

Analyse Réelle - Examen de deuxième session

3 heures – sans document

Les téléphones portables doivent être rangés éteints dans les sacs. Tout téléphone allumé sera saisi.

I

- 1) Soit $\xi \in \mathbb{R}$. Calculer $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{-ix\xi} dx$ et en déduire que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cdot e^{-ix\xi} dx = \frac{2}{1 + \xi^2}$$

- 2) Déterminer une solution fondamentale tempérée de l'opérateur différentiel $I - \frac{d^2}{dx^2}$ sur \mathbb{R} .

II

- 1) Soient T une distribution à support compact sur \mathbb{R}^d et θ sa transformée de Fourier. Montrer que θ est continue et que, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a $\widehat{T * f} = \theta \cdot \hat{f}$.

Montrer que, pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, $T * f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et que l'application $\gamma : f \mapsto T * f$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même. Montrer aussi que si, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ et $a \in \mathbb{R}^d$ on pose $f_a(x) = f(x - a)$, on a $(\gamma(f))_a = \gamma(f_a)$.

- 2) Montrer que si θ est bornée sur \mathbb{R}^d , l'application γ se prolonge en une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même vérifiant $\widehat{\gamma(g)} = \theta \cdot \hat{g}$ pour toute $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Inversement, on suppose que $G : L^2(\mathbb{R}^d) \rightarrow L^2(\mathbb{R}^d)$ est une application linéaire continue telle que $G(f) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ lorsque $f \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et que $G(f_a) = \left(G(f)\right)_a$ pour tout $a \in \mathbb{R}^d$. On veut montrer alors qu'il existe une distribution T à support compact telle que $\mathcal{F}(T)$ soit bornée et que $G(f) = T * f$ lorsque $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

- 3) Montrer que le graphe de G est fermé dans $L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$ et en déduire que celui de $G|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$ est fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \times \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, puis que $G|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$ est continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

Pour $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ on notera $\check{\varphi}$ la fonction $x \mapsto \varphi(-x)$. Montrer que l'application $T : \varphi \mapsto \langle \delta_0, G(\check{\varphi}) \rangle$ est une distribution sur \mathbb{R}^d , puis que pour $x \in \mathbb{R}^d$ et $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$,

$$(T * \varphi)(x) = \langle T, (\varphi_{-x})^\vee \rangle = \langle \delta_0, G(\varphi_{-x}) \rangle = \langle \delta_0, (G(\varphi))_{-x} \rangle = \langle \delta_x, G(\varphi) \rangle$$

et en déduire que $G(\varphi) = T * \varphi$ dès que $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$. On posera alors $\theta = \mathcal{F}(T)$.

- 4) Soit F l'ensemble des fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dont le support est contenu dans la boule unité fermée B de \mathbb{R}^d . Montrer que F est fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et que sur F la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ coïncide avec la topologie d'espace métrique complet de l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Pour $n \in \mathbb{N}$ on désigne par F_n l'ensemble $\{\psi \in F : \text{supp}(G(\psi)) \subset B(0, n)\}$ (où $B(0, n)$ est la boule fermée de centre 0 et de rayon n dans \mathbb{R}^d). Montrer que les F_n sont fermés dans F et que $F = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} F_n$.

Déduire du théorème de Baire qu'il existe un entier m , un $\psi_0 \in F$ et un voisinage convexe symétrique W de 0 dans $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$ tels que $\psi_0 + W \cap F \subset F_m$, puis par symétrie que $-\psi_0 + W \cap F \subset F_m$ et enfin que $W \cap F \subset \frac{1}{2}((\psi_0 + W \cap F) + (-\psi_0 + W \cap F)) \subset F_m$.

Soit $a \in \mathbb{R}^d$ tel que $\|a\| > m$. Montrer que si $a \in \text{supp}(T)$, il existe $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ à support dans la boule $B(a, 1)$ telle que $\langle T, \psi \rangle \neq 0$, que $(\check{\psi})_a \in F$ et qu'il existe un $k \in \mathbb{N}$ tel que

$\frac{1}{k} \cdot (\check{\psi})_a \in W \cap F \subset F_m$. En déduire que $\text{supp}(G((\check{\psi})_a)) = \text{supp}((G(\check{\psi}))_a) \subset B(0, m)$, puis que $\text{supp}(G(\check{\psi})) \subset B(a, m)$ alors que $0 \notin B(a, m)$, donc que $\langle T, \psi \rangle = \langle \delta_0, G(\check{\psi}) \rangle = 0$ et conclure que T est à support compact.

5) Montrer qu'il existe une constante C telle que $\|G(g)\|_2 \leq C \cdot \|g\|_2$ pour toute $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et en déduire que

$$\int \left| \theta(\xi) \cdot \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi \leq C^2 \int \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 d\xi$$

pour toute fonction $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, puis que $\int (C^2 - |\theta(\xi)|^2) \cdot |h(\xi)|^2 d\xi \geq 0$ pour toute fonction $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Soit $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ une fonction non identiquement nulle. On pose $\rho_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^{-d}}{\|\psi\|_2^2} \cdot \left| \psi\left(\frac{x}{\varepsilon}\right) \right|^2$.

Montrer que $\int (C^2 - |\theta(\xi)|^2) \cdot \rho_\varepsilon(a - \xi) d\xi \geq 0$ pour tout $a \in \mathbb{R}^d$ et tout $\varepsilon > 0$.

En déduire que $C^2 - |\theta(a)|^2 = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int (C^2 - |\theta(\xi)|^2) \cdot \rho_\varepsilon(a - \xi) d\xi \geq 0$, puis que $\sup_\xi |\theta(\xi)| \leq C$. Conclure.

III

On considère la mesure σ sur la sphère unité S de \mathbb{R}^3 définie par

$$\int_S f(x) d\sigma(x) = \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} f(\cos \theta \cdot \cos \varphi, \sin \theta \cdot \cos \varphi, \sin \varphi) d\theta$$

pour toute fonction f mesurable sur S , et on rappelle qu'elle est invariante par rotation, c'est-à-dire que si R est une rotation vectorielle de \mathbb{R}^3 , on a $\int_S f \circ R(x) dx = \int_S f(x) dx$. On notera $(\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3)$ la base canonique de \mathbb{R}^3 .

Si f appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et si $x = (u, v, w) \in \mathbb{R}^3$ n'est pas 0, on appelle dérivée radiale de f en x la quantité $\partial_r f(x) = \frac{u}{r} \cdot \partial_1 f(x) + \frac{v}{r} \cdot \partial_2 f(x) + \frac{w}{r} \cdot \partial_3 f(x)$ où $r = \|x\| = \sqrt{u^2 + v^2 + w^2}$.

1) Montrer que si $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ et si R est une rotation vectorielle de \mathbb{R}^3 , on a, pour $x \neq 0$, $\partial_r(f \circ R)(x) = \partial_r f(R(x))$. On pourra montrer que $\partial_r f(x)$ est la dérivée en $t = r$ de la fonction $t \mapsto f\left(\frac{tx}{r}\right)$.

2) Montrer que l'application $T : f \mapsto \int_S \partial_r f(x) d\sigma(x)$ est une distribution tempérée dont le support est contenu dans S .

3) Si $\xi \in \mathbb{R}^3$ et si e_ξ désigne la fonction $x \mapsto e^{-i\langle x, \xi \rangle}$, il existe au moins une rotation vectorielle R de \mathbb{R}^3 telle que $\xi = R^{-1}(\eta)$, où $\eta = \|\xi\| \cdot \varepsilon_3$. Montrer que $\langle \xi, x \rangle = \langle R(\xi), R(x) \rangle = \langle \eta, R(x) \rangle$, que $e_{\eta \circ R} = e_\xi$ et que

$$\begin{aligned} \hat{T}(\xi) &= \langle T, e_\xi \rangle = \int_S \partial_r(e_\xi)(x) d\sigma(x) = \int_S \partial_r(e_\eta)(x) d\sigma(x) \\ &= -2i\pi \|\xi\| \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi \cos \varphi e^{-i\|\xi\| \sin \varphi} d\varphi \\ &= -2i\pi \|\xi\| \int_{-1}^1 t \cdot e^{-it\|\xi\|} dt = 4\pi \cdot \left(\cos \|\xi\| - \frac{\sin \|\xi\|}{\|\xi\|} \right) \end{aligned}$$

4) Dédurre de **II-2)** que l'application $f \mapsto T * f$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ dans lui-même se prolonge en une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans lui-même.

Analyse Réelle

Corrigé de l'examen de deuxième session

I

1) On a $\int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{-i\xi} dx = \left[-\frac{e^{-x(1+i\xi)}}{1+i\xi} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+i\xi}$, d'où

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-|x|} \cdot e^{-ix\xi} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{-ix\xi} dx + \int_0^{+\infty} e^{-x} \cdot e^{ix\xi} dx = \frac{1}{1+i\xi} + \frac{1}{1-i\xi} = \frac{2}{1+\xi^2}$$

2) Si S est une solution fondamentale de l'opérateur $P = 1 - \frac{d^2}{dx^2}$, on a $S + S'' = \delta$. Si, de plus, S est tempérée, sa transformée de Fourier \hat{S} est une distribution tempérée qui satisfait $\hat{S} + \xi^2 \hat{S} = \hat{\delta} = 1$, donc $\hat{S} = \frac{1}{1+\xi^2}$; et inversement une distribution tempérée T telle que $(1+\xi^2)T = 1$ est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée S telle que $S - S'' = \delta$. Il résulte alors de ce qui précède que la fonction $\frac{1}{2}e^{-|x|}$ est une solution fondamentale tempérée de P .

II

1) Puisque T est à support compact, θ appartient à $\mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$, donc est \mathcal{C}^∞ et a fortiori continue, et on a $\mathcal{F}(T * f) = \theta \cdot \hat{f}$.

Puisque \mathcal{F} est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même et que la multiplication μ par $\theta \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ est continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, alors $\gamma = \mathcal{F}^{-1} \circ \mu \circ \mathcal{F}$ est continue.

De plus, $f_a = \delta_a * f$; donc, puisque la convolution est associative, et commutative sur $\mathcal{E}'(\mathbb{R}^d)$,

$$\gamma(f)_a = \delta_a * (T * f) = (\delta_a * T) * f = (T * \delta_a) * f = T * (\delta_a * f) = T * f_a = \gamma(f_a)$$

2) Si θ est bornée, l'application $\tilde{\mu} : g \mapsto \theta \cdot g$ est continue de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même : en effet

$$\|\tilde{\mu}(g)\|_2^2 = \int |\theta(\xi)|^2 \cdot |g(\xi)|^2 d\xi \leq \|\theta\|_\infty^2 \cdot \int |g(\xi)|^2 d\xi = \|\theta\|_\infty^2 \cdot \|g\|_2^2$$

ce qui montre que $\|\tilde{\mu}\| \leq \|\theta\|_\infty$. Et puisque la transformation de Fourier est un isomorphisme de $L^2(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même, l'application $\mathcal{F}^{-1} \circ \tilde{\mu} \circ \mathcal{F}$ est linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, qui prolonge $\gamma = \mathcal{F}^{-1} \circ \mu \circ \mathcal{F}$.

3) Puisque G est continue, son graphe H est fermé dans $L^2(\mathbb{R}^d) \times L^2(\mathbb{R}^d)$. L'injection j de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ est continue : en effet si une suite (φ_k) dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ converge vers φ , elle converge uniformément avec des supports contenus dans un même compact $K \subset \mathbb{R}^d$; et on a alors $\|\varphi - \varphi_k\|_2^2 \leq m(K) \cdot \sup_x |\varphi_k(x) - \varphi(x)|^2 \rightarrow 0$. Il en résulte que le graphe de $G|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$ est l'ensemble

$$\{(\varphi, \psi) : (j(\varphi), j(\psi)) \in H\} = (j \times j)^{-1}(H)$$

qui est fermé puisque $j \times j$ est continue. Il résulte alors du théorème du graphe fermé que $G|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$ est continue.

L'application linéaire $s : \varphi \mapsto \check{\varphi}$ est continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même, puisque son graphe est l'ensemble fermé $\{(\varphi, \psi) : \forall x \in \mathbb{R}^d \varphi(x) = \psi(-x)\}$. Et puisque δ_0 est continue de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans \mathbb{C} , la composée $T = \delta_0 \circ s \circ G|_{\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)}$ est une forme linéaire continue sur $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, c'est-à-dire une distribution.

Par définition de la convolée,

$$T * \varphi(x) = \langle T, (\check{\varphi})_x \rangle = \langle T, (\varphi_{-x}) \rangle = \langle \delta_0, G(\varphi_{-x}) \rangle$$

et puisque $G(\varphi_{-x}) = (G(\varphi))_{-x}$ et que $\langle \delta_0, f_a \rangle = f(-a) = \langle \delta_{-a}, f \rangle$, on obtient $T * \varphi(x) = \langle \delta_x, G(\varphi) \rangle$, ce qui signifie que les fonctions $T * \varphi$ et $G(\varphi)$ coïncident en tout point de \mathbb{R}^d , ou encore que $G(\varphi) = T * \varphi$. Alors $\theta = \mathcal{F}(T) \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ et, d'après 1), $\widehat{G(f)} = \theta \cdot \hat{f}$ pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

4) L'ensemble F est $\{\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) : \forall x \notin B \ \psi(x) = 0\}$, donc est fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ puisque les applications $\delta_x : \psi \mapsto \psi(x)$ sont continues de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dans \mathbb{C} . Par définition de la topologie de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, $F = \mathcal{D}_B(\mathbb{R}^d)$ est muni de la topologie induite par celle de $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$. Pour la même raison que ci-dessus, F est fermé dans l'espace de Fréchet $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$, donc est un espace métrique complet (pour une distance convenable sur $\mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^d)$).

Comme plus haut, l'ensemble X_n des fonctions $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ dont le support est contenu dans $B(0, n)$ est fermé dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ et son image réciproque par G dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ l'est aussi. Alors $F_n = F \cap G^{-1}(X_n)$ est fermé dans F . De plus, pour tout $\psi \in F$, $G(\psi) \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ par hypothèse ; et le support compact de $G(\psi)$ est contenu dans une boule $B(0, n)$, ce qui montre que $\psi \in F_n$. Donc $F = \bigcup_n F_n$.

Il résulte alors du théorème de Baire que, pour au moins un m , F_m n'est pas rare dans F (sinon l'espace métrique complet F serait maigre). Et puisque F_m est fermé, il existe alors un point ψ_0 de F intérieur à F_m , c'est-à-dire qu'il existe un voisinage W de 0, qu'on peut toujours supposer convexe et symétrique puisque $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ est localement convexe, tel que $F \cap (\psi_0 + W) \subset F_m$. Par symétrie, on a $(-F) \cap (-\psi_0 - W) = F \cap (-\psi_0 + W) \subset -F_m = F_m$. Et pour tout $w \in W \cap F$, $G(w) = \frac{1}{2}(G(\psi_0 + w) + G(-\psi_0 + w))$. Il en résulte que $G(w)$ est combinaison linéaire de deux fonctions à support dans $B(0, m)$, donc est elle-même à support dans $B(0, m)$.

