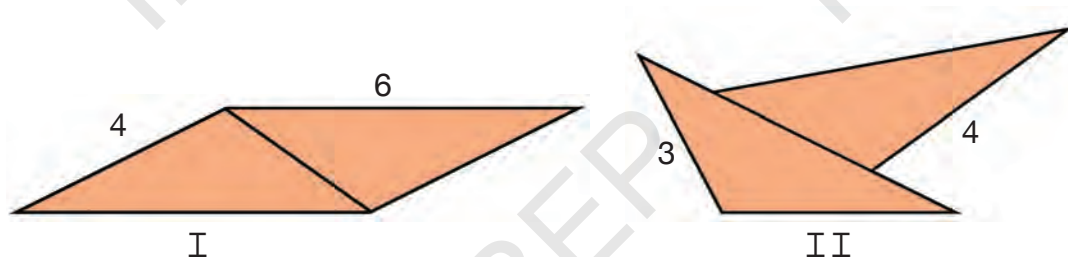
- a)  
Outros:  $15\% - 3\% = 12\%$ ;  
Obras:  $20\% - 2\% = 18\%$ ;  
Salários:  $55\% - 11\% = 44\%$ ;  
Saúde e educação:  $10\% + 3\% + 2\% + 11\% = 26\%$ .  
b) 30%.  
c) Gráfico do(a) aluno(a).

151. O novo prefeito do município de Hipermundo viu o gráfico de barras de despesas da prefeitura (que foi apresentado na atividade anterior), e não gostou muito da porcentagem destinada à “Saúde e educação”. Ele resolveu direcionar mais verbas para essas duas áreas da seguinte forma: retirou 20% das despesas destinadas a “Outros”, 10% das despesas destinadas a “Obras”, e 20% das despesas destinadas a “Salários”, e transferiu esses valores para o item “Saúde e educação”. Com base nessas informações, responda ou faça o que se pede:

- Após as modificações do novo prefeito, como ficaram as porcentagens das despesas com cada um dos itens citados?
- Qual foi o aumento percentual das despesas com Saúde e educação?
- Desenhe o gráfico de barras correspondente à nova distribuição de despesas.

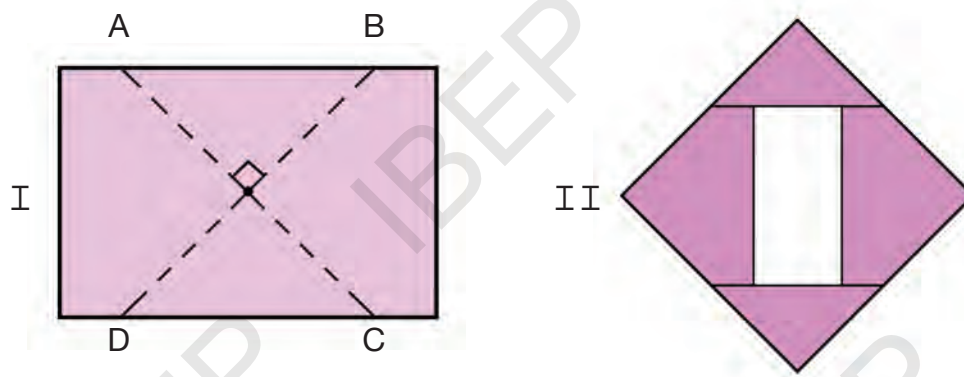
## Desafios

1. (OBMEP 2006) Miguilim brinca com dois triângulos iguais cujos lados medem 3 cm, 4 cm e 6 cm. Ele forma figuras planas unindo um lado de um triângulo com um lado do outro, sem que um triângulo fique sobre o outro. Abaixo, vemos duas das figuras que ele fez:



- Quais os comprimentos dos lados que foram unidos nas figuras I e II?
- Calcule os perímetros das figuras I e II.
- Qual o menor perímetro de uma figura que Miguilim pode formar? Desenhe duas figuras que ele pode formar com esse perímetro.

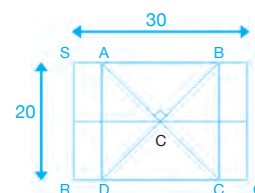
2. (OBMEP 2006) Uma folha retangular de 20 cm por 30 cm foi cortada ao longo das linhas tracejadas AC e BD em quatro pedaços: dois triângulos iguais e dois polígonos iguais de cinco lados cada um, como na figura I. Os segmentos AC e BD têm o mesmo comprimento e se encontram no centro do retângulo formando ângulos retos.



- Qual é o comprimento do segmento AB?
- Qual é a área de um pedaço triangular? E de um pedaço de cinco lados?
- Com os quatro pedaços podemos montar um quadrado com um buraco retangular, como na figura II. Qual é a área do buraco?

- I: lados de comprimento 3 cm; II: lados de comprimentos 6 cm e 4 cm.
  - Do item (a), vê-se que o perímetro da figura I é  $4 + 6 + 4 + 6 = 20$  cm; e da figura II, é  $6 + 4 + 3 + 4 + (6 - 3) = 20$  cm.
  - Para obter o menor perímetro, é preciso unir os lados maiores, ou seja, os lados de 6 cm. São duas possibilidades.