Si maintenant $\|a\| > m$ et $a \in \text{supp}(T)$, il existe pour tout voisinage V de a une fonction ψ à support dans V sur laquelle T n'est pas nulle. En particulier pour la boule $B(a, 1)$, il existe ψ telle que $\langle T, \psi \rangle \neq 0$ et que $\text{supp}(\psi) \subset B(a, 1)$. Alors le support de $\check{\psi}$ est dans $B(-a, 1)$ et celui de $(\check{\psi})_a$ est dans B , c'est-à-dire $(\check{\psi})_a \in F$. Et puisque la suite $\frac{1}{k} \cdot (\check{\psi})_a$ tend vers 0 en restant dans F , il existe un entier k tel que $\frac{1}{k} \cdot (\check{\psi})_a \in W$, donc que $\text{supp}(\frac{1}{k} \cdot G(\check{\psi})_a) \subset B(0, m)$. Il en résulte que

$$-a + \text{supp}(G(\check{\psi})) = \text{supp}(G(\check{\psi})_a) = \text{supp}(G((\check{\psi})_a)) \subset B(0, m)$$

c'est-à-dire $\text{supp}(G(\check{\psi})) \subset B(a, m)$, donc $0 \notin \text{supp}(G(\check{\psi}))$ puisque $0 \notin B(a, m)$, contrairement au fait que $\langle \delta_0, G(\check{\psi}) \rangle = \langle T, \psi \rangle \neq 0$. Et cette contradiction achève de prouver que $\text{supp}(T) \subset B(0, m)$, donc que T est à support compact.

5) Puisque g est continue de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il existe une constante $C = \|g\|_2$ telle que $\|G(g)\|_2 \leq C \cdot \|g\|_2$. Alors, pour $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, on a $\widehat{G(f)} = \theta \cdot \hat{f}$, donc en utilisant la formule de Plancherel,

$$\begin{aligned} \int |\theta(\xi)|^2 \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi &= \int |\widehat{G(f)}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^d \int |G(f)(x)|^2 dx = (2\pi)^d \|G(f)\|_2^2 \\ &\leq (2\pi)^d C^2 \cdot \|f\|_2^2 = C^2 \int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \end{aligned}$$

donc $\int (C^2 - |\theta(\xi)|^2) \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geq 0$ pour toute $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Et puisque la transformation de Fourier est bijective de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même, on a $\int (C^2 - |\theta(\xi)|^2) \cdot |h(\xi)|^2 d\xi \geq 0$ pour toute $h \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$.

Puisque $\psi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$, la fonction $h : \xi \mapsto \frac{\varepsilon^{-d/2}}{\|\psi\|_2} \cdot \psi\left(\frac{a-x}{\varepsilon}\right)$ appartient aussi à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, et on a donc, puisque $\rho_\varepsilon : \xi \mapsto |h(a-\xi)|^2$ est d'intégrale 1,

$$0 \leq \int (C^2 - |\theta(\xi)|^2) \cdot |h(\xi)|^2 d\xi = \int (C^2 - |\theta(\xi)|^2) \cdot |\rho_\varepsilon(a-x)| d\xi = C^2 - (|\theta|^2 * \rho_\varepsilon)(a)$$

c'est-à-dire $(|\theta|^2 * \rho_\varepsilon)(a) \leq C^2$, pour tout $\varepsilon > 0$ et tout $a \in \mathbb{R}^d$. Puisque $\theta \in \mathcal{O}_M(\mathbb{R}^d)$ est continue, on a $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} (|\theta|^2 * \rho_\varepsilon)(a) = |\theta(a)|^2$ pour tout a , donc $\sup_a |\theta(a)| \leq C$, ce qui montre que θ est bornée, et achève la démonstration.

III

1) Pour $x = (u, v, w) \neq 0$ et $r = \|x\|$, la fonction $\ell : t \mapsto f\left(\frac{tx}{r}\right)$ admet pour dérivée en t la quantité

$$\ell'(t) = \frac{u}{r} \cdot \partial_1 f\left(\frac{tx}{r}\right) + \frac{v}{r} \cdot \partial_2 f\left(\frac{tx}{r}\right) + \frac{w}{r} \cdot \partial_3 f\left(\frac{tx}{r}\right)$$

et en particulier $\partial_r f(x) = \ell'(r)$. Et puisque $r = \|x\| = \|Rx\|$ et que $\tilde{\ell}(t) = f \circ R\left(\frac{tx}{r}\right) = f\left(\frac{t \cdot Rx}{r}\right)$, on obtient $\tilde{\ell}'(r) = \partial_r (f \circ R)(x) = \partial_r f(Rx)$.

2) La semi-norme q définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ par $q(f) = \sup_{x \in \mathbb{R}^3} |\partial_1 f(x)| + |\partial_2 f(x)| + |\partial_3 f(x)|$ est continue. On a alors, pour $x = (u, v, w) \in S : |\partial_r f(x)| \leq \max(|u|, |v|, |w|) \cdot q(f) \leq q(f)$ et

$$\left| \int_S \partial_r f(x) d\sigma(x) \right| \leq \int_S q(f) d\sigma(x) = q(f) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta = 2\pi q(f) \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \varphi d\varphi = 4\pi q(f)$$

ce qui montre que T est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire une distribution tempérée sur \mathbb{R}^3 .

3) Si $\xi = 0$, toute rotation R (en particulier l'identité) envoie ξ sur 0. Et si $\xi \neq 0$, il existe une rotation R d'axe perpendiculaire à ξ et à ε_3 qui transforme ξ en $\eta = \|\xi\| \cdot \varepsilon_3$. Puisque T est une distribution à support compact S , sa transformée de Fourier en ξ vaut $\langle T, e_\xi \rangle$. De plus $e_{\eta \circ R}(x) = e^{-i\langle \eta, Rx \rangle} = e^{-i\langle R\xi, Rx \rangle} = e^{-i\langle \xi, x \rangle} = e_\xi(x)$, donc $e_{\eta \circ R} = e_\xi$ et

$$\hat{T}(\xi) = \langle T, e_\xi \rangle = \int_S \partial_r (e_\xi)(x) d\sigma(x) = \int_S \partial_r (e_{\eta \circ R})(x) d\sigma(x) = \int_S \partial_r (e_\eta)(x) d\sigma(x)$$

Et puisque $e_\eta(u, v, w) = e^{-i\|\xi\| \cdot w}$, on a $\partial_r (e_\eta)(x) = -i\|\xi\| \cdot w e^{-i\|\xi\| \cdot w}$, donc

$$\begin{aligned} \hat{T}(\xi) &= \int_{-\pi/2}^{\pi/2} (-i\|\xi\| \cdot \sin \varphi \cdot e^{-i\|\xi\| \cdot \sin \varphi}) \cdot \cos \varphi d\varphi \int_0^{2\pi} d\theta \\ &= -2i\pi \|\xi\| \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \sin \varphi \cdot e^{-i\|\xi\| \cdot \sin \varphi} \cdot \cos \varphi d\varphi \end{aligned}$$

Enfin, le changement de variable $\sin \varphi = t$, donc $\cos \varphi d\varphi = dt$, dans la dernière intégrale donne

$$\begin{aligned} \hat{T}(\xi) &= -2i\pi \|\xi\| \cdot \int_{-1}^1 t e^{-i\|\xi\| \cdot t} dt = -2i\pi \|\xi\| \left(\left[t \cdot \frac{e^{-it\|\xi\|}}{-i\|\xi\|} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{i\|\xi\|} \int_{-1}^1 e^{-it\|\xi\|} dt \right) \\ &= -2i\pi \|\xi\| \left(\left[t \cdot \frac{e^{-it\|\xi\|}}{-i\|\xi\|} \right]_{-1}^1 + \frac{1}{i\|\xi\|} \left[\frac{e^{-it\|\xi\|}}{-i\|\xi\|} \right]_{-1}^1 \right) \\ &= -2i\pi \|\xi\| \left(\frac{2 \cos \|\xi\|}{-i\|\xi\|} + \frac{1}{\|\xi\|^2} (-2i \sin \|\xi\|) \right) = 4\pi \left(\cos \|\xi\| - \frac{\sin \|\xi\|}{\|\xi\|} \right) \end{aligned}$$

4) On a clairement, pour $\xi \in \mathbb{R}^3$, $|\cos \|\xi\|| \leq 1$ et $\left| \frac{\sin \|\xi\|}{\|\xi\|} \right| \leq 1$, donc $|\hat{T}(\xi)| \leq 8\pi$. Ceci montre que \hat{T} est bornée. Il résulte alors de **II-2)** que l'application définie sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ par $f \mapsto T * f$ se prolonge en une application linéaire continue de $L^2(\mathbb{R}^3)$ dans lui-même.

Analyse Réelle - Examen de première session

3 heures – sans document

Les téléphones portables doivent être rangés éteints dans les sacs. Tout téléphone allumé sera saisi.

I

1) Soit f une fonction localement bornée sur \mathbb{R}^3 . On suppose que f est de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ et que son laplacien $\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}$ est localement intégrable, et on veut montrer que Δf est le laplacien de f au sens des distributions.

Soit $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$. Montrer que les fonctions $f \cdot \Delta \varphi$ et $\varphi \cdot \Delta f$ sont intégrables et que l'on a

$$\int f(x, y, z) \Delta \varphi(x, y, z) dx dy dz = \int \varphi(x, y, z) \Delta f(x, y, z) dx dy dz$$

Soit χ une fonction de classe \mathcal{C}^∞ , à valeurs dans $[0, 1]$, à support dans la boule unité et égale à 1 au voisinage de 0. Remarquer que si $\varphi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et $\varepsilon > 0$, la fonction $\varphi_\varepsilon : u \mapsto \varphi(u)(1 - \chi(\frac{u}{\varepsilon}))$ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, que $|\varphi_\varepsilon \cdot \Delta f| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot |\Delta f|$ et que $\varphi_\varepsilon(u) \rightarrow \varphi(u)$ pour tout $u \neq 0$ lorsque ε tend vers 0. En déduire que $\int \varphi_\varepsilon \cdot \Delta f \rightarrow \int \varphi \cdot \Delta f$.

Montrer que

$$|\Delta \varphi_\varepsilon(u) - \Delta \varphi(u)| \leq |\varphi(u)| \cdot \varepsilon^{-2} \cdot \left| \Delta \chi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \right| + |\Delta \varphi(u)| \cdot \chi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) + 2\varepsilon^{-1} \sum_{j=1}^3 \left| \partial_j \varphi(u) \cdot \partial_j \chi\left(\frac{u}{\varepsilon}\right) \right|$$

et en déduire que $\sup_u |f(u) \cdot (\Delta \varphi_\varepsilon(u) - \Delta \varphi(u))| = O(\varepsilon^{-2})$, alors que cette fonction est nulle hors de la boule de centre 0 et de rayon ε . En déduire que $\int f \cdot \Delta \varphi_\varepsilon \rightarrow \int f \cdot \Delta \varphi$ et conclure.

On munit \mathbb{R}^3 de la norme euclidienne. Soit ρ la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par $\rho(x) = e^{-\|x\|}$. On admettra que, pour tout $\xi \in \mathbb{R}^3$, on a $\hat{\rho}(\xi) = \int \rho(x) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx = \frac{8\pi}{(1 + \|\xi\|^2)^2}$.

2) Montrer que si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$, et si g est la fonction définie sur \mathbb{R}^3 par $g(u) = f(\|u\|)$, on a $\Delta g(u) = f''(\|u\|) + \frac{2}{\|u\|} \cdot f'(\|u\|)$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Calculer $\Delta \rho$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ et montrer que c'est une fonction intégrable (on pourra passer en coordonnées polaires). On posera $f = \rho - \Delta \rho$. Montrer que f est intégrable, et en déduire que c'est une distribution tempérée.

3) Quelle est la transformée de Fourier de $(I - \Delta)^2 \rho$? En déduire une solution fondamentale de l'opérateur $(I - \Delta)^2$. Montrer qu'il existe une solution fondamentale intégrable de $I - \Delta$ que l'on déterminera.

II

1) On rappelle que $\frac{d}{dx} \arcsin x = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Montrer que l'intégrale $\int_{-w}^w \frac{dv}{\sqrt{w^2 - v^2}}$ est, pour $w > 0$, une constante indépendante de w , que l'on déterminera.

2) Soit F la fonction définie sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{R}^3$ par

$$F(t, x) = \begin{cases} (t^2 - \|x\|^2)^{-1/2} & \text{si } t > \|x\| \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Montrer que, pour $t > 0$ on a $\int_{\mathbb{R}^2} F(t, x) dx = 2\pi.t$ (on pourra utiliser 1) et en déduire que F est localement intégrable. Montrer que si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\int |\varphi(t, x)| F(t, x) dt dx \leq \pi \sup_{t, x} (1 + t^2 + \|x\|^2)^2 \cdot |\varphi(t, x)|$$

et en déduire que la distribution E associée à F est tempérée.

3) Soient $t > 0$ et f_t la fonction définie sur \mathbb{R}^2 par $f_t(u, v) = F(t, x)$ où $x = (u, v)$. En utilisant 1, montrer que

$$\int f_t(u, v) e^{-iu\xi} du dv = \int_{-t}^t \left(\int_{-\sqrt{t^2-u^2}}^{\sqrt{t^2-u^2}} \frac{1}{\sqrt{t^2-u^2-v^2}} dv \right) e^{-iu\xi} du = 2\pi \frac{\sin(t\xi)}{\xi}.$$

Montrer que si une fonction intégrable sur \mathbb{R}^2 est invariante par rotation, il en est de même de sa transformée de Fourier, puis que, pour $\alpha = (\xi, \eta) \in \mathbb{R}^2$, $\hat{f}_t(\alpha) = 2\pi \frac{\sin(t\|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$.

4) On désigne par \hat{E} la transformée de Fourier partielle de E (par rapport à x). Montrer que si $\chi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^2)$, on a

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}, \chi \otimes \psi \rangle &= \langle E, \chi \otimes \hat{\psi} \rangle = \int_0^{+\infty} \chi(t) \left(\int f_t(x) \hat{\psi}(x) dx \right) dt \\ &= 2\pi \int Y(t) \cdot \chi(t) \psi(\alpha) \frac{\sin(t\|\alpha\|)}{\|\alpha\|} dt d\alpha \end{aligned}$$

et en déduire que \hat{E} est la fonction localement intégrable $(t, \alpha) \mapsto 2\pi Y(t) \cdot \frac{\sin(t\|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$ (où Y désigne la fonction de Heaviside).

5) Montrer que, pour $x \in \mathbb{R}$, on a $\sin x = x.S(x^2)$, où $S(y) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{y^n}{(2n+1)!}$, et en déduire que la fonction $(t, \alpha) \mapsto \frac{\sin(t\|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$ est de classe \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \times \mathbb{R}^2$. Montrer de même que la fonction $(t, \alpha) \mapsto \cos(t\|\alpha\|)$ est \mathcal{C}^∞ .

6) Calculer $\partial_t \hat{E}$, $\partial_t(\partial_t \hat{E})$ et $\|\alpha\|^2 \cdot \hat{E}$, puis montrer que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{E} + \|\alpha\|^2 \cdot \hat{E} = 2\pi \delta_0(t) \otimes \mathbf{1}(\alpha)$. En déduire la valeur de la distribution E , et une solution fondamentale de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$.
Quel est le support singulier de cette solution fondamentale ?

7) Soit K une distribution sur \mathbb{R}^3 à support compact. Déterminer une solution tempérée de l'équation $\frac{\partial^2 T}{\partial t^2} - \Delta_x T = K$.