- Representando a folha original pelo retângulo PQRS (abaixo) e considerando o quadrilátero ABCD, para calcular AB, basta mostrar que ABCD é um quadrado.

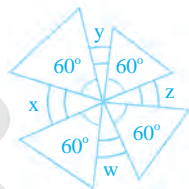


Observe que as diagonais AC e BD são iguais, cortam-se ao meio e são perpendiculares. Então ABCD é de fato um quadrado, e  $AB = BC = PQ = 20$  cm.

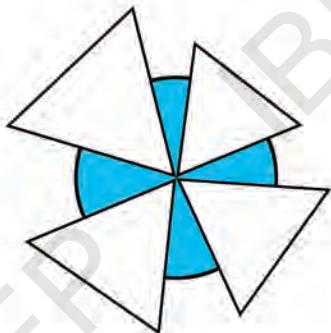
- Os pedaços triangulares têm como área  $1/4$  do quadrado, de onde a área de cada um é  $1/4 \times 20^2 = 100$  cm<sup>2</sup>. A folha original tem área igual a  $20 \times 60 = 600$  cm<sup>2</sup>; a área da folha corresponde à soma das áreas dos dois polígonos de 5 lados (P) e de dois triângulos (T), ou seja,  $600 = 2P + 2T$ , de onde  $P = 300 - T = 200$  cm<sup>2</sup>.
- O buraco é um retângulo cuja altura é igual à da folha original, ou seja, 20 cm, e cuja base é a diferença entre a base da folha original e o segmento AB, ou seja, 10 cm. Assim, a área do buraco é  $20 \times 10 = 200$  cm<sup>2</sup>.



3. Como os quatro triângulos são equiláteros, cada um de seus ângulos mede  $60^\circ$ . Logo, a soma dos ângulos  $x$ ,  $y$ ,  $z$  e  $w$  na figura é  $x + y + z + w + 360^\circ - 4 \times 60^\circ = 360^\circ - 240^\circ = 120^\circ$ . Como  $360^\circ : 120^\circ = 3$ , a área azul representa  $1/3$  da área do círculo, ou seja, ela mede  $36 : 3 = 12 \text{ cm}^2$ .



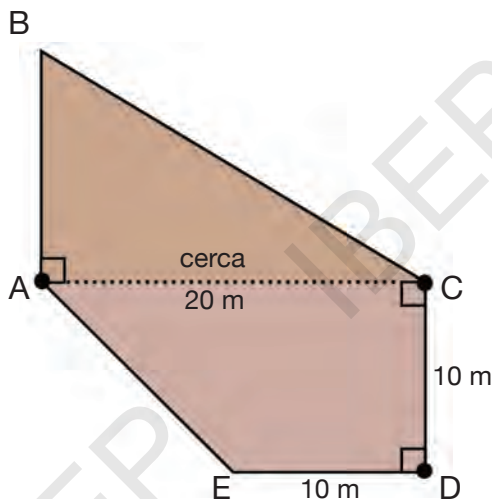
3. (OBMEP 2006) A figura mostra um círculo de área  $36 \text{ cm}^2$  sobre o qual estão desenhados quatro triângulos equiláteros com um vértice comum no centro do círculo. Qual é a área da região azul?



4. a)  $270 \text{ m}^2$

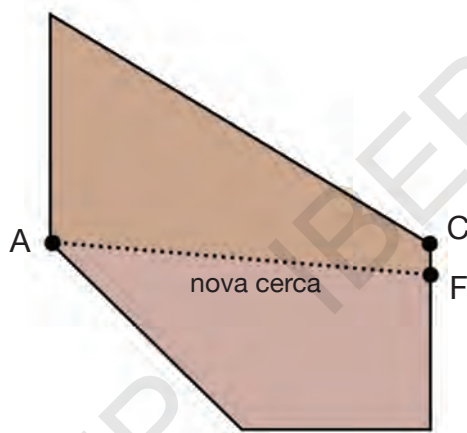
b) A área de  $ABCF$  deve ser  $270/2 = 135 \text{ m}^2$ . Logo, a área do triângulo  $ACF$  deve ser  $15 \text{ m}^2$ , ou seja,  $AC \times CF/2 = 20 \times CF/2 = 15$ , de onde  $CF = 1,5 \text{ m}$ .

4. (OBMEP 2008) A figura abaixo representa o terreno de Dona Idalina. Esse terreno é dividido em duas partes por uma cerca, representada pelo segmento  $AC$ . A parte triangular  $ABC$  tem área igual a  $120 \text{ m}^2$ .

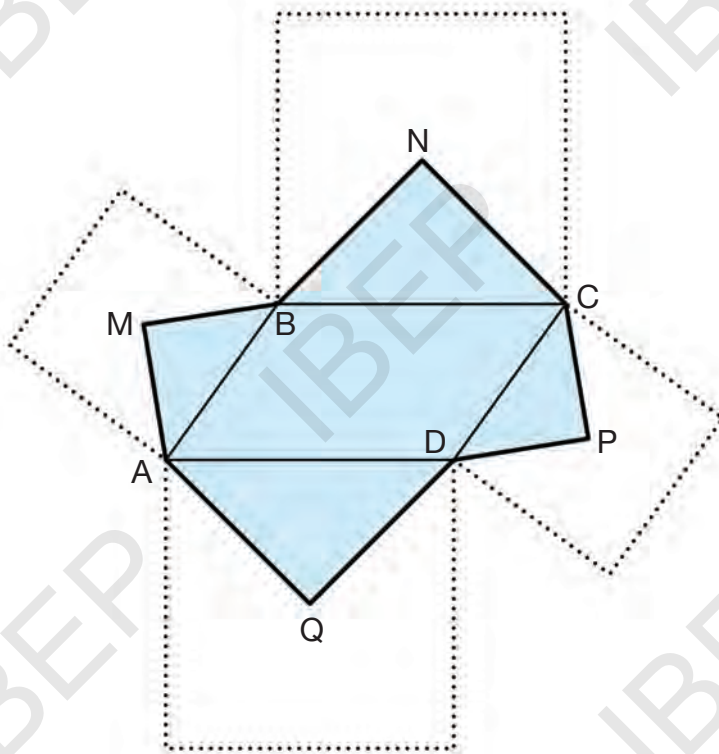


a) Qual é a área total do terreno?

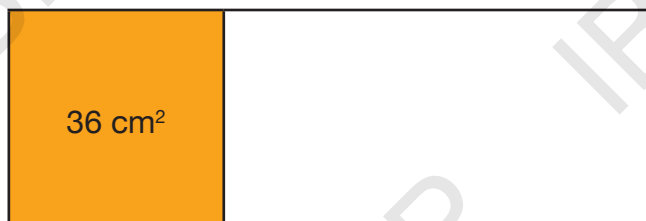
b) Dona Idalina quer fazer uma nova cerca, representada pelo segmento  $AF$  na figura, de modo a dividir o terreno em duas partes de mesma área. Qual deve ser a distância  $CF$ ?



5. (OBMEP 2008) Na figura, ABCD é um paralelogramo de área  $20 \text{ cm}^2$  e lados medindo  $4 \text{ cm}$  e  $6 \text{ cm}$ . Os pontos M, N, P e Q são os centros dos quadrados construídos sobre os lados do paralelogramo.



- a) Calcule a área do polígono AMBNCPDQ.  
b) Mostre que os ângulos MAQ e MBN têm a mesma medida.  
c) Mostre que MNPQ é um quadrado e calcule sua área.
6. (OBMEP 2010) A professora Clotilde desenhou três figuras no quadro-negro, todas com área igual a  $108 \text{ cm}^2$ .
- a) A primeira figura é um retângulo que tem um lado de comprimento igual a  $12 \text{ cm}$ . Qual é o perímetro desse retângulo?  
b) A segunda figura é um retângulo dividido em um retângulo branco e um quadrado laranja de área igual a  $36 \text{ cm}^2$ , como na figura abaixo. Qual é o perímetro do retângulo branco?



5. a) O polígono AMBNCPDQ pode ser dividido no paralelogramo ABCD e nos triângulos AMB, BNC, CPD e DQA. Como M, N, P e Q são centros de quadrados, a área de cada um desses triângulos é um quarto da área do quadrado correspondente. Logo, a área procurada é  $\text{área}(ABCD) + \text{áreas dos triângulos} = 20 + (16 + 16 + 36 + 36)/4 = 46 \text{ cm}^2$ .

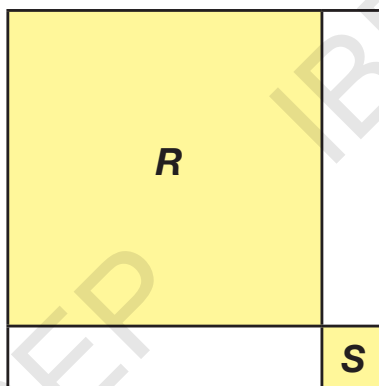
b) Seja  $\alpha$  a medida do ângulo DAB. Como ABCD é um paralelogramo, segue que  $\angle ABC = 180^\circ - \alpha$ . Por outro lado, como M, N e Q são centros dos quadrados correspondentes, tem-se  $\angle MAQ = \angle QAD + \angle DAB + \angle BAM = 45^\circ + \alpha + 45^\circ = 90^\circ + \alpha$  e  $\angle MBN = 360^\circ - (\angle ABM + \angle ABC + \angle NBC) = 360^\circ - (45^\circ + (180^\circ - \alpha) + 45^\circ) = 90^\circ + \alpha = \angle MAQ$ .

c) Para calcular a área do polígono, observe que como os quadrados sobre AB e CD são iguais, bem como os quadrados sobre BC e AD, e como M, N, P e Q são centros desses quadrados, temos  $AM = MB = CP = PD$  e  $BN = NC = AQ = QD$ . Por outro lado, segue do item anterior que  $\angle MAQ = \angle MBN = \angle NCP = \angle PDQ$ , de onde os triângulos QAM, MBN, NCP e PDQ são congruentes. Como MNPQ é obtido de AMBNCPDQ, retirando-se os triângulos QAM e NCP e adicionando-se os triângulos MBN e PDQ, temos  $\text{área}(MNPQ) = \text{área}(AMBNCPDQ) = 46 \text{ cm}^2$ . As congruências dos triângulos citados mostra que MNPQ é um losango. Para mostrar que MNPQ é um quadrado, basta então mostrar que um de seus ângulos internos é igual a  $90^\circ$ ; mas  $\angle QMN = \angle BMN + \angle QMB = \angle QMA + \angle QMB = 90^\circ$ , e segue que MNPQ é um quadrado.