Analyse Réelle

Corrigé de l'examen

I

1) Puisque φ appartient à $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$, le support de φ est un compact K ne contenant pas 0. La fonction $f \cdot \Delta \varphi$ est donc bornée et à support compact, donc intégrable. Et la fonction $\varphi \cdot \Delta f$ est continue à support compact.

Pour tout (y, z) , la fonction $h : x \mapsto f(x, y, z) \cdot \partial_x \varphi(x, y, z) - \varphi(x, y, z) \cdot \partial_x f(x, y, z)$ est de classe \mathcal{C}^1 à support compact et on a $h'(x) = f(x, y, z) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y, z) - \varphi(x, y, z) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z)$. On a donc $\int_{-\infty}^{+\infty} h'(x) dx = [h(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0 = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y, z) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y, z) - \varphi(x, y, z) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) dx$. En intégrant en y et z on obtient

$$\int f(x, y, z) \cdot \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(x, y, z) dx dy dz = \int \varphi(x, y, z) \cdot \frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(x, y, z) dx dy dz$$

On a des résultats analogues en échangeant les variables, et, en sommant, on obtient l'égalité $\int f \cdot \Delta \varphi = \int \varphi \cdot \Delta f$.

La fonction φ_ε est dans $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ et nulle au voisinage de 0 puisque $\chi(\frac{u}{\varepsilon})$ y vaut 1. Donc $\varphi_\varepsilon \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3 \setminus \{0\})$ et on a $\int f \cdot \Delta \varphi_\varepsilon = \int \varphi_\varepsilon \cdot \Delta f$. On a $|\varphi_\varepsilon(u)| \leq |\varphi(u)|$ puisque $0 \leq 1 - \chi(\frac{u}{\varepsilon}) \leq 1$. Donc $|\varphi_\varepsilon \cdot \Delta f(u)| \leq |\varphi \cdot \Delta f(u)|$. De plus $\varphi_\varepsilon(u) = \varphi(u)$ si $\|u\| > \varepsilon$. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que $\int \varphi_\varepsilon \cdot \Delta f \rightarrow \int \varphi \cdot \Delta f$ lorsque $\varepsilon \rightarrow 0$.

On a $\frac{\partial^2 \varphi_\varepsilon}{\partial x^2}(u) = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2}(u) \cdot (1 - \chi(\frac{u}{\varepsilon})) - 2 \frac{\partial \varphi}{\partial x}(u) \cdot \frac{1}{\varepsilon} \frac{\partial \chi}{\partial x}(\frac{u}{\varepsilon}) - \varphi(u) \cdot \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial^2 \chi}{\partial x^2}(\frac{u}{\varepsilon})$, donc, en sommant

$$\Delta \varphi_\varepsilon(u) = \Delta \varphi(u) \cdot (1 - \chi(\frac{u}{\varepsilon})) - \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=1}^3 \partial_j \varphi(u) \cdot \partial_j \chi(\frac{u}{\varepsilon}) - \frac{1}{\varepsilon^2} \varphi(u) \cdot \Delta \chi(\frac{u}{\varepsilon})$$

et

$$|\Delta \varphi_\varepsilon(u) - \Delta \varphi(u)| \leq |\Delta \varphi(u)| + \frac{2}{\varepsilon} \sum_{j=1}^3 |\partial_j \varphi(u)| \cdot \left| \partial_j \chi(\frac{u}{\varepsilon}) \right| + \frac{1}{\varepsilon^2} |\varphi(u)| \cdot \left| \Delta \chi(\frac{u}{\varepsilon}) \right|$$

Comme les fonctions φ , $\partial_j \varphi$, $\Delta \varphi$, $\partial_j \chi$ et $\Delta \chi$ sont uniformément bornées et que f est bornée sur le support de φ , on voit qu'il existe un M tel que $|f(u) \cdot (\Delta \varphi_\varepsilon(u) - \Delta \varphi(u))| \leq M(1 + \varepsilon^{-2})$ pour tout $u \in \mathbb{R}^3$ et tout $\varepsilon > 0$. De plus, $\Delta \varphi_\varepsilon = \Delta \varphi$ hors du support de $\chi(\frac{\cdot}{\varepsilon})$, donc hors de la boule de centre

0 et de rayon ε , dont le volume est $\frac{4\pi\varepsilon^3}{3}$. Il en résulte que $\left| \int f \cdot \Delta \varphi_\varepsilon - \int f \cdot \Delta \varphi \right| \leq \frac{4\pi\varepsilon^3}{3} M(1 + \varepsilon^{-2})$,

donc que $\int f \cdot \Delta \varphi_\varepsilon \rightarrow \int f \cdot \Delta \varphi$. Et en passant la limite, on obtient $\int f \cdot \Delta \varphi = \int \varphi \cdot \Delta f$. Et comme le membre de gauche est par définition la valeur en φ du laplacien de f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$, on conclut que la fonction Δf est le laplacien de f dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.

2) On a $\frac{\partial g}{\partial x}(u) = f'(\|u\|) \cdot \frac{\partial \|u\|}{\partial x} = f'(\|u\|) \cdot \frac{x}{\|u\|}$, donc

$$\frac{\partial^2 g}{\partial x^2}(u) = f''(\|u\|) \cdot \frac{x^2}{\|u\|^2} + f'(\|u\|) \cdot \frac{1}{\|u\|} - f'(\|u\|) \cdot \frac{x}{\|u\|^2} \cdot \frac{x}{\|u\|} = f''(\|u\|) \cdot \frac{x^2}{\|u\|^2} + f'(\|u\|) \cdot \left(\frac{1}{\|u\|} - \frac{x^2}{\|u\|^3} \right)$$

et de même $\frac{\partial^2 g}{\partial y^2}(u) = f''(\|u\|) \cdot \frac{y^2}{\|u\|^2} + f'(\|u\|) \cdot \left(\frac{1}{\|u\|} - \frac{y^2}{\|u\|^3} \right)$ et $\frac{\partial^2 g}{\partial z^2}(u) = f''(\|u\|) \cdot \frac{z^2}{\|u\|^2} + f'(\|u\|) \cdot \left(\frac{1}{\|u\|} - \frac{z^2}{\|u\|^3} \right)$, donc

$$\Delta f(u) = f''(\|u\|) \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\|u\|^2} + f'(\|u\|) \cdot \left(\frac{3}{\|u\|} - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\|u\|^3} \right) = f''(\|u\|) + 2 \frac{f'(\|u\|)}{\|u\|}$$

La fonction ρ est continue, donc localement bornée, et de classe \mathcal{C}^2 sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. Et d'après le calcul précédent, on a pour $u \neq 0$,

$$\Delta \rho(x) = e^{-\|x\|} + \frac{2}{\|x\|} (-e^{-\|x\|}) = \rho(x) \left(1 - \frac{2}{\|x\|} \right)$$

En passant en coordonnées polaires (r, θ, ψ) , on obtient

$$\int |\Delta \rho(x)| dx \leq \int \left(1 + \frac{2}{r} \right) e^{-r} r^2 \cos \psi dr d\psi d\theta = 2\pi \cdot \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \psi d\psi \cdot \int_0^{+\infty} (r^2 + 2r) e^{-r} dr = 16\pi$$

ce qui montre l'intégrabilité de $\Delta \rho$. Il résulte alors de 1) que cette fonction est le laplacien de ρ au sens des distributions. Un calcul analogue montre que ρ est intégrable (d'intégrale 8π). Donc $f = \rho - \Delta \rho$ est intégrable et vaut $f(x) = 2 \frac{\rho(x)}{\|x\|}$. Enfin, en tant que fonction intégrable, f définit une distribution tempérée.

3) Puisque ρ est intégrable, c'est une distribution tempérée, et $(I - \Delta)^2 \rho$ aussi. La transformée de Fourier de $(I - \Delta)^2 \rho$ est

$$\mathcal{F}((I - \Delta)^2 \rho)(\xi) = (1 + \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2)^2 \mathcal{F}(\rho)(\xi) = (1 + \|\xi\|^2)^2 \hat{\rho}(\xi) = 8\pi = 8\pi \mathcal{F}(\delta_0)$$

Comme \mathcal{F} est un isomorphisme de \mathcal{S}' , on en déduit que $(I - \Delta)^2 \rho = 8\pi \delta_0$, donc que $\frac{1}{8\pi} \rho$ est une solution fondamentale tempérée de l'opérateur $(I - \Delta)^2$.

Et puisque $(I - \Delta)f = (I - \Delta)(I - \Delta)\rho = 8\pi \delta_0$, on conclut que $\frac{f}{8\pi}$, qui est intégrable, est une solution fondamentale de $I - \Delta$.

II

1) Avec le changement de variable $v = w.s$, on a

$$\int_{-w}^w \frac{dv}{\sqrt{w^2 - v^2}} = \int_{-1}^1 \frac{w ds}{\sqrt{w^2(1 - s^2)}} = \int_{-1}^1 \frac{ds}{\sqrt{1 - s^2}} = \left[\arcsin s \right]_{-1}^1 = \frac{\pi}{2} - \left(-\frac{\pi}{2} \right) = \pi$$

2) Pour $t > 0$, on a

$$\int F(t, x) dx = \int_{-t}^t \left(\int_{-\sqrt{t^2 - u^2}}^{\sqrt{t^2 - u^2}} \frac{dv}{\sqrt{t^2 - u^2 - v^2}} \right) du$$

En utilisant **1)** avec $w^2 = t^2 - u^2$, on obtient $\int F(t, x) dx = \int_{-t}^t \pi du = 2\pi.t$.

Pour $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, on a $p_{0,2}(\varphi) = \sup_{t,x} (1 + t^2 + \|x\|^2)^2 |\varphi(t, x)| < +\infty$, donc

$$|\varphi(t, x)| . F(t, x) \leq p_{0,2}(\varphi) \frac{F(t, x)}{(1 + t^2 + \|x\|^2)^2} \leq p_{0,2}(\varphi) \frac{F(t, x)}{(1 + t^2)^2}$$

donc

$$\begin{aligned} \int |\varphi(t, x)| . F(t, x) dt dx &\leq p_{0,2}(\varphi) \int_0^{+\infty} \left(\int_{\mathbb{R}^2} F(t, x) dx \right) \frac{dt}{(1 + t^2)^2} \\ &= \pi p_{0,2}(\varphi) \int_0^{+\infty} \frac{2t dt}{(1 + t^2)^2} = \pi . p_{0,2}(\varphi) \end{aligned}$$

ce qui montre que $|\langle E, \varphi \rangle| \leq \pi . p_{0,2}(\varphi)$, donc que E est une forme linéaire continue sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, c'est-à-dire une distribution tempérée sur \mathbb{R}^3 .

3) On a

$$\int f_t(u, v) e^{-iu\xi} du dv = \int_{-t}^t \left(\int f_t(u, v) dv \right) e^{-iu\xi} du = \int_{-t}^t \left(\int_{-\sqrt{t^2-u^2}}^{\sqrt{t^2-u^2}} (t^2 - u^2 - v^2)^{-1/2} dv \right) e^{-iu\xi} du$$

Utilisant à nouveau **1)** avec $w^2 = t^2 - u^2$, on trouve

$$\int f_t(u, v) e^{-iu\xi} du dv = \pi \int_{-t}^t e^{-iu\xi} du = \pi \left[\frac{e^{-iu\xi}}{-i\xi} \right]_{-t}^t = \pi \frac{-2i \sin(t\xi)}{-i\xi} = 2\pi \frac{\sin t\xi}{\xi}$$

Puisque la fonction f_t est invariante par les rotations de \mathbb{R}^2 , il en est de même de sa transformée de Fourier. Pour $\alpha = (\xi, \eta)$, puisqu'il existe une rotation r de \mathbb{R}^2 telle que $r(\alpha) = (\|\alpha\|, 0)$, on a $\hat{f}_t(\alpha) = \hat{f}_t(r(\alpha)) = \hat{f}_t(\|\alpha\|, 0) = 2\pi \frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$, avec $\|\alpha\| = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}$.

4) Par définition de la transformation de Fourier partielle, on a $\mathcal{F}_{\text{part}}(\chi \otimes \psi) = \chi \otimes \hat{\psi}$ et

$$\begin{aligned} \langle \hat{E}, \chi \otimes \psi \rangle &= \langle E, \mathcal{F}_{\text{part}}(\chi \otimes \psi) \rangle = \langle E, \chi \otimes \hat{\psi} \rangle = \int F(t, x) . \chi(t) . \hat{\psi}(x) dt dx \\ &= \int f_t(x) . \chi(t) . \hat{\psi}(x) dt dx = \int \chi(t) \left(\int f_t(x) . \hat{\psi}(x) dx \right) dt \\ &= \int \chi(t) \left(\int \hat{f}_t(\alpha) . \psi(\alpha) d\alpha \right) dt = 2\pi \int_0^\infty \frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|} \chi \otimes \psi(t, \alpha) dt d\alpha \\ &= \int 2\pi Y(t) \frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|} . \chi \otimes \psi(t, \alpha) dt d\alpha \end{aligned}$$

ce qui montre que \hat{E} coïncide en tant que distribution tempérée avec la fonction localement intégrable (et même localement bornée) $(t, \alpha) \mapsto 2\pi Y(t) \frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$ puisque les fonctions décomposées $\chi \otimes \psi$ engendrent un sous-espace dense de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$.

5) La série entière $S(x) = \sum_{n=0}^\infty (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!}$ a un rayon de convergence infini, donc définit une fonction \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} et on a $x.S(x^2) = \sum (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin x$, donc $\frac{\sin x}{x} = S(x^2)$. Alors $\frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|} = t.S(t^2 \|\alpha\|^2)$, ce qui montre que la fonction $(t, \alpha) \mapsto \frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$ est \mathcal{C}^∞ puisque $\alpha \mapsto \|\alpha\|^2$ est un polynôme.

De même, si $R(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n)!}$, la série R a un rayon de convergence infini, donc a une somme de classe \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et on a $R(x^2) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos x$. Et ceci montre que la fonction $(t, \alpha) \mapsto \cos(t \|\alpha\|) = R(t^2 \|\alpha\|^2)$ est de classe \mathcal{C}^∞ .

6) Alors

$$\partial_t \hat{E} = 2\pi\delta_0(t) \cdot \frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|} + 2\pi Y(t) \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|} \right) = 2\pi\delta_0(t) \cdot \frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|} + 2\pi Y(t) \cos(t \|\alpha\|)$$

et puisque $\frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|}$ s'annule pour $t = 0$, on obtient $\delta_0(t) \cdot \frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|} = 0$, et finalement $\partial_t \hat{E} = 2\pi Y(t) \cos(t \|\alpha\|)$.

On a ensuite $\partial_t(\partial_t \hat{E}) = 2\pi\delta_0(t) \cdot \cos(t \|\alpha\|) - 2\pi Y(t) \|\alpha\| \cdot \sin(t \|\alpha\|)$ et puisque $\cos(t \|\alpha\|) = 1$ lorsque $t = 0$, on obtient $\partial_t(\partial_t \hat{E}) = 2\pi\delta_0(t) \cdot \mathbf{1}(\alpha) - 2\pi Y(t) \|\alpha\| \cdot \sin(t \|\alpha\|)$.