6. a) Como a área é  $108 \text{ cm}^2$ , e um lado mede  $12 \text{ cm}$ , então o outro lado L é tal que  $L \times 12 = 108$ , ou seja,  $L = 9$ . Assim, o perímetro é  $42 \text{ cm}$ .

- b) Como o quadrado laranja tem área  $36 \text{ cm}^2$ , seu lado mede  $6 \text{ cm}$ ; o retângulo branco tem área  $108 - 36 = 72 \text{ cm}^2$ , de onde seu outro lado  $L = 72/6 = 12 \text{ cm}$ . Logo, o perímetro do retângulo é  $(2 \times 6) + (2 \times 12) = 36 \text{ cm}$ .
- c) Designamos por  $b$  e  $h$  os lados de  $S$  e  $R$ , respectivamente. Assim,  $2 \times (b + h) = 3 \times (4b)$ , de onde  $h = 5b$ . Por outro lado,  $(b + h)^2 = 108 \text{ cm}^2$ , de onde  $b^2 = 108/36 = 3$ . A área de  $R$  é  $h^2 = 25 \times 3 = 75 \text{ cm}^2$ .

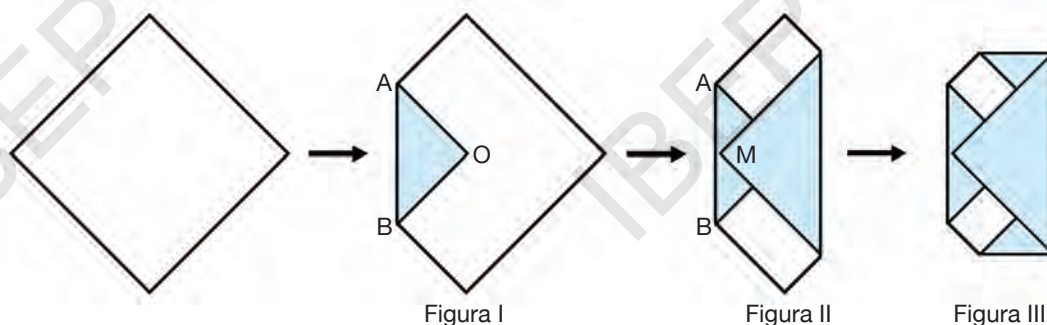
- c) A terceira figura é um quadrado, que ela dividiu em dois retângulos brancos e dois quadrados amarelos  $R$  e  $S$ , como na figura. O perímetro de um dos retângulos é igual a três vezes o perímetro do quadrado  $S$ . Qual é a área do quadrado  $R$ ?



7. Quadricule o quadrado original com uma malha  $4 \times 4$ , e então fica fácil ver as áreas não ocultadas pelas dobras. As respostas são:

- a)  $3/4$  da área do quadrado, ou seja,  $12 \text{ cm}^2$ .  
b) Dois retângulos  $2 \times 1$ , ou seja,  $4 \text{ cm}^2$ .  
c) Dois quadrados  $1 \times 1$ , ou seja,  $2 \text{ cm}^2$ .

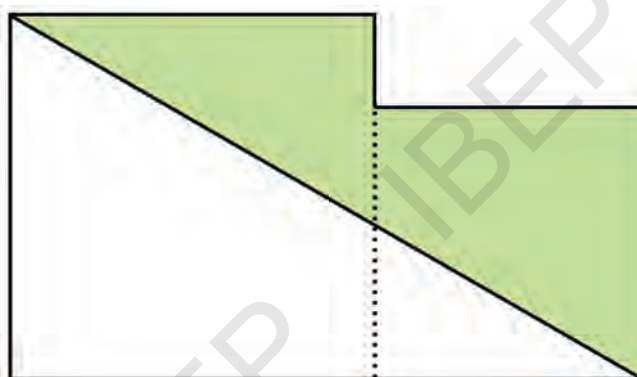
7. (OBMEP 2012) Uma folha de papel quadrada de área  $16 \text{ cm}^2$ , branca de um lado e azul de outro, foi dobrada como indicado abaixo. O ponto  $O$  é o centro do quadrado e  $M$  é o ponto médio do segmento  $AB$ .



- a) Qual é a área da região branca na Figura I?  
b) Qual é a área da região branca na Figura II?  
c) Qual é a área da região branca na Figura III?