Donc

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{E} + \|\alpha\|^2 \cdot \hat{E} = 2\pi\delta_0(t) \cdot \mathbf{1}(\alpha) - 2\pi Y(t) \|\alpha\| \cdot \sin(t \|\alpha\|) + 2\pi \|\alpha\|^2 \cdot Y(t) \frac{\sin(t \|\alpha\|)}{\|\alpha\|} = 2\pi\delta_0(t) \otimes \mathbf{1}(\alpha)$$

Dans \mathcal{S}' , on a $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{E} = \mathcal{F}_{\text{part}}(\frac{\partial^2}{\partial t^2} E)$ et $\mathcal{F}_{\text{part}}((\frac{\partial^2}{\partial u^2} + \frac{\partial^2}{\partial v^2})E) = -(\xi^2 + \eta^2)\hat{E} = -\|\alpha\|^2 \hat{E}$. Il en résulte que $\frac{\partial^2}{\partial t^2} \hat{E} + \|\alpha\|^2 \cdot \hat{E} = \mathcal{F}_{\text{part}}((\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x)E) = 2\pi\delta_0(t) \otimes \mathbf{1}(\alpha) = \mathcal{F}_{\text{part}}(2\pi\delta_0(t) \otimes \delta_0(x))$.

Comme $\mathcal{F}_{\text{part}}$ est un isomorphisme de \mathcal{S}' sur lui-même, on trouve $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x)E = 2\pi\delta_0(t) \otimes \delta_0(x)$, c'est-à-dire que $\frac{1}{2\pi}E$ est une solution fondamentale tempérée de l'opérateur $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$.

La fonction F est de classe \mathcal{C}^∞ au voisinage de tout point (t, x) tel que $t \neq \|x\|$, et discontinue en tout (t, x) tel que $t = \|x\|$. Donc le support singulier de E est le cône $\Gamma = \{(t, x) : t = \|x\|\}$.

7) Comme K est à support compact et E tempérée, la convolution $E * K$ définit une distribution tempérée.

Puisque $\frac{1}{2\pi}E$ est une solution fondamentale de $\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x$, on a $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x) * (\frac{1}{2\pi}E) * K = K$, ce qui montre que la distribution tempérée $T = \frac{1}{2\pi}E * K$ est une solution de l'équation $(\frac{\partial^2}{\partial t^2} - \Delta_x)T = K$.

Analyse Réelle - Examen de deuxième session

3 heures – sans document

Les téléphones portables doivent être rangés éteints dans les sacs. Tout téléphone allumé sera saisi.

I

On considère la fonction continue g sur \mathbb{R} définie par $g(x) = \sin |x|$.

- 1) Montrer que g définit une distribution tempérée sur \mathbb{R} .
- 2) Calculer g' et g'' au sens des distributions sur \mathbb{R} , puis $g + g''$, et en déduire une solution fondamentale de l'opérateur différentiel $I + \frac{d^2}{dx^2}$.

II

On considère l'équation différentielle

$$y'' + 2\frac{y'}{x} + y = 0, \quad (E)$$

- 1) Montrer qu'une fonction y de classe \mathcal{C}^2 est une solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si la fonction $z : x \mapsto x.y(x)$ vérifie l'équation $z'' + z = 0$. En déduire les solutions de (E) .

- 2) On munit \mathbb{R}^3 de la norme euclidienne. Si f est une fonction de classe \mathcal{C}^2 sur $]0, +\infty[$ et si F désigne la fonction $u \mapsto f(\|u\|)$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, montrer que $\Delta F(u) = f''(\|u\|) + \frac{2}{\|u\|} f'(\|u\|)$ et en déduire que $F + \Delta F = 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ si et seulement si f satisfait (E) .

Montrer que la fonction $F_0 : u \mapsto \frac{\sin(\|u\|)}{\|u\|} = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\|u\|^{2n}}{(2n+1)!}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 , et en déduire que $\Delta F_0 + F_0$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}^3 .

- 3) On note g la fonction $x \mapsto -\frac{\cos x}{x}$ et g_1 la fonction $x \mapsto g(x) + \frac{1}{x}$. Montrer que g_1 est \mathcal{C}^∞ et bornée sur $]0, +\infty[$.

- 4) On considère les fonctions G et λ définies sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ par $G(u) = g(\|u\|)$ et $\lambda(u) = \frac{1}{\|u\|}$. Montrer que G est de classe \mathcal{C}^∞ , que $\Delta G + G = 0$ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ (utiliser **2**) et que $|G(u)| \leq \lambda(u)$. En déduire que $\frac{G(u)}{(1 + \|u\|^2)^2}$ est intégrable puis que G définit une distribution tempérée sur \mathbb{R}^3 , et que le support de la distribution $\Delta G + G$ est contenu dans $\{0\}$.

Montrer que $\Delta G + G = \Delta G_1 + G + 4\pi.\delta_0$, (où $G_1 = G + \lambda$ et δ_0 représente la mesure de Dirac en 0).

5) Soient $\rho \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ égale à 1 au voisinage de 0 et à support dans la boule unité $B(0,1)$, et $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. On pose $\rho_n(u) = \rho(2^n u)$ et $\varphi_n(u) = \varphi(u) \cdot \rho_n(u)$. Montrer que $\text{supp}(\varphi - \varphi_n) \subset \mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, que $\langle \Delta G + G, \varphi - \varphi_n \rangle = 0$, puis que

$$\langle \Delta G + G, \varphi_n \rangle = \int G_1(u) \cdot \Delta \varphi_n(u) du + \int \varphi_n(u) \cdot G(u) du + 4\pi \cdot \varphi(0)$$

Montrer que $|\varphi_n \cdot G| \leq \|\varphi\|_\infty \cdot \|\rho\|_\infty \cdot |G| \cdot \mathbf{1}_{B(0,1)}$ et que $\varphi_n \rightarrow 0$ presque partout, puis que $\int \varphi_n \cdot G du \rightarrow 0$.

Montrer que

$$\begin{aligned} |\Delta \varphi_n(u)| &\leq |\Delta \varphi(u)| \cdot |\rho_n(u)| + 2^{2n} |\varphi(u)| |\Delta \rho(2^n u)| \\ &\quad + 2^{1+n} |\partial_x \varphi(u) \cdot \partial_x \rho(2^n u)| + 2^{1+n} |\partial_y \varphi(u) \cdot \partial_y \rho(2^n u)| + 2^{1+n} |\partial_z \varphi(u) \cdot \partial_z \rho(2^n u)| \end{aligned}$$

et en déduire qu'il existe une constante M telle que $|\Delta \varphi_n(u)| \leq M \cdot 2^{2n}$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $u \in \mathbb{R}^2$.

6) Montrer que $\left| \int G_1(u) \cdot \Delta \varphi_n(u) du \right| \leq M \cdot 2^{2n} \cdot \|g_1\|_\infty \cdot \text{vol}(B(0, 2^{-n}))$ et conclure que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int G_1(u) \cdot \Delta \varphi_n(u) du = 0$, et enfin que $\Delta G + G = 4\pi \cdot \delta_0$ dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$.

En déduire une solution fondamentale de l'opérateur différentiel $\Delta + I$. Quel est le support singulier de G ?

7) Soit ψ une fonction donnée dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$. Montrer qu'il existe une solution $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ à l'équation $\Delta \varphi + \varphi = \psi$ donnée par $T = \psi * \frac{G}{4\pi}$ et que toute solution T de cette équation est une fonction \mathcal{C}^∞ . Montrer que si T est une solution de cette équation et si F_0 est la fonction définie dans **2)**, $T + t \cdot F_0$ est aussi une solution, quel que soit le nombre $t \in \mathbb{C}$, et en déduire que la solution n'est jamais unique dans \mathcal{C}^∞ .

Montrer que si une solution T appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)$, on doit avoir $\hat{\psi}(u) = 0$ pour tout u tel que $\|u\| = 1$. Montrer aussi qu'il y a au plus une solution intégrable.

Analyse Réelle

Corrigé de l'examen

I

1) La fonction continue g est localement intégrable. Puisqu'elle est bornée par 1 en valeur absolue sur \mathbb{R} , on a, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$:

$$\left| \int \varphi(x) \cdot g(x) dx \right| \leq \int |\varphi(x)| dx \leq \sup_x (1+x^2) |\varphi(x)| \cdot \int \frac{dx}{1+x^2} = \pi \cdot p_{0,1}(\varphi)$$

où $p_{m,q}$ désigne la semi-norme continue $\varphi \mapsto \sup_{x \in \mathbb{R}, j \leq m} (1+x^2)^q |\varphi^{(j)}(x)|$ sur $\mathcal{S}(\mathbb{R})$. Et ceci montre que la distribution associée à g est tempérée.

2) La fonction g est continue et sa dérivée est continue par morceaux. La formule des sauts assure alors que, au sens des distributions, g' est la dérivée de g au sens usuel : la fonction $x \mapsto \operatorname{sgn}(x) \cdot \cos x$. Cette dernière fonction est également de classe \mathcal{C}^1 par morceaux, avec un saut en 0 : $g'(0_+) = 1$ et $g'(0_-) = -1$. La formule des sauts appliquée à g' donne alors que g'' est, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, égale à la dérivée au sens usuel de g' , la fonction $x \mapsto -\operatorname{sgn}(x) \cdot \sin x = -\sin|x|$, plus la mesure de Dirac en 0, δ_0 multipliée par le saut de g' en 0 : $1 - (-1) = 2$. Il en résulte que dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$, on a $g''(x) = -\sin|x| + 2\delta_0$. Il en résulte que $g + g'' = 2\delta_0$, et que $\frac{1}{2}g$ est une solution fondamentale de l'opérateur $I + \frac{d^2}{dx^2}$.

II

1) Si $z(x) = x \cdot y(x)$, on a, pour $x \neq 0$,

$$z'' + z = (x \cdot y' + y)' + x \cdot y = x \cdot y'' + 2y' + x \cdot y = x \cdot (y'' + 2\frac{y'}{x} + y)$$

dont on déduit que y est solution de (E) sur $]0, +\infty[$ si et seulement si $z'' + z = 0$, c'est-à-dire si z est de la forme $A \cos x + B \sin x$, où A et B sont des constantes. Les solutions de (E) sont donc les fonctions de la forme $y = A \cdot \frac{\cos x}{x} + B \cdot \frac{\sin x}{x}$, qui sont \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$. Et, pour $x \geq 1$, on a

$$\left| A \frac{\cos x}{x} + B \frac{\sin x}{x} \right| = \frac{|A \cos x + B \sin x|}{x} \leq \frac{\sqrt{A^2 + B^2} \cdot \sqrt{\cos^2 x + \sin^2 x}}{x} \leq \sqrt{A^2 + B^2}.$$

2) On a $\frac{\partial}{\partial x} F(u) = f'(\|u\|) \cdot \frac{\partial}{\partial x} \|u\| = f'(\|u\|) \frac{x}{\|u\|}$, donc

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} F(u) = f''(\|u\|) \frac{x}{\|u\|} \cdot \frac{x}{\|u\|} + \frac{f'(\|u\|)}{\|u\|} - f'(\|u\|) \cdot \frac{x}{\|u\|^2} \cdot \frac{x}{\|u\|} = f''(\|u\|) \frac{x^2}{\|u\|^2} + \frac{f'(\|u\|)}{\|u\|} \left(1 - \frac{x^2}{\|u\|^2}\right)$$

et de même

$$\begin{aligned}\frac{\partial^2}{\partial y^2} F(u) &= f''(\|u\|) \frac{y^2}{\|u\|^2} + \frac{f'(\|u\|)}{\|u\|} \left(1 - \frac{y^2}{\|u\|^2}\right) \\ \frac{\partial^2}{\partial z^2} F(u) &= f''(\|u\|) \frac{z^2}{\|u\|^2} + \frac{f'(\|u\|)}{\|u\|} \left(1 - \frac{z^2}{\|u\|^2}\right)\end{aligned}$$

donc par somme

$$\Delta F(u) = f''(\|u\|) \cdot \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\|u\|^2} + \frac{f'(\|u\|)}{\|u\|} \left(3 - \frac{x^2 + y^2 + z^2}{\|u\|^2}\right) = f''(\|u\|) + 2 \frac{f'(\|u\|)}{\|u\|}.$$

Il en résulte que $\Delta F(u) + F(u) = f''(\|u\|) + 2 \frac{f'(\|u\|)}{\|u\|} + f(\|u\|)$ et que cette fonction est partout nulle sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ si et seulement si f est solution de (E).

Puisque la somme de la série entière $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n+1)!}$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R} , et que la fonction polynômiale $u \mapsto \|u\|^2$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 , la fonction $F_0 : u \mapsto \frac{\sin \|u\|}{\|u\|} = S(\|u\|^2)$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 . Alors la fonction $\Delta F_0 + F_0$ est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 et nulle sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$ puisque $\frac{\sin x}{x}$ est solution de (E). Donc $\Delta F_0 + F_0$ est identiquement nulle sur \mathbb{R}^3 .

3) On a $g_1(x) = \frac{1 - \cos x}{x} = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \cdot \frac{x^{2n-1}}{(2n)!}$ qui est la somme d'une série entière de rayon de convergence $+\infty$, ce qui montre que g_1 est \mathcal{C}^∞ . De plus $|g_1(x)| \leq \frac{2}{|x|}$, ce qui montre que g_1 tend vers 0 à l'infini, donc est bornée sur \mathbb{R} puisque continue. On peut remarquer aussi que, par la formule des accroissements finis, $|1 - \cos x| \leq |x| \cdot \sup_t \left| \frac{d}{dt} \cos t \right| = |x|$, donc que $g_1(x) = |g_1(x)| \leq 1$.

4) Puisque g est \mathcal{C}^∞ sur $]0, +\infty[$ et que $u \mapsto \|u\|$ est \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$, il est clair que G est \mathcal{C}^∞ sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$. De plus, la fonction g est solution de (E) ; il résulte donc de **2)** que $\Delta G + G$ est nul sur $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$.

Puisque $|g(x)| \leq \frac{1}{x}$, on a $|G(u)| \leq \frac{1}{\|u\|} = \lambda(u)$. Il en résulte que

$$\begin{aligned}\int (1 + \|u\|^2)^{-2} |G(u)| \, du &\leq \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos \beta \, d\beta \int_0^{2\pi} d\theta \left(\int_0^\infty \frac{1}{r} \frac{r^2 \, dr}{(1 + r^2)^2} \right) \\ &= 4\pi \left[-\frac{1}{2(1 + r^2)} \right]_0^\infty = 2\pi < \infty\end{aligned}$$

On en déduit que, si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$|\langle G, \varphi \rangle| = \left| \int G(u) \cdot \varphi(u) \, du \right| \leq \sup_u (1 + \|u\|^2)^2 |\varphi(u)| \cdot \int (1 + \|u\|^2)^{-2} |G(u)| \, du = C \cdot p_{0,2}(\varphi)$$

où C dénote l'intégrale $\int (1 + \|u\|^2)^{-2} |G(u)| \, du$ et $p_{m,q}$ la semi-norme sur $\mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ définie par $p_{m,q}(\varphi) = \sup_{u \in \mathbb{R}^3, |\alpha| \leq m} (1 + \|u\|^2)^q |\partial_\alpha \varphi(u)|$. Et ceci montre que la distribution associée à la fonction localement intégrable G est tempérée. La restriction de la distribution $\Delta G + G$ à $\mathbb{R}^3 \setminus \{0\}$

est nulle puisque g est solution de (E) . Il en résulte que le support de cette distribution est contenu dans le singleton $\{0\}$.

Notons $G_1(u) = g_1(\|u\|)$. Puisque $g(x) = g_1(x) - \frac{1}{x}$, on a $G(u) = G_1(u) - \Delta\lambda$, donc dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$,

$$\Delta G + G = \Delta G_1 + G - \Delta\lambda$$

Par ailleurs, on sait que $-\frac{\lambda}{4\pi}$ est une solution fondamentale de Δ , donc que $\Delta\lambda = -4\pi.\delta_0$. On conclut que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, $\Delta G + G = \Delta G_1 + G + 4\pi.\delta_0$.

5) On a $\varphi - \varphi_n = \varphi(1 - \rho_n)$, et $1 - \rho_n$ est nulle sur un voisinage de 0. Donc $0 \notin \text{supp}(\varphi - \varphi_n)$. Et puisque le support de $\Delta G + G$ est disjoint du support de $\varphi - \varphi_n$, on a $\langle \Delta G + G, \varphi - \varphi_n \rangle = 0$, c'est-à-dire $\langle \Delta G + G, \varphi \rangle = \langle \Delta G + G, \varphi_n \rangle$ pour tout n . Alors, puisque $\varphi_n(0) = \varphi(0)$ et qu'on a $\langle \Delta G_1, \varphi_n \rangle = \langle G_1, \Delta\varphi_n \rangle$, il vient :

$$\langle \Delta G + G, \varphi_n \rangle = \langle \Delta G_1 + G - \Delta\lambda, \varphi_n \rangle = \int \Delta\varphi_n(u).G_1(u) du + \int \varphi_n(u).G(u) du + 4\pi.\varphi(0)$$

La fonction G est localement intégrable. De plus, les $\varphi_n.G$ sont à support dans la boule unité, sont majorées en module par la fonction intégrable $\|\varphi\|_\infty \cdot \|\rho\|_\infty \cdot |G| \cdot \mathbb{1}_{B(0,1)}$, et convergent vers 0 en tout point distinct de 0. Il résulte alors du théorème de convergence dominée que $\lim_n \int \varphi_n.G du = 0$.

On a aussi $\frac{\partial\varphi_n}{\partial x}(u) = \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u).\rho(2^n u) + 2^n \varphi(u).\frac{\partial\rho}{\partial x}(2^n u)$, donc

$$\frac{\partial^2\varphi_n}{\partial x^2}(u) = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2}(u).\rho(2^n u) + 2.2^n \frac{\partial\varphi}{\partial x}(u).\frac{\partial\rho}{\partial x}(2^n u) + 2^{2n}\varphi(u).\frac{\partial^2\rho}{\partial x^2}(2^n u)$$

et de même

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial y^2}(u) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2}(u).\rho(2^n u) + 2.2^n \frac{\partial\varphi}{\partial y}(u).\frac{\partial\rho}{\partial y}(2^n u) + 2^{2n}\varphi(u).\frac{\partial^2\rho}{\partial y^2}(2^n u) \\ \frac{\partial^2\varphi_n}{\partial z^2}(u) &= \frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}(u).\rho(2^n u) + 2.2^n \frac{\partial\varphi}{\partial z}(u).\frac{\partial\rho}{\partial z}(2^n u) + 2^{2n}\varphi(u).\frac{\partial^2\rho}{\partial z^2}(2^n u) \end{aligned}$$

et en sommant,

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_n(u) &= \Delta\varphi(u).\rho(2^n u) + 2.2^n \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}(u).\frac{\partial\rho}{\partial x}(2^n u) + \frac{\partial\varphi}{\partial y}(u).\frac{\partial\rho}{\partial y}(2^n u) \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial\varphi}{\partial z}(u).\frac{\partial\rho}{\partial z}(2^n u) \right) + 2^{2n}\varphi(u).\Delta\rho(2^n u) \end{aligned}$$

donc $|\Delta\varphi_n(u)| \leq 2^{2n}.M$, en posant

$$\begin{aligned} M &= \|\Delta\varphi\|_\infty \cdot \|\rho\|_\infty + 2 \|\partial_x\varphi\|_\infty \cdot \|\partial_x\rho\|_\infty \\ &\quad + 2 \|\partial_y\varphi\|_\infty \cdot \|\partial_y\rho\|_\infty + 2 \|\partial_z\varphi\|_\infty \cdot \|\partial_z\rho\|_\infty + \|\varphi\|_\infty \cdot \|\Delta\rho\|_\infty . \end{aligned}$$

6) Alors, puisque φ_n est nulle hors de la boule $B(0, 2^{-n})$ dont le volume est $\frac{4\pi}{3} \cdot 2^{-3n}$, on a

$$\begin{aligned} \left| \int G_1(u).\Delta\varphi_n(u) du \right| &\leq \int_{B(0, 2^{-n})} |g_1(\|u\|)| . 2^{2n}.M du \\ &\leq M.2^{2n} \cdot \text{vol}(B(0, 2^{-n})) \cdot \|g_1\|_\infty = \frac{4\pi}{3}.M.2^{-n} \cdot \|g_1\|_\infty \end{aligned}$$

Et on conclut que $\lim_{n \rightarrow \infty} \int G_1(u) \cdot \Delta \varphi_n(u) du = 0$, donc que

$$\langle \Delta G + G, \varphi \rangle = \langle \Delta G + G, \varphi_n \rangle \rightarrow 4\pi \cdot \varphi(0)$$

c'est-à-dire que, dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$, $\Delta G + G = 4\pi \cdot \delta_0$.

Il en résulte que $(4\pi)^{-1} \cdot G$ est une solution fondamentale de l'opérateur différentiel $\Delta + I$. Et puisque la fonction G est \mathcal{C}^∞ en dehors de l'origine, le support singulier de G est réduit à $\{0\}$.

7) La convolée T de $\frac{G}{4\pi} \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$ et de $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3)$ est définie et appartient à $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^3)$. Et on a

$$\Delta T + T = -\frac{1}{4\pi}(\Delta + I)(G * \psi) = -\frac{1}{4\pi}(\Delta G + G) * \psi = \delta_0 * \psi = \psi ,$$

ce qui montre que T est solution de l'équation.

Puisque le support singulier de G est le singleton $\{0\}$, on sait que T doit être \mathcal{C}^∞ sur tout ouvert où ψ est \mathcal{C}^∞ ; et par hypothèse $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^3) \subset \mathcal{C}^\infty(\mathbb{R}^3)$. Donc T est \mathcal{C}^∞ sur \mathbb{R}^3 .

Enfin, si une solution T de l'équation $\Delta \varphi + \varphi = \psi$ appartient à $L^1(\mathbb{R}^3)$, on doit avoir pour tout $u \in \mathbb{R}^3$:

$$\hat{\psi}(u) = \mathcal{F}(\Delta T + T)(u) = (1 - \|u\|^2) \cdot \hat{T}(u)$$

Et comme \hat{T} et $\hat{\psi}$ sont dans $\mathcal{C}_0(\mathbb{R}^3)$, on voit que $\hat{\psi}(u)$ doit être nul en tout u tel que $\|u\| = 1$.

Et si T et T_1 sont deux solutions intégrables, on doit avoir $(\Delta + I)(T - T_1) = \psi - \psi = 0$, donc

$$0 = \mathcal{F}((\Delta + I)(T - T_1))(u) = (1 - \|u\|^2)(\hat{T}(u) - \hat{T}_1(u)) .$$

Alors la fonction continue $\hat{T} - \hat{T}_1$ est nulle en tout point u de \mathbb{R}^3 tel que $\|u\| \neq 1$. Et par densité, on doit avoir $\hat{T} = \hat{T}_1$ en tout point de \mathbb{R}^3 , ce qui entraîne que T et T_1 coïncident presque partout, donc partout puisque T et T_1 sont \mathcal{C}^∞ .

Analyse Réelle

3 heures – sans document

Les téléphones portables doivent être rangés éteints dans les sacs. Tout téléphone allumé sera saisi.

I

Soient $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$ et (g_n) une suite dans $L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

On suppose que $M = \sup_n \|g_n\|_\infty < +\infty$ et que $g_n \rightarrow g$ presque partout, et on veut montrer que la suite $(f * g_n)$ converge vers $f * g$ uniformément sur tout compact de \mathbb{R}^d .

1) Montrer qu'il existe une suite (f_k) de fonctions continues à support compact sur \mathbb{R}^d telle que $\|f - f_k\|_1 \rightarrow 0$, et qu'alors, pour $x \in \mathbb{R}^d$, on a

$$|(f * g_n - f * g)(x)| \leq 2M \|f - f_k\|_1 + |f_k * (g - g_n)(x)|$$

que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int |(g - g_n)(z)| e^{-\|z\|} dz = 0$$

et que

$$\begin{aligned} |f_k * (g - g_n)(x)| &\leq e^{\|x\|} \int |f_k(y) e^{\|y\|} \cdot |(g - g_n)(x - y) e^{-\|x - y\|}| dy \\ &\leq e^{\|x\|} \left(\sup_y |f_k(y)| \cdot e^{\|y\|} \right) \left(\int |(g - g_n)(z)| e^{-\|z\|} dz \right) \end{aligned}$$

2) En déduire que si $\varepsilon > 0$ et R sont fixés, on peut trouver k tel que $\|f - f_k\|_1 < \frac{\varepsilon}{4M}$, puis n_0 tel que $\left(\sup_y |f_k(y)| \cdot e^{\|y\|} \right) \left(\int |(g - g_n)(z)| e^{-\|z\|} dz \right) < e^{-R} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$ lorsque $n \geq n_0$, et qu'alors on a $\sup_{\|x\| \leq R} |(f * g_n - f * g)(x)| < \varepsilon$.
Conclure.

II

Pour $s \in \mathbb{R}$, on note H^s l'ensemble des distributions tempérées S sur \mathbb{R} dont la transformée de Fourier est une fonction localement intégrable \hat{S} sur \mathbb{R} satisfaisant

$$\int |\hat{S}(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi < +\infty$$

On munit H^s du produit scalaire $\langle S, T \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \hat{S}(\xi) \overline{\hat{T}(\xi)} (1 + \xi^2)^s d\xi$.

1) Montrer que, muni de ce produit scalaire, H^s est un espace de Hilbert, dont on notera $\|\cdot\|_{H^s}$ la norme, et que H^0 s'identifie isométriquement à $L^2(\mathbb{R})$. Montrer que la mesure de Dirac δ_0 à l'origine est dans H^{-1} .

On considère la fonction $f : x \mapsto Y(x) \cdot e^{-x}$ (où Y désigne la fonction de Heaviside, qui vaut 0 sur $] -\infty, 0[$ et 1 sur $] 0, +\infty[$). Calculer \hat{f} . Pour quelles valeurs de s la fonction f appartient-elle à H^s ?

2) Soient $f \in H^s$ et $g \in H^{-s}$. Montrer que $\hat{f} \cdot \hat{g}$ est une fonction intégrable et que

$$\left| \int \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) d\xi \right| \leq 2\pi \cdot \|f\|_{H^s} \cdot \|g\|_{H^{-s}}$$

En déduire que, si on pose $\Phi_g(f) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) d\xi$, Φ_g est dans le dual de H^s et que l'application $g \mapsto \Phi_g$ envoie continuellement H^{-s} dans le dual de H^s .

Inversement, si Φ est une forme linéaire continue sur H^s , montrer qu'il existe $h \in H^s$ telle que, pour toute $f \in H^s$, on ait $\Phi(f) = \langle f, h \rangle$. Montrer ensuite que la fonction localement intégrable $h_1 : \xi \mapsto (1 + \xi^2)^s \cdot \overline{\hat{h}(\xi)}$ définit une distribution tempérée et qu'il existe $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $\hat{S} = h_1$. Montrer que S appartient à H^{-s} et que $\Phi(f) = \Phi_S(f)$ pour tout $f \in H^s$.

Conclure que l'application $g \mapsto \Phi_g$ identifie le dual de H^s à l'espace H^{-s} .

3) On veut montrer qu'il existe une distribution $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que $S \in H^s$ pour tout $s < 0$, mais que S ne soit pas dans $L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$.

Pour $k \geq 1$, on pose $g_k(x) = e^{-x^2/2} \cdot e^{i2^k x}$, et on veut montrer que, pour $s < 0$, il existe m_s tel que $\|g_k\|_{H^s} \leq m_s \cdot 2^{(k-1)s}$ pour tout k . Montrer que $\hat{g}_k(\xi) = (2\pi)^{1/2} \cdot e^{-(\xi-2^k)^2/2}$, que $|\hat{g}_k(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s \leq 2\pi \cdot e^{-(\xi-2^k)^2} \leq 2\pi \cdot e^{2^{k-1}(\xi-2^k)}$ si $\xi \leq 2^{k-1}$ et que, lorsque $\xi \geq 2^{k-1}$, on a $|\hat{g}_k(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s \leq 2\pi \cdot e^{-(\xi-2^k)^2} \cdot 2^{2(k-1)s}$.

En déduire que

$$\int_{-\infty}^{2^{k-1}} |\hat{g}_k(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi \leq 2\pi \int_{-\infty}^{2^{k-1}} e^{2^{k-1}(\xi-2^k)} d\xi = 2\pi \frac{1}{2^{k-1}} e^{-2^{2k-2}}$$

et que

$$\int_{2^{k-1}}^{+\infty} |\hat{g}_k(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi \leq 2\pi \cdot 2^{2(k-1)s} \cdot \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi$$

et enfin que

$$\|g_k\|_{H^s}^2 \leq e^{-2^{2k-2}} + 2^{(2k-2)s} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\xi^2} d\xi \leq 2^{(2k-2)s} \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + \sup_{t \geq 0} t^{-s} \cdot e^{-t} \right)$$

Conclure.

Déduire de ce qui précède que la série $\sum_{k=1}^{\infty} g_k$ converge normalement dans H^s pour tout $s < 0$ et qu'il existe $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que pour tout $s > 0$ et toute $\varphi \in H^s$ on ait

$$\langle S, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g_k, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int \hat{g}_k(\xi) \hat{\varphi}(\xi) d\xi$$

4) On considère la fonction $\chi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$\chi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } |x| \leq 1 \\ 0 & \text{si } |x| > 1 \end{cases}$$

$h = \chi * \chi$ et $h_\mu(x) = h(x) \cdot e^{i\mu x}$. Montrer que h est continue à support dans $[-2, 2]$, puis que $\hat{\chi}(\xi) = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}$, que $\widehat{h_\mu}(\xi) = 4 \frac{\sin^2(\xi - \mu)}{(\xi - \mu)^2}$, et que $h_\mu \in H^s$ pour $s < \frac{3}{2}$.

Montrer que si f est une fonction dans L^1_{loc} et si T_f est la distribution associée, on doit avoir $f \cdot h \in L^1$ et $\langle T_f, h_\mu \rangle = \widehat{f \cdot h}(-\mu) \rightarrow 0$ quand μ tend vers l'infini, mais qu'on a

$$\langle S, h_\mu \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int e^{-(\xi-2^k)^2/2} \cdot \frac{\sin^2(\xi - \mu)}{(\xi - \mu)^2} d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int e^{-(\xi+\mu-2^k)^2/2} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi$$

et en particulier que $\langle S, h_{2^k} \rangle \geq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int e^{-\xi^2/2} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi$. En déduire que S n'est pas dans L^1_{loc} .