8. Acrescente ao “dente” da figura, um retângulo  $T$   $2 \text{ cm} \times 6 \text{ cm}$ . Com essa adição, a figura torna-se um retângulo de área  $14 \times 8 = 112 \text{ cm}^2$ . A área da região colorida + a área de  $T$  é a metade desse retângulo, de onde  $\text{área}(\text{região}) + \text{área}(T) = 56 \text{ cm}^2$ , e portanto  $\text{área}(\text{região}) = 56 - 12 = 44 \text{ cm}^2$ .

8. (OBMEP 2014) A figura a seguir é formada por dois quadrados, um de lado  $8 \text{ cm}$  e outro de lado  $6 \text{ cm}$ . Qual é a área da região verde?



## Glossário

*Este glossário contém diversos termos da Matemática e do dia a dia, com seus significados apresentados em linguagem simples. Há, ainda, exemplos relacionados com os termos, cujo significado procure discutir com seus colegas. Procure, também, elaborar novos exemplos.*

**APROXIMAÇÃO - Menção a um resultado aproximado** de um valor verdadeiro.

**Exemplo:** Se a distância entre dois postes for de 13,7 metros, é comum dizer que a distância aproximada deles é de 14 metros.

**ARREDONDAMENTO DE UM NÚMERO** – É uma representação do número, usando determinada ordem decimal próxima dele.

**Exemplos:** Arredondando 19 793 para a dezena mais próxima, obtemos 19 790, e para a centena mais próxima, 19 800.

**BENS DE CAPITAIS** – São os bens que servem para a produção de outros bens, tais como máquinas, equipamentos, material de transporte e construção.

**BENS DE CONSUMO** – Bens que têm por finalidade serem consumidos e que não geram outros bens. Por exemplo: móveis, automóveis para uso particular, eletrodomésticos, etc.

**CÓDIGOS ALFANUMÉRICOS** – Códigos nos quais se usam grupos de letras e algarismos.

**Exemplo** de uso: Nas placas de automóveis, as três primeiras letras identificam o Estado, e os algarismos compõem a numeração do veículo.

Nas placas, as cores também têm funções. Por exemplo, fundo cinza e caracteres pretos: carros particulares; fundo vermelho e caracteres brancos: táxis, ônibus, caminhões.



**CÓDIGOS DE BARRA** – Inseridos em embalagens, permitem identificar, por meio de um leitor ótico, dentre outras características, a indústria que fabrica o artigo, qual o produto, as diversas variedades do mesmo produto e, nos caixas dos estabelecimentos, o preço.

Existem diversas outras aplicações como, em boletos bancários, a identificação do serviço que está sendo cobrado, o valor, o prazo de pagamento e percentuais de multas, no caso de pagamentos em atraso.



**DÉFICIT** – Resultado de uma conta em que as despesas são sempre maiores que as receitas.

**ESTIMATIVA** – Avaliação aproximada do resultado de uma operação ou de uma medida.

As estimativas de operações são feitas por meio de **arredondamentos**.

**Exemplo:** uma estimativa para o produto  $33 \times 79$  é  $30 \times 80 = 2\ 400$ .

As estimativas de operações são importantes para se ter razoável grau de certeza dos resultados, quando utilizamos calculadoras.

**FÓRMULAS** – Expressões que **indicam**, usando linguagem matemática, **sequências de cálculos** necessários para se obter os mais variados valores, como áreas de figuras planas, volumes de sólidos, relações de proporcionalidade etc.

**Exemplos:**

$S = ab$	Fórmula relacionada com o cálculo da área $S$ de um retângulo de dimensões <b>a</b> e <b>b</b> , medidas com a mesma unidade de medida.
$d = \frac{n(n-3)}{2}$	Fórmula relacionada com o cálculo do número de diagonais de um polígono convexo de <b>n</b> lados.

#### NOMES E SÍMBOLOS DE ALGUMAS UNIDADES

Grandeza	Nome	Símbolo
Comprimento	metro	m
Área	metro quadrado	m <sup>2</sup>
Volume	metro cúbico	m <sup>3</sup>
Tempo	segundo	s
Velocidade	metro por segundo	m/s
Aceleração	metro por segundo por segundo	m/s <sup>2</sup>
Massa	quilograma	kg
Vazão	metro cúbico por segundo	m <sup>3</sup> /s
Temperatura	grau Celsius ou centígrado	°C

**INADIMPLÊNCIA** – Situação em que não se cumpre um contrato ou parte dele.

**LUCRO** – Diferença positiva entre preço de venda e custo total de qualquer bem negociado.

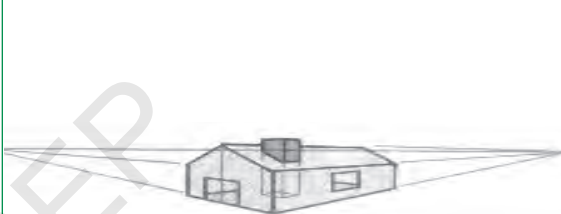


**MÉTODO DE REDUÇÃO À UNIDADE** – Método de resolução de problemas que permite, conhecido um valor **A** de certa grandeza, calcular outro valor **B** dela.