Analyse Réelle

Corrigé de l'examen

I

1) Il est bien connu que $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $L^1(\mathbb{R}^d)$, donc qu'on peut trouver une suite dans $\mathcal{C}_c(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers f . Pour $x \in \mathbb{R}^d$ on a alors

$$\begin{aligned} |f * g_n(x) - f * g(x)| &\leq |f * g_n(x) - f_k * g_n(x)| + |f_k * g_n(x) - f_k * g(x)| + |f_k * g(x) - f * g(x)| \\ &\leq |(f - f_k) * g_n(x)| + |f_k * (g_n - g)(x)| + |(f - f_k) * g(x)| \\ &\leq \|f - f_k\|_1 \cdot \|g_n\|_\infty + |f_k * (g_n - g)(x)| + \|f - f_k\|_1 \cdot \|g\|_\infty \\ &\leq 2M \|f - f_k\|_1 + |f_k * (g_n - g)(x)| \end{aligned}$$

Posons $h_n = g - g_n$. Alors, puisque $|h_n(z)| \cdot e^{-\|z\|} \leq 2M \cdot e^{-\|z\|}$ et que $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-\|z\|} dz < +\infty$, il résulte de la convergence presque partout de h_n vers 0 et du théorème de convergence dominée que

$$\int |h_n(z)| \cdot e^{-\|z\|} dz \rightarrow 0$$

Enfin, puisque $\|x\| + \|y\| - \|x - y\| \geq 0$, on a $1 \leq e^{\|x\|} \cdot e^{\|y\|} \cdot e^{-\|x-y\|}$, donc

$$|f_k * h_n(x)| = \left| \int f_k(y) \cdot h_n(x - y) dy \right| \leq e^{\|x\|} \int |f_k(y)| e^{\|y\|} \cdot |h_n(x - y)| e^{-\|x-y\|} dy$$

et

$$\begin{aligned} \int |f_k(y)| e^{\|y\|} \cdot |h_n(x - y)| e^{-\|x-y\|} dy &\leq \left(\sup_y |f_k(y)| e^{\|y\|} \right) \left(\int |h_n(x - y)| e^{-\|x-y\|} dy \right) \\ &= \left(\sup_y |f_k(y)| e^{\|y\|} \right) \left(\int |h_n(z)| e^{-\|z\|} dy \right) \end{aligned}$$

On en déduit que

$$|f_k * h_n(x)| \leq e^{\|x\|} \left(\sup_y |f_k(y)| e^{\|y\|} \right) \left(\int |h_n(z)| e^{-\|z\|} dy \right)$$

2) Puisque $\|f - f_k\|_1 \rightarrow 0$, on peut trouver un k tel que $\|f - f_k\|_1 < \frac{\varepsilon}{4M}$. Puisque f_k est continue à support compact, il en est de même de la fonction $F : y \mapsto |f_k(y)| e^{\|y\|}$, qui est donc bornée. Et puisque $\int |h_n(z)| e^{-\|z\|} dy \rightarrow 0$, on peut trouver n_0 tel que

$$\|F\|_\infty \cdot \left(\int |h_n(z)| e^{-\|z\|} dy \right) < e^{-R} \cdot \frac{\varepsilon}{2}$$

pour $n \geq n_0$. On a alors $|f_k * h_n(x)| \leq e^{\|x\| - R} \cdot \frac{\varepsilon}{2} \leq \frac{\varepsilon}{2}$ si $\|x\| \leq R$. Et puisque $2M \cdot \|f - f_k\|_1 < \frac{\varepsilon}{2}$, on conclut que $\sup_{\|x\| \leq R} |f * g(x) - f * g_n(x)| \leq \varepsilon$ si $n \geq n_0$ et $\|x\| \leq R$, ce qui montre la convergence uniforme sur tout compact de la suite $(f * g_n)$ vers $f * g$.

II

1) Si S et T sont des distributions tempérées telles que \hat{S} et \hat{T} soient des fonctions vérifiant $\int |\hat{S}(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi < +\infty$ et $\int |\hat{T}(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi < +\infty$, il résulte de l'inégalité de Cauchy-Schwarz que

$$\int |\hat{S}(\xi) \cdot \overline{\hat{T}(\xi)}| (1 + \xi^2)^s d\xi \leq \left(\int |\hat{S}(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi \right)^{1/2} \cdot \left(\int |\hat{T}(\xi)|^2 (1 + \xi^2)^s d\xi \right)^{1/2} < +\infty$$

ce qui permet de définir $\langle S, T \rangle = \frac{1}{2\pi} \int \hat{S}(\xi) \cdot \overline{\hat{T}(\xi)} (1 + \xi^2)^s d\xi$. Il est clair que ceci définit un produit scalaire hermitien sur H^s .

Et si (S_n) est une suite de Cauchy dans H^s , la suite $f_n : \xi \mapsto \hat{S}_n(\xi) \cdot (1 + \xi^2)^{s/2}$ est une suite de Cauchy dans $L^2(\mathbb{R})$ (puisque $\|S_n - S_m\|_{H^s} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \|f_n - f_m\|_2$). La suite (f_n) converge donc dans L^2 vers une fonction f . Alors, pour toute $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a

$$\langle \hat{S}_n, \varphi \rangle = \int f_n(\xi) (1 + \xi^2)^{-s/2} \varphi(\xi) d\xi \rightarrow \int f(\xi) (1 + \xi^2)^{-s/2} \varphi(\xi) d\xi$$

puisque $\xi \mapsto (1 + \xi^2)^{-s/2} \varphi(\xi)$ est dans L^2 . Il en résulte que (\hat{S}_n) converge dans $\mathcal{S}'(\mathbb{R})$ vers une distribution tempérée T , qui est la transformée de Fourier d'une distribution tempérée S . On a alors $\hat{S}(\xi) = (1 + \xi^2)^{s/2} \cdot f(\xi)$, et puisque $\|S - S_n\|_{H^s} = (2\pi)^{-1/2} \cdot \|f - f_n\|_2$, on conclut que (S_n) converge vers S dans H^s . Donc H^s est complet : c'est un espace de Hilbert.

Il résulte de la formule de Plancherel-Parseval que S est dans L^2 si et seulement si \hat{S} est dans L^2 , et que $\|S\|_2^2 = \frac{1}{2\pi} \|\hat{S}\|_2^2 = \|S\|_{H^0}^2$.

Si $S = \delta_0$, on a $\hat{S} = 1$, qui est localement intégrable, et $\frac{1}{2\pi} \int (1 + \xi^2)^{-1} d\xi = \frac{1}{2} < \infty$, ce qui montre que $\delta_0 \in H^{-1}$.

Pour $\xi \in \mathbb{R}$, on a $\hat{f}(\xi) = \int_0^{+\infty} e^{-x-ix\xi} dx = \left[\frac{-1}{1+i\xi} e^{-x-ix\xi} \right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+i\xi}$, et par suite $|\hat{f}(\xi)|^2 = \frac{1}{1+\xi^2}$. Donc $\int (1 + \xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = \int (1 + \xi^2)^{s-1} d\xi$. Et cette intégrale converge si et seulement si $2(s-1) < -1$, c'est-à-dire que $f \in H^s \iff s < \frac{1}{2}$.

2) Si $f \in H^s$ et $g \in H^{-s}$, on sait que les fonctions $\xi \mapsto (1 + \xi^2)^{s/2} \cdot \hat{f}(\xi)$ et $\xi \mapsto (1 + \xi^2)^{-s/2} \cdot \hat{g}(\xi)$ sont dans L^2 . Leur produit $\hat{f} \cdot \hat{g}$ est donc dans L^1 . Et l'inégalité de Cauchy-Schwarz donne

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \cdot \hat{g}(\xi) d\xi \right| &= \frac{1}{2\pi} \left| \int ((1 + \xi^2)^{s/2} \hat{f}(\xi)) \cdot ((1 + \xi^2)^{-s/2} \hat{g}(\xi)) d\xi \right| \\ &\leq \left(\frac{1}{2\pi} \int (1 + \xi^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \cdot \left(\frac{1}{2\pi} \int (1 + \xi^2)^{-s} |\hat{g}(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \\ &\leq \|f\|_{H^s} \cdot \|g\|_{H^{-s}} \end{aligned}$$

La linéarité de Φ_g est claire et l'inégalité précédente montre que $|\Phi_g(f)| \leq \|f\|_{H^s} \cdot \|g\|_{H^{-s}}$, donc que Φ_g est une forme linéaire continue sur H^s de norme au plus $\|g\|_{H^{-s}}$. L'application $g \mapsto \Phi_g$ est donc linéaire continue de norme au plus 1 de H^{-s} dans $(H^s)'$.

Si $\Phi \in (H^s)'$, il résulte du théorème de Riesz appliqué à l'espace de Hilbert H^s qu'il existe $h \in H^s$ tel que $\Phi(f) = \langle f, h \rangle$ pour tout $f \in H^s$, c'est-à-dire :

$$\Phi(f) = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \cdot \overline{\hat{h}(\xi)} \cdot (1 + \xi^2)^s d\xi = \frac{1}{2\pi} \int \hat{f}(\xi) \cdot h_1(\xi) d\xi$$

si on a posé $h_1(\xi) = \overline{\hat{h}(\xi)} \cdot (1 + \xi^2)^s$. Puisque \hat{h} est localement intégrable, il en est de même de h_1 . Et puisque $h \in H^s$, la fonction $h_2 : \xi \mapsto h_1(\xi) \cdot (1 + \xi^2)^{-s/2} = (1 + \xi^2)^{s/2} \cdot \overline{\hat{h}(\xi)}$ est dans L^2 . Alors si $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, on a $m = \sup_{\xi} (1 + \xi^2)^{\frac{1+s}{2}} \cdot |\varphi(\xi)| < +\infty$, donc

$$\begin{aligned} \int |\varphi(\xi) \cdot h_1(\xi)| d\xi &\leq \int m \cdot (1 + \xi^2)^{-\frac{1+s}{2}} |h_1(\xi)| d\xi \\ &\leq m \int |h_2(\xi)| \frac{d\xi}{(1 + \xi^2)^{1/2}} \leq m \left(\int |h_2(\xi)|^2 d\xi \right)^{1/2} \cdot \left(\int \frac{d\xi}{1 + \xi^2} \right)^{1/2} < +\infty \end{aligned}$$

ce qui montre que h_1 définit une distribution tempérée. Il existe donc $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ dont la transformée de Fourier est égale à h_1 . Et puisque $h_2 = (1 + \xi^2)^{-s/2} \cdot \hat{S}$ est dans L^2 , on voit que S est dans H^{-s} et que $\Phi = \Phi_S$.

Enfin, puisque $g \mapsto \Phi_g$ est bijective de H^{-s} sur $(H^s)'$, le dual de H^s est identifié à H^{-s} .

3) On a

$$\widehat{g_k}(\xi) = \int e^{-x^2/2} \cdot e^{i2^k x} \cdot e^{-ix\xi} dx = \int e^{-x^2/2} \cdot e^{-ix(\xi - 2^k)} dx = (2\pi)^{1/2} e^{-(\xi - 2^k)^2/2}$$

donc $\|g_k\|_{H^s}^2 = \int e^{-(\xi - 2^k)^2} (1 + \xi^2)^s d\xi$.

Si $\xi \leq 2^{k-1}$, on a $(1 + \xi^2)^s \leq 1$ puisque $s < 0$, donc $|\widehat{g_k}(\xi)|^2 \cdot (1 + \xi^2)^s \leq 2\pi \cdot e^{-(\xi - 2^k)^2}$, et

$$\int_{-\infty}^{2^{k-1}} |\widehat{g_k}(\xi)|^2 \cdot (1 + \xi^2)^s d\xi \leq 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{2^{k-1}} e^{-(\xi - 2^k)^2} d\xi = 2\pi \cdot \int_{-\infty}^{-2^{k-1}} e^{-\eta^2} d\eta$$

avec $\eta = \xi - 2^k$. De plus, on a pour tout $\xi \leq -2^{k-1} : -\xi^2 \leq 2^{k-1}\xi$, donc

$$\int_{-\infty}^{-2^{k-1}} e^{-\xi^2} d\xi \leq \int_{-\infty}^{-2^{k-1}} e^{2^{k-1}\xi} d\xi = \frac{1}{2^{k-1}} \left[e^{2^{k-1}\xi} \right]_{-\infty}^{-2^{k-1}} = \frac{e^{-2^{2k-2}}}{2^{k-1}} \leq e^{-2^{2k-2}}$$

Et si $\xi \geq 2^{k-1}$, on a $(1 + \xi^2)^s \leq \xi^{2s} \leq 2^{(k-1) \cdot 2s}$, donc

$$\begin{aligned} \int_{2^{k-1}}^{\infty} |\widehat{g_k}(\xi)|^2 \cdot (1 + \xi^2)^s d\xi &\leq 2\pi \cdot 2^{(k-1) \cdot 2s} \cdot \int_{2^{k-1}}^{\infty} e^{-(\xi - 2^k)^2} d\xi \\ &\leq 2\pi \cdot 2^{(k-1) \cdot 2s} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(\xi - 2^k)^2} d\xi = 2\pi \cdot 2^{(k-1) \cdot 2s} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi \end{aligned}$$

Il en résulte que

$$\|g_k\|_{H^s}^2 \leq e^{-2^{2k-2}} + 2^{(k-1) \cdot 2s} \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi = 2^{2(k-1)s} \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + (2^{2k-2})^{-s} \cdot e^{-2^{2k-2}} \right)$$

c'est-à-dire $\|g_k\|_{H^s} \leq m_s \cdot 2^{(k-1)s}$ si on a posé $m_s = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\xi^2} d\xi + \sup_{t \geq 0} t^{-s} \cdot e^{-t} \right)^{1/2}$

Alors on a $\|g_k\|_{H^s} \leq m_s \cdot 2^{(k-1)s}$ et la série géométrique de terme général $(2^{(k-1)s})$ est convergente, puisque sa raison est $2^s < 1$. Il en résulte que la série de terme général (g_k) converge normalement dans H^s pour tout $s < 0$.

Si $\varphi \in \mathcal{S}(R)$, on a $\varphi \in H^s$ pour tout $s > 0$. Il en résulte que $\langle \sum_{k=1}^n g_k, \varphi \rangle$ a une limite quand n tend vers l'infini, quelle que soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, donc qu'il existe $S \in \mathcal{S}'(\mathbb{R})$ telle que

$$\langle S, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g_k, \varphi \rangle$$

Et on a $S = \sum g_k$ dans H^{-s} pour tout $s > 0$, donc

$$\langle S, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \langle g_k, \varphi \rangle = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g_k}(\xi) \cdot \widehat{\varphi}(\xi) d\xi$$

pour toute $\varphi \in H^s$ si $s > 0$.

4) Puisque χ est dans L^2 à support dans $[-1, 1]$, $h = \chi * \chi$ est continue et son support est contenu dans $[-1, 1] + [-1, 1] = [-2, 2]$. Alors

$$\widehat{\chi}(\xi) = \int_{-1}^1 e^{-it\xi} dt = \left[\frac{e^{-it\xi}}{-i\xi} \right]_{-1}^1 = \frac{2i \sin(-\xi)}{-i\xi} = 2 \frac{\sin \xi}{\xi}$$

On a aussi $\widehat{h}(\xi) = \widehat{\chi * \chi}(\xi) = \widehat{\chi}(\xi)^2 = 4 \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2}$. Donc h_μ est continue à support dans $[-2, 2]$ et on a

$$\widehat{h_\mu}(\xi) = \int h(x) e^{i\mu x} \cdot e^{-ix\xi} dx = \widehat{h}(\xi - \mu) = 4 \frac{\sin^2(\xi - \mu)}{(\xi - \mu)^2}$$

Et puisque la fonction continue $\xi \mapsto \left| \widehat{h_\mu}(\xi) \right|^2 (1 + \xi^2)^s$ est équivalente à $|\xi|^{2s-4}$ quand $|\xi| \rightarrow \infty$, on voit que $\|h_\mu\|_{H^s} < +\infty$ si $2s - 4 < -1$, c'est-à-dire si $s < \frac{3}{2}$.