**Exemplo:** Se conheço  $\frac{3}{4}$  da medida de determinada grandeza, divido esta medida por 3 e multiplico o resultado por 4, obtendo  $\frac{4}{4}$ , ou seja, a medida da grandeza. A partir deste valor, é possível calcular qualquer outra parte da grandeza.

**PERSPECTIVA E PONTOS DE FUGA** – Para desenhar em perspectiva, são usados pontos para os quais convergem as linhas que representam a profundidade dos objetos desenhados. Estes pontos chamam-se “pontos de fuga”.

**Exemplo:** Na figura, você vê a perspectiva de uma casa e dois pontos de fuga.



#### PREFIXOS DE ALGUMAS UNIDADES

Nome	Símbolo	Fator de multiplicação da unidade
giga	<b>G</b>	$10^9 = 1\ 000\ 000\ 000$
mega	<b>M</b>	$10^6 = 1\ 000\ 000$
quilo	<b>k</b>	$10^3 = 1\ 000$
hecto	<b>h</b>	$10^2 = 100$
deca	<b>da</b>	10
deci	<b>d</b>	$10^{-1} = 0,1$
centi	<b>c</b>	$10^{-2} = 0,01$
mili	<b>m</b>	$10^{-3} = 0,001$
micro	<b>μ</b>	$10^{-6} = 0,000\ 001$
nano	<b>n</b>	$10^{-9} = 0,000\ 000\ 001$

**PREJUÍZO** – Diferença negativa entre o preço de venda e o custo total de qualquer bem negociado.

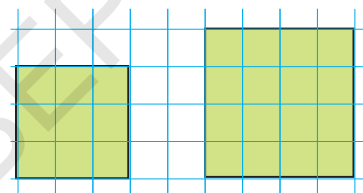
**REGRAS DE DIVISIBILIDADE** – Propriedades que, satisfeitas, permitem dizer se um número dado é ou não divisível por outro, sem efetuar a divisão.

**Exemplo:** Sem efetuar a divisão, podemos afirmar que 143160 é divisível por 4, porque os algarismos das dezenas e das unidades formam o número 60, que é divisível por 4.

**RAZÃO ENTRE DUAS GRANDEZAS** – É a razão entre os números que expressam suas medidas em uma mesma unidade de medida e na ordem dada.

*Exemplos:* (Observando a figura).

- a) A razão entre os lados do menor para o maior quadrado é 3 : 4 (três para quatro).
- b) A razão entre as áreas do menor quadrado para o maior é 9 : 16 (nove para dezesseis).

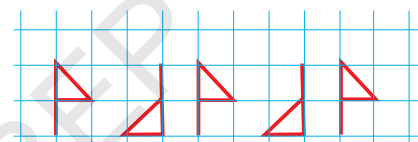


Nivaldo

**RECURSOS NATURAIS** – Insumos fornecidos pela natureza para a produção de bens e serviços, como a terra, os rios e os minerais.

**REEMBOLSO** – Qualquer tipo de pagamento a título de indenização ou de restituição de importância anteriormente emprestada.

**REGULARIDADE (OU PADRÃO)** – Qualquer situação com sequências de números, figuras ou quaisquer outros elementos que evidencia uma lei de formação, permitindo prever quais elementos continuam a sequência dada.



Nivaldo

Como desenhar a próxima figura?

1 3 4 7 11 18 29.....

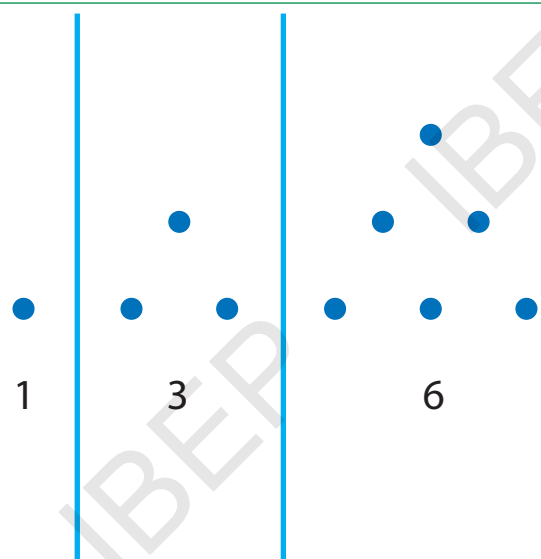
Qual o próximo número?

**REGULARIDADE – NÚMEROS TRIANGULARES.**

*Exemplos:* (observando a ilustração ao lado)

A próxima figura triangular de pontos terá 4 pontos na base e será formada de 10 pontos.

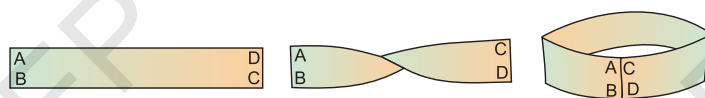
A regularidade dos resultados permite prever novas bases e novos números triangulares.



Nivaldo

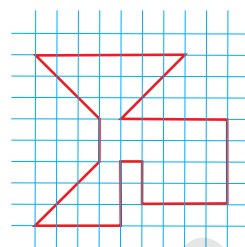
**REMUNERAÇÃO** – O que é recebido por um indivíduo, ou por uma coletividade, como lucro do capital empregado ou pelo pagamento de um trabalho.

## SUPERFÍCIE PLANA DE UMA SÓ FACE (FAIXA DE MÖBIUS)



Corte uma tira retangular de papel e faça uma dobra como na segunda figura. Cole os extremos fazendo coincidir os vértices A e C, B e D. Você verá que é possível traçar uma linha fechada contínua que passará pela parte interna e pela parte externa. Isto comprova que a superfície tem uma única face.

**MALHA** – Divisão de uma página em quadrados ou triângulos, todos de mesma medida, utilizando retas paralelas. Têm diversas aplicações como: desenhar figuras semelhantes a uma figura dada, desenhar figuras simétricas em relação a uma determinada reta, desenhar eixos de simetrias de figuras dadas, calcular valores aproximados ou exatos de perímetros ou áreas de figuras desenhadas na malha.



**NOTA PROMISSÓRIA** – Documento emitido, assinado e datado pelo devedor, que se obriga a pagar ao seu credor, ou à sua ordem, determinada importância numa data de vencimento definida.

**OPERAÇÕES INVERSAS** – Na ilustração, destaque para o fato de que a **multiplicação e a divisão são operações inversas**.

Também as igualdades  $3 + 4 = 7$  e  $7 - 4 = 3$  são relacionadas com o fato de que a **adição e a subtração são operações inversas**.

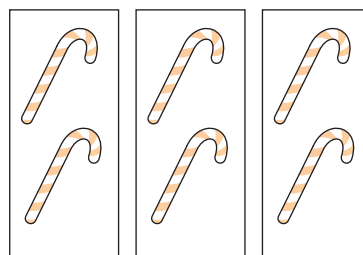
O conhecimento destes fatos permite resolver problemas “no sentido inverso”, como a seguir:

Três vezes [uma dada quantidade] é aumentada de dois, dividida por sete, multiplicada por cinco e de novo diminuída de um, dividida por três; o resultado é três. Qual era o valor original dessa grandeza?

Resolvendo:

$3 \times 3 = 9$ ,  $9 + 1 = 10$ ,  $10 : 5 = 2$ ,  $2 \times 7 = 14$ ,  $14 - 2 = 12$ ,  $12 : 3 = 4$ .

Resposta: O valor original da grandeza era 4.



$$3 \times 2 = 6$$

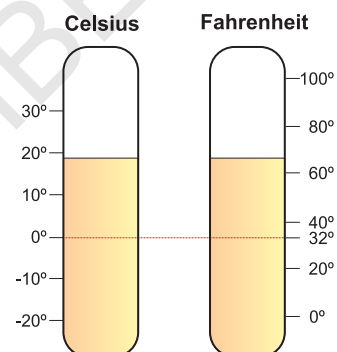
$$6 : 2 = 3$$

$$3 + 4 = 7 \quad \bullet \quad 7 - 4 = 3$$

**POPULAÇÃO ECONOMICAMENTE ATIVA (PEA)** – Parte da população com idade disponível para o trabalho assalariado.

**PROPORÇÕES E ESCALAS DE TEMPERATURAS** – Representando temperaturas nas unidades de escala Celsius e Fahrenheit por °C e °F, respectivamente, é possível provar a seguinte fórmula em forma de proporção que permite a **conversão de uma escala para a outra**:

$$\frac{^{\circ}\text{C}}{5} = \frac{^{\circ}\text{F} - 32}{9}$$



Nivaldo

**SALÁRIO – Preço pago pelo trabalho**, relativo a todos os pagamentos que compensam os indivíduos pelo tempo e o esforço dedicados à produção de bens e serviços. O salário nominal recebido não reflete os rendimentos verdadeiros; existem deduções salariais (algumas obrigatórias): para pagar os impostos sobre a renda, os pagamentos da Assistência Social, as pensões, as quotas aos sindicatos e dos seguros.

**SALÁRIO MÍNIMO – Menor salário fixado por lei**, a fim de garantir aos assalariados das categorias menos favorecidas, rendimento correspondente ao mínimo vital, definido em relação a determinado meio social.

**VALOR DE MERCADO (OU VALOR VENAL)** – Representa o **valor pelo qual determinado produto pode ser comercializado**, de acordo com a lei de oferta e procura. Por isso, não tem a ver com o valor real de um produto que incorpora, inclusive, os custos de fabricação.

## Sugestões de leituras e sites para os alunos

A seguir, indicamos alguns livros e sites que podem enriquecer seus conhecimentos sobre a Matemática, além de possibilitar que vocês verifiquem como ela é, na maioria das vezes, agradável e divertida.

### Leituras

**Sistemas de numeração ao longo da história**, de Edwaldo Bianchini e Herval Paccola. São Paulo: Moderna, 1997.

#### **Coleção A descoberta da Matemática**

*Frações sem mistério*, de Luzia Faraco Ramos. São Paulo: Ática, 2001.