Si $f \in L^1_{\text{loc}}$, on a $f \cdot h \in L^1$, puisque h est bornée à support compact. De plus

$$\langle T_f, h_\mu \rangle = \int f(x) \cdot h_\mu(x) dx = \int f(x) \cdot h(x) \cdot e^{i\mu x} dx = \widehat{f \cdot h}(-\mu)$$

Et puisque $f \cdot h \in L^1$, on doit avoir $\lim_{|\mu| \rightarrow \infty} \widehat{f \cdot h}(-\mu) = 0$. On a néanmoins

$$\begin{aligned} \langle S, h_\mu \rangle &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \int \widehat{g_k}(\xi) \cdot \widehat{h_\mu}(\xi) d\xi = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{4\sqrt{2\pi}}{2\pi} \int e^{-(\xi-2^k)^2/2} \cdot \frac{\sin^2(\xi - \mu)}{(\xi - \mu)^2} d\xi \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int e^{-(\xi+\mu-2^k)^2/2} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{\xi} d\xi \end{aligned}$$

et puisque tous les termes de cette somme sont positifs, on a $\langle S, h_{\lambda_k} \rangle \geq \sqrt{\frac{8}{\pi}} \int e^{-\xi^2/2} \cdot \frac{\sin^2 \xi}{\xi^2} d\xi$, donc $\langle S, h_{\lambda_k} \rangle$ ne tend pas vers 0, ce qui montre que S ne peut être dans L^1_{loc} .

Analyse Réelle

Durée 3 heures – sans document

I

Soient H un espace de Hilbert et (x_n) une suite de H qui converge faiblement vers 0.

- 1) Montrer qu'il existe M tel que $\|x_n\| \leq M$ pour tout n , puis qu'on peut construire par récurrence une suite croissante (n_k) d'entiers telle que $n_0 = 0$ et que, pour tout $n \geq n_{k+1}$ et tout $p \leq n_k$, on ait $|\langle x_p, x_n \rangle| \leq 2^{-k}$.
- 2) Montrer que

$$\left\| \sum_{k=0}^m x_{n_k} \right\|^2 \leq \sum_{k=0}^m \|x_{n_k}\|^2 + 2 \sum_{0 \leq p < k \leq m} |\langle x_{n_p}, x_{n_k} \rangle| \leq (m+1)M^2 + 2 \sum_{p < m} \sum_{k=p+1}^m 2^{-k} \leq (m+1)M^2 + 4$$

- 3) En déduire que la suite $(y_m)_{m \geq 1}$ définie par $y_m = \frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^m x_{n_k}$ converge en norme vers 0 dans H .

On suppose maintenant que E est un espace de Banach réel et (x_n) une suite de E qui converge faiblement vers 0, et on veut montrer l'existence d'une suite (y_m) convergeant en norme vers 0 telle que chaque y_m soit combinaison convexe de $\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

- 4) Soit C l'enveloppe convexe de $\{x_n : n \geq 1\}$, c'est-à-dire l'ensemble des combinaisons convexes des vecteurs x_n .

Montrer que si 0 n'appartenait pas à \overline{C} , il existerait $\varphi \in E'$ telle que $0 < \delta = \inf_{y \in \overline{C}} \varphi(y)$ et qu'on aurait $|\varphi(x_n)| \geq \delta$ pour tout n . En déduire que, pour tout $k \geq 0$, il existe $z_k \in C \cap B(0, 2^{-k})$ et $n_k > n_{k-1}$ tel que z_k appartienne à $\text{conv}(\{x_j : j \leq n_k\})$, puis que si on définit $y_m = z_k$ si $n_k \leq m < n_{k+1}$ et $y_m = x_1$ si $m < n_0$, la suite (y_m) tend vers 0 et que $y_m \in \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

II

Soit $s \geq 0$. On désigne par $H^s(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des fonctions $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ telles que

$$J_s(f) = \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^s |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi < +\infty$$

où $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ désigne la transformée de Fourier de f . On posera $\|f\|_{H^s} = (2\pi)^{-d/2} J_s(f)^{1/2}$. Noter que $H^0(\mathbb{R}^d) = L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $\|f\|_{H^0} = \|f\|_2$.

- 1) Montrer que, si on pose $Tf(\xi) = (2\pi)^{-d/2} (1 + \|\xi\|^2)^{s/2} \hat{f}(\xi)$, l'application $f \mapsto Tf$ est un isomorphisme isométrique de $H^s(\mathbb{R}^d)$ sur $L^2(\mathbb{R}^d)$. En déduire que $H^s(\mathbb{R}^d)$ est complet.
- 2) Soit $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$. Montrer qu'il existe une suite (φ_n) de fonctions de $\mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ qui converge vers Tf dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ et que $g_n = T^{-1}(\varphi_n)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. En déduire que (g_n) converge vers f dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, puis que $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

III

On conserve dans cet exercice les notations de **II**.

Soit P le sous-espace $\{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{R}^d : x_d = 0\}$ de \mathbb{R}^d . Pour toute fonction $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sa restriction $\varphi|_P$ à $P \simeq \mathbb{R}^{d-1}$ appartient à $\mathcal{S}(P)$, et on notera γ l'application linéaire $\varphi \mapsto \varphi|_P$ de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ dans $\mathcal{S}(P)$, qu'on identifiera à $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$.

On veut montrer que γ se prolonge en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$.

1) Soit $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Pour tout $y = (y_1, y_2, \dots, y_{d-1}) \in \mathbb{R}^{d-1}$ et tout $t \in \mathbb{R}$ on identifiera (y, t) au point $x = (y_1, y_2, \dots, y_{d-1}, t)$ de \mathbb{R}^d . Montrer que $\hat{\varphi}$ est intégrable sur \mathbb{R}^d et que

$$\varphi(y, t) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi, \tau) e^{i\langle y, \xi \rangle} \cdot e^{it\tau} d\tau$$

et en déduire que $\psi = \gamma(\varphi)$ vérifie

$$\psi(y) = \varphi(y, 0) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\langle y, \xi \rangle} d\xi \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi, \tau) d\tau$$

2) Noter que la fonction $\tau \mapsto \hat{\varphi}(\xi, \tau)$ appartient à $\mathcal{S}(\mathbb{R})$ pour tout $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$, et en déduire que la fonction $g : \xi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi, \tau) d\tau$ est définie en tout point $\xi \in \mathbb{R}^{d-1}$, et intégrable sur \mathbb{R}^{d-1} . Montrer que $\psi = (2\pi)^{-d} \overline{\mathcal{F}}(g)$ et en déduire que $\hat{\psi} = \frac{g}{2\pi}$ (on rappelle que $\overline{\mathcal{F}}$ désigne la transformée de Fourier conjuguée : $\overline{\mathcal{F}}(f)(\xi) = \int f(x) e^{i\langle x, \xi \rangle} dx$).

3) En utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz, montrer que

$$\begin{aligned} |g(\xi)|^2 &\leq \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2 + \tau^2) \cdot |\hat{\varphi}(\xi, \tau)|^2 d\tau \right) \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{1 + \|\xi\|^2 + \tau^2} \right) \\ &= \frac{\pi}{(1 + \|\xi\|^2)^{1/2}} \cdot \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2 + \tau^2) \cdot |\hat{\varphi}(\xi, \tau)|^2 d\tau \right) \end{aligned}$$

puis que

$$(2\pi)^{d-1} \|\psi\|_{H^{1/2}}^2 = \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (1 + \|\xi\|^2)^{1/2} \left| \hat{\psi}(\xi) \right|^2 d\xi \leq \frac{\pi}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2 + \tau^2) |\hat{\varphi}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau$$

et enfin que $\|\psi\|_{H^{1/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \cdot \|\varphi\|_{H^1}$.

4) Montrer que γ se prolonge en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$.

IV

On conserve dans cet exercice les notations de **II**.

Pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $0 < s < 1$, on pose

$$K_s(f) = \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|f(y) - f(x)|^2}{\|y - x\|^{d+2s}} dx dy \in [0, +\infty]$$

et on veut montrer qu'il existe une constante $C(s)$ telle que $K_s(f) \leq C(s) \cdot J_s(f)$.

1) En posant $y = z + h$ et $x = z - h$, montrer que

$$K_s(f) = 2^{-2s} \int_{\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}^d} \frac{|f(z+h) - f(z-h)|^2}{\|h\|^{d+2s}} dz dh$$

Pour h fixé dans \mathbb{R}^d , on pose $\Delta_h f(z) = f(z+h) - f(z-h)$. Montrer que $\Delta_h f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et que

$$\begin{aligned} (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_h f(z)|^2 dz &= \int \left| \widehat{\Delta_h f}(\xi) \right|^2 d\xi = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 \left| e^{i\langle h, \xi \rangle} - e^{-i\langle h, \xi \rangle} \right|^2 d\xi \\ &= 4 \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 \sin^2 \langle h, \xi \rangle d\xi \end{aligned}$$

2) On désignera par Σ la sphère unité de \mathbb{R}^d et par σ la mesure uniforme sur Σ . On rappelle que si R est une rotation de \mathbb{R}^d et si $f : \Sigma \rightarrow \mathbb{C}$ est σ -intégrable, on a $\int_{\Sigma} f(\omega) d\sigma(\omega) = \int_{\Sigma} f \circ R(\omega) d\sigma(\omega)$, et que si φ est intégrable sur \mathbb{R}^d , l'intégration en coordonnées polaires de φ donne

$$\int_{\mathbb{R}^d} \varphi(z) dz = \int_0^\infty \rho^{d-1} d\rho \int_{\Sigma} \varphi(\rho \cdot \omega) d\sigma(\omega)$$

En particulier, le volume de la boule unité de \mathbb{R}^d est égal à $v_d = \frac{1}{d} \sigma(\Sigma)$. On rappelle aussi que si $\|u\| = \|v\| = 1$, il existe une rotation R de \mathbb{R}^d telle que $R(u) = v$.

Montrer que, pour ξ fixé dans \mathbb{R}^d , on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\sin^2 \langle h, \xi \rangle}{\|h\|^{d+2s}} dh = \int_0^\infty \rho^{-1-2s} d\rho \int_{\Sigma} \sin^2(\rho \langle \xi, \omega \rangle) d\sigma(\omega)$$

puis que la quantité $c(r) = \int_{\Sigma} \sin^2(r \langle u, \omega \rangle) d\sigma(\omega)$ est indépendante de $u \in \Sigma$ et vérifie les deux inégalités : $c(r) \leq \sigma(\Sigma)$ et $c(r) \leq \int_{\Sigma} r^2 \cdot \langle u, \omega \rangle^2 d\sigma(\omega) \leq r^2 \sigma(\Sigma)$.

3) Dédire de ce qui précède que, en posant $\xi = \|\xi\| \cdot u$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{\sin^2 \langle h, \xi \rangle}{\|h\|^{d+2s}} dh = \int_0^\infty \rho^{-1-2s} c(\rho \|\xi\|) d\rho = \|\xi\|^{2s} \cdot \int_0^\infty r^{-1-2s} c(r) dr ,$$

que

$$\begin{aligned} \int_0^\infty r^{-1-2s} c(r) dr &\leq \sigma(\Sigma) \cdot \int_0^\infty r^{-1-2s} \min(1, r^2) dr = \sigma(\Sigma) \cdot \left(\int_0^1 \frac{dr}{r^{2s-1}} + \int_1^\infty \frac{dr}{r^{2s+1}} \right) \\ &= \frac{\sigma(\Sigma)}{2s(1-s)} < +\infty , \end{aligned}$$

et que, avec $C(s) = (2\pi)^{-d} \cdot 2^{2-2s} \int_0^\infty r^{1-2s} c(r) dr$, on a

$$K_s(f) = C(s) \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \left| \hat{f}(\xi) \right|^2 \cdot \|\xi\|^{2s} d\xi \leq C(s) \cdot J_s(f) .$$

4) Montrer que $J_s(f) \leq \frac{1}{C(s)} \cdot K_s(f) + (2\pi)^d \cdot \|f\|_2^2$, et en déduire que si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et si $K_s(f) < +\infty$, alors $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$.

Analyse Réelle

Corrigé de l'examen

I

1) Puisque la suite (x_n) converge faiblement, elle est bornée (théorème de Banach-Steinhaus) et $M = \sup_n \|x_n\| < +\infty$. On pose $n_0 = 0$. Si n_k est déterminé, on a par définition de la convergence faible, $\lim_{n \rightarrow \infty} |\langle x_p, x_n \rangle| = 0$ pour tout p . Il existe donc un $N > n_k$ tel que $|\langle x_p, x_n \rangle| \leq 2^{-k-1}$ pour tout $p \leq n_k$ chaque fois que $n \geq N$. Il suffit alors de prendre $n_{k+1} = N$.

2) On a alors

$$\begin{aligned} \left\| \sum_{k=0}^m x_{n_k} \right\|^2 &= \left\langle \sum_{k=0}^m x_{n_k}, \sum_{k=0}^m x_{n_k} \right\rangle = \left| \sum_{p,k \leq m} \langle x_{n_p}, x_{n_k} \rangle \right| \leq \sum_{p,k \leq m} |\langle x_{n_p}, x_{n_k} \rangle| \\ &= \sum_{p=0}^m \|x_{n_p}\|^2 + \sum_{p \neq k} |\langle x_{n_p}, x_{n_k} \rangle| = \sum_{p=0}^m \|x_{n_p}\|^2 + 2 \cdot \sum_{0 \leq p < k \leq m} |\langle x_{n_p}, x_{n_k} \rangle| \\ &\leq (m+1)M^2 + 2 \cdot \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{k=p+1}^m 2^{-k} \leq (m+1)M^2 + 2 \cdot \sum_{p=0}^{m-1} 2^{-p} \leq (m+1)M^2 + 4 \end{aligned}$$

3) Alors

$$\|y_m\|^2 = \frac{1}{(m+1)^2} \left\| \sum_{k=0}^m x_{n_k} \right\|^2 \leq \frac{(m+1)M^2 + 4}{(m+1)^2} = \frac{M^2}{m+1} + \frac{4}{(m+1)^2} \rightarrow 0$$

lorsque m tend vers l'infini : la suite (y_m) converge donc vers 0 dans H .

4) L'ensemble \overline{C} est un convexe fermé de E . Si $0 \notin \overline{C}$, il résulte du théorème de Hahn-Banach qu'il existerait une forme linéaire continue $\varphi \in E'$ telle que

$$0 = \varphi(0) < \delta = \inf_{y \in \overline{C}} \varphi(y)$$

On devrait donc avoir, pour tout n , $|\varphi(x_n)| \geq \varphi(x_n) \geq \delta > 0$ puisque $x_n \in C$, ce qui contredit la convergence faible de (x_n) vers 0, car l'on devrait avoir alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi(x_n) = 0$.