*Medir é comparar*, de Cláudio Xavier da Silva e Fernando Mazzilli Louzada. São Paulo: Ática, 1998.

#### **Coleção Contando a história da Matemática**

*Números com sinais: uma grande invenção*, de Oscar Guelli. São Paulo: Ática, 2000.

#### **Coleção Investigação Matemática**

*Atividades e jogos com áreas e volumes*, de Marion Smoothey. São Paulo: Scipione, 1997.

*Atividades e jogos com estatística*, de Marion Smoothey. São Paulo: Scipione, 1997.

*Atividades e jogos com números*, de Marion Smoothey. São Paulo: Scipione, 1997.

#### **Coleção Pra que serve a Matemática?**

*Ângulos*, de José Jakubovic, Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis. São Paulo: Editora Atual, 1993.

*Proporções*, de José Jakubovic, Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis. São Paulo: Editora Atual, 1993.

#### **Coleção Vivendo a Matemática**

*A guinada de 360 graus*, de Nilson José Machado. São Paulo: Scipione, 2000.

*Números negativos*, de Luiz Márcio Imenes e Marcelo Lellis. São Paulo: Scipione, 2001.

*Polígonos, centopeias e outros bichos*, de Nilson José Machado. São Paulo: Scipione, 1996.

*Problemas curiosos*, de Luiz Márcio Imenes. São Paulo: Scipione, 1994.

*Semelhança não é mera coincidência*, de Nilson José Machado. São Paulo: Scipione, 2000.

*Usando letras para resolver problemas*, de Luiz Márcio Imenes. São Paulo: Scipione, 1999.

RPM Área de quadriláteros RPM 1 (p. 22). Revista do Professor de Matemática. SBM

RPM M.d.c. e m.m.c. RPM 13 (p. 34). Revista do Professor de Matemática. SBM

RPM Sólidos x canudos x vareta RPM 28 (p. 29). Revista do Professor de Matemática.



## Sites

*Sobre medidas de tempo, massa, volume etc.*

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Tempo>

<http://pt.wikipedia.org/wiki/Massa>

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Medida\\_\(física\)](http://pt.wikipedia.org/wiki/Medida_(física))

*Sistema de numeração*

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Numerais\\_egípcios](http://pt.wikipedia.org/wiki/Numerais_egípcios)

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Numeração\\_romana](http://pt.wikipedia.org/wiki/Numeração_romana)

[http://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema\\_de\\_numeração](http://pt.wikipedia.org/wiki/Sistema_de_numeração)

*Sistema de numeração romano*

<http://educar.sc.usp.br/matematica/11t6.htm>

*Combinatória e árvore de possibilidades*

<http://www.obmep.org.br/docs/apostila2.pdf>

<https://pt.khanacademy.org/math/probability/probability-and-combinatorics-topic>

*Atividades com o tangram*

<http://rachacuca.com.br/raciocinio/tangram/>

*Proporções*

[http://www.cdcc.usp.br/ciencia/artigos/art\\_26/proporcao.html](http://www.cdcc.usp.br/ciencia/artigos/art_26/proporcao.html)

*72 figuras para serem formadas com todas as peças do tangram*

<http://rachacuca.com.br/tangram/>

*Atividades sobre simetrias*

<http://www.sato.prof.ufu.br/Constr-ReguaCompasso/node9.html>

*Cálculo de distâncias entre cidades brasileiras*

[www.aondefica.com/distancias\\_br.asp](http://www.aondefica.com/distancias_br.asp)

*Caracterização e exibição de diversos modelos de simetrias em relação a um ponto, em relação a uma reta ou simetrias rotacionais*

[www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21s3.html](http://www.dmm.im.ufrj.br/projeto/projetoc/precalculo/sala/conteudo/capitulos/cap21s3.html)

*Significado de medidas de televisores em polegadas e diversas outras informações*

[www.inmetro.gov.br/consumidor/produtos/tela\\_tv.asp](http://www.inmetro.gov.br/consumidor/produtos/tela_tv.asp)

*Para explorar um conversor de unidades de medidas (comprimento, área, volume, massa, temperatura, velocidade, massa específica, força, energia) e também diversos temas relacionados com o exercício da cidadania, como, por exemplo, a fiscalização da qualidade de diversos artigos colocados à disposição do público para aquisição.*

[www.ipem.sp.gov.br](http://www.ipem.sp.gov.br)

*Portal contendo diversos materiais em multimídia*

<http://m3.ime.unicamp.br/portal/>

*Sites e arquivos sobre geometria espacial:*

[http://www.cienciamao.usp.br/dados/t2k/\\_matematica\\_mat2g63.arquivo.pdf](http://www.cienciamao.usp.br/dados/t2k/_matematica_mat2g63.arquivo.pdf)

[http://www.cienciamao.usp.br/dados/t2k/\\_matematica\\_mat2g64.arquivo.pdf](http://www.cienciamao.usp.br/dados/t2k/_matematica_mat2g64.arquivo.pdf)

<http://www6.ufrgs.br/espmat/disciplinas/geotri/modulo1/conteudo/conteudos13.htm>