Il en résulte que $0 \in \overline{C}$, c'est-à-dire que, pour tout k , la boule $B(0, 2^{-k})$ rencontre C en un point z_k . Par définition de C , le point z_k est combinaison convexe d'un nombre fini de points de la suite (x_n) : il existe donc un entier n_k , qu'on peut supposer strictement supérieur à n_{k-1} si celui-ci est déjà déterminé, et des coefficients réels positifs $(\lambda_{k,p})_{p \leq n_k}$ tels que

$$z_k = \sum_{p=1}^{n_k} \lambda_{k,p} x_p \quad \text{et} \quad 1 = \sum_{p=1}^{n_k} \lambda_{k,p}$$

La suite strictement croissante (n_k) tend vers l'infini. Alors, si $\varepsilon > 0$ est donné, on peut trouver k tel que $2^{-k} < \varepsilon$. Et si $m \geq n_k$, il existe un plus grand entier j tel que $n_j \leq m$: on doit donc avoir $j \geq k$, $n_{j+1} > m$, et $y_m = z_j$. Donc $\|y_m\| = \|z_j\| \leq 2^{-j} \leq 2^{-k} < \varepsilon$, ce qui prouve la convergence vers 0 de la suite (y_m) . Et on a clairement $y_m \in \text{conv}\{x_1, x_2, \dots, x_m\}$.

II

On a clairement $H^0(\mathbb{R}^d) = \{f \in L^2(\mathbb{R}^d) : \hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)\} = L^2(\mathbb{R}^d)$ en vertu du théorème de Plancherel. De plus, puisque pour $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, on a $\int |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^d \int |f(x)|^2 dx$, on a $\|f\|_{H^0} = \|f\|_2$.

1) Si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, la fonction f est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$: sa transformée de Fourier \hat{f} est donc bien définie dans $L^2(\mathbb{R}^d)$. Et on a

$$\int_{\mathbb{R}^d} |Tf(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^d} (1 + \|\xi\|^2)^s \cdot |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi = (2\pi)^{-d} J_s(f) = \|f\|_{H^s}^2 < +\infty$$

ce qui montre que $Tf \in L^2(\mathbb{R})$ et que $\|Tf\|_2 = \|f\|_{H^s}$. Donc T est isométrique.

Inversement, si $g \in L^2(\mathbb{R}^d)$, la fonction $g_1 : \xi \mapsto (2\pi)^{d/2} \frac{g(\xi)}{(1 + \|\xi\|^2)^{s/2}}$ est aussi dans $L^2(\mathbb{R}^d)$ puisque $|g_1(\xi)| \leq (2\pi)^{d/2} |g(\xi)|$. C'est donc la transformée de Fourier d'une fonction $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Et on a clairement alors $J_s(f) < +\infty$, c'est-à-dire $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, et $Tf = g$. Donc T est surjectif.

Puisque $H^s(\mathbb{R}^d)$ est isométrique à l'espace complet $L^2(\mathbb{R}^d)$, il est complet lui aussi.

2) On sait que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^2)$ est dense dans l'espace $L^2(\mathbb{R}^d)$. On peut donc trouver $\varphi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d)$ tel que $\|Tf - \varphi_n\|_2 \leq 2^{-n}$. Alors la fonction $\psi_n : \xi \mapsto (2\pi)^{d/2} (1 + \|\xi\|^2)^{-s/2} \cdot \varphi_n$ est \mathcal{C}^∞ et son support est contenu dans celui de φ_n . Il en résulte que $\psi_n \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^d) \subset \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Puisque la transformation de Fourier est un isomorphisme de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ sur lui-même, il existe $g_n \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ telle que $\widehat{g_n} = \psi_n$. On a alors $Tg_n = \varphi_n$, donc $\|f - g_n\|_{H^s} = \|Tf - Tg_n\|_2 = \|Tf - \varphi_n\|_2 \leq 2^{-n}$, ce qui montre que f est, dans $H^s(\mathbb{R}^d)$, la limite de la suite (g_n) de fonctions de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^s(\mathbb{R}^d)$.

III

1) Puisque $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$, on a aussi $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$. Donc φ et $\hat{\varphi}$ sont intégrables. La formule d'inversion de Fourier donne donc :

$$\begin{aligned} \varphi(y, t) &= (2\pi)^{-d} \overline{\mathcal{F}}(\hat{\varphi})(y, t) = (2\pi)^{-d} \int \hat{\varphi}(\xi, \tau) e^{i(\langle y, \xi \rangle + t\tau)} d\xi d\tau \\ &= (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} d\xi \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi, \tau) e^{-i\langle y, \xi \rangle} e^{it\tau} d\tau \end{aligned}$$

En particulier, pour $t = 0$, on obtient

$$\psi(y) = \varphi(y, 0) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} e^{i\langle y, \xi \rangle} \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi, \tau) d\tau d\xi.$$

2) La fonction $\hat{\varphi}$ est dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$; il en résulte qu'elle est \mathcal{C}^∞ et que, pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^d$, et tout entier q la fonction $(\xi, \tau) \mapsto (1 + \|\xi\|^2 + \tau^2) \partial_\alpha \hat{\varphi}(\xi, \tau)$ est bornée sur $\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}$. On en déduit que pour tout ξ la fonction $h_\xi : \tau \mapsto \hat{\varphi}(\xi, \tau)$ est \mathcal{C}^∞ et que pour tout n et tout q , la fonction $\tau \mapsto (1 + \tau^2)^q \frac{d^n}{d\tau^n} h_\xi(\tau)$ est bornée, c'est-à-dire que $h_\xi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$, et en particulier est intégrable. Donc $g(\xi)$ est définie pour tout ξ . De plus, d'après Fubini,

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} |g(\xi)| d\xi \leq \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left(\int_{\mathbb{R}} |\hat{\varphi}(\xi, \tau)| d\tau \right) d\xi = \iint |\hat{\varphi}(\xi, \tau)| d\tau d\xi < +\infty$$

puisque $\hat{\varphi} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d) \subset L^1(\mathbb{R}^d)$. Il en résulte que g est intégrable sur \mathbb{R}^{d-1} . D'après la question précédente, on a

$$\psi(y) = (2\pi)^{-d} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} g(y) e^{i\langle y, \xi \rangle} d\xi = (2\pi)^{-d} \overline{\mathcal{F}}g(y)$$

Puisque $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1}) \subset L^1(\mathbb{R}^{d-1})$ et que $g \in L^1(\mathbb{R}^{d-1})$, la formule d'inversion de Fourier (en dimension $d-1$ cette fois-ci) donne $\hat{\psi} = (2\pi)^{d-1} \mathcal{F}\mathcal{F}((2\pi)^{-d}g) = (2\pi)^{-1}g$.

3) L'inégalité de Cauchy-Schwarz appliquée, pour ξ fixé, à $(1 + \|\xi\|^2 + \tau^2)^{1/2} \cdot \hat{\varphi}(\xi, \tau)$ et à $(1 + \|\xi\|^2 + \tau^2)^{-1/2}$ donne

$$|g(\xi)|^2 = \left| \int_{\mathbb{R}} \hat{\varphi}(\xi, \tau) d\tau \right|^2 \leq \left(\int_{\mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2 + \tau^2) |\hat{\varphi}(\xi, \tau)|^2 d\tau \right) \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{1 + \|\xi\|^2 + \tau^2} \right)$$

Alors, par le changement de variable $u = \frac{\tau}{(1 + \|\xi\|^2)^{1/2}}$, on obtient

$$\int_{\mathbb{R}} \frac{d\tau}{1 + \|\xi\|^2 + \tau^2} = \frac{1}{(1 + \|\xi\|^2)^{1/2}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1 + u^2} = \frac{\pi}{(1 + \|\xi\|^2)^{1/2}}$$

donc $|g(\xi)|^2 \leq \frac{\pi}{(1 + \|\xi\|^2)^{1/2}} \cdot \int_{\mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2 + \tau^2) |\hat{\varphi}(\xi, \tau)|^2 d\tau$. Alors, en intégrant par rapport à ξ :

$$\int_{\mathbb{R}^{d-1}} (1 + \|\xi\|^2)^{1/2} |g(\xi)|^2 \leq \pi \int_{\mathbb{R}^{d-1} \times \mathbb{R}} (1 + \|\xi\|^2 + \tau^2) |\hat{\varphi}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau, \text{ et}$$

$$\begin{aligned} (2\pi)^{d-1} \|\psi\|_{H^{1/2}}^2 &= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (1 + \|\xi\|^2)^{1/2} |\hat{\psi}(\xi)|^2 d\xi = \frac{1}{4\pi^2} \int_{\mathbb{R}^{d-1}} (1 + \|\xi\|^2)^{1/2} |g(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq \frac{\pi}{4\pi^2} \int (1 + \|\xi\|^2 + \tau^2) |\hat{\varphi}(\xi, \tau)|^2 d\xi d\tau = \frac{1}{4\pi} (2\pi)^d \|\varphi\|_{H^1}^2 \end{aligned}$$

c'est-à-dire $\|\psi\|_{H^{1/2}} \leq \frac{1}{\sqrt{2}} \|\varphi\|_{H^1}$.

4) L'application linéaire γ est donc continue de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^1}$ dans $\mathcal{S}(\mathbb{R}^{d-1})$ muni de la norme $\|\cdot\|_{H^{1/2}}$; puisque $\mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ est dense dans $H^1(\mathbb{R}^d)$ et $H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$ complet, γ se prolonge en une application linéaire continue de $H^1(\mathbb{R}^d)$ dans $H^{1/2}(\mathbb{R}^{d-1})$.

IV

1) Le changement de variables $x = z - h$, $y = z + h$ a un déterminant jacobien égal à $(-2)^d$. Il en résulte que

$$\begin{aligned} K_s(f) &= \int \frac{|f(y) - f(x)|^2}{\|y - x\|^{d+2s}} dx dy = 2^d \int \frac{|f(z+h) - f(z-h)|^2}{\|2h\|^{d+2s}} dz dh \\ &= 2^{-2s} \int \frac{|f(z+h) - f(z-h)|^2}{\|h\|^{d+2s}} dz dh \end{aligned}$$

Puisque f est dans $L^2(\mathbb{R}^d)$, il en est de même, pour h fixé, des fonctions $\tau_h f : z \mapsto f(z+h)$ et $\tau_{-h} f : z \mapsto f(z-h)$, ainsi que de leur différence $\Delta_h f$.

Par la formule de Plancherel-Parseval, on a, pour h fixé dans \mathbb{R}^d :

$$(2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_h f(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \widehat{\Delta_h f}(\xi) \right|^2 d\xi$$

Pour une fonction $\varphi \in L^1 \cap L^2$, on a pour tout ξ

$$\widehat{\tau_h \varphi}(\xi) = \int \varphi(x+h) e^{-i\langle x, \xi \rangle} dx = \int \varphi(y) e^{-i\langle y-h, \xi \rangle} dy = e^{i\langle h, \xi \rangle} \hat{\varphi}(\xi)$$

L'ensemble E des φ de L^2 vérifiant l'égalité $\widehat{\tau_h \varphi} = e^{i\langle h, \cdot \rangle} \widehat{\varphi}$ est fermé car les fonctions $\varphi \mapsto \tau_h \varphi$, $\varphi \mapsto \widehat{\varphi}$ et $\varphi \mapsto e^{i\langle \cdot, \xi \rangle} \cdot \varphi$ sont toutes trois continues de $L^2(\mathbb{R}^d)$ dans lui-même.

Et puisqu'il contient le sous-espace $L^1 \cap L^2$ qui est dense dans L^2 , E est égal à L^2 . On a donc $\widehat{\Delta_h f}(\xi) = \widehat{f}(\xi)(e^{i\langle h, \xi \rangle} - e^{-i\langle h, \xi \rangle}) = 2i \sin\langle h, \xi \rangle \cdot \widehat{f}(\xi)$, et par suite

$$(2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} |\Delta_h f(x)|^2 dx = 4 \int |\widehat{f}(\xi)|^2 \sin^2\langle h, \xi \rangle d\xi$$

2) En passant en coordonnées polaires : $h = \rho \cdot \omega$, on a

$$\int \frac{\sin^2\langle h, \xi \rangle}{\|h\|^{d+2s}} dh = \int \frac{\sin^2\langle \rho \cdot \omega, \xi \rangle}{\rho^{d+2s}} \rho^{d-1} d\sigma(\omega) = \int_0^\infty \rho^{-1-2s} d\rho \int_\Sigma \sin^2(\rho\langle \xi, \omega \rangle) d\sigma(\omega)$$

Si u et v sont deux éléments de Σ , il existe une rotation R de \mathbb{R}^d qui transforme u en v . Puisque $\langle Ru, R\omega \rangle = \langle u, \omega \rangle$, on a par invariance par R de la mesure σ

$$\begin{aligned} \int_\Sigma \sin^2(r\langle v, \omega \rangle) d\sigma(\omega) &= \int_\Sigma \sin^2(r\langle R(u), \omega \rangle) d\sigma(\omega) = \int_\Sigma \sin^2(r\langle R(u), R(\omega) \rangle) d\sigma(\omega) \\ &= \int_\Sigma \sin^2(r\langle u, \omega \rangle) d\sigma(\omega) \end{aligned}$$

ce qui montre que la quantité $c(r) = \int_\Sigma \sin^2(r\langle u, \omega \rangle) d\sigma(\omega)$ est indépendante de $u \in \Sigma$. De plus,

pour tout réel t , on a $0 \leq \sin^2 t \leq 1$ et $0 \leq \sin^2 t \leq t^2$ d'où les inégalités $0 \leq c(r) \leq \int_\Sigma d\sigma(\omega) = \sigma(\Sigma)$

et $0 \leq c(r) \leq \int_\Sigma r^2 (\langle u, \omega \rangle)^2 d\sigma(\omega) \leq \int_\Sigma r^2 d\sigma(\omega) = r^2 \sigma(\Sigma)$, puisque $|\langle u, \omega \rangle| \leq \|u\| \cdot \|\omega\| = 1$.

3) Pour $\xi \neq 0$, on a donc, avec $u = \frac{\xi}{\|\xi\|} \in \Sigma$, $\rho \cdot \langle \xi, \omega \rangle = \rho \cdot \|\xi\| \cdot \langle u, \omega \rangle$ et, avec le changement de variable $r = \rho \cdot \|\xi\|$,

$$\int \frac{\sin^2\langle h, \xi \rangle}{\|h\|^{d+2s}} dh = \int_0^\infty \rho^{-1-2s} c(\rho \|\xi\|) d\rho = \int_0^\infty r^{-1-2s} \|\xi\|^{2s+1} c(r) \frac{dr}{\|\xi\|} = \|\xi\|^{2s} \int_0^\infty r^{-1-2s} c(r) dr$$

En majorant $c(r)$ par $r^2 \sigma(\Sigma)$ si $r \leq 1$ et par $\sigma(\Sigma)$ pour $r \geq 1$, on trouve

$$\int_0^\infty r^{-1-2s} c(r) dr \leq \sigma(\Sigma) \left(\int_0^1 r^{1-2s} dr + \int_1^\infty r^{-1-2s} dr \right) = \sigma(\Sigma) \left(\frac{1}{2-2s} + \frac{1}{2s} \right) = \frac{\sigma(\Sigma)}{2s(1-s)} < +\infty$$

Il en résulte que

$$\begin{aligned} K_s(f) &= 2^{-2s} \int \frac{dh}{\|h\|^{d+2s}} \int |\Delta_h f(z)|^2 dz = 2^{2-2s} (2\pi)^{-d} \int |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \int \frac{\sin^2\langle h, \xi \rangle}{\|h\|^{d+2s}} dh \\ &= 2^{2-2s} (2\pi)^{-d} \int_0^\infty r^{-1-2s} c(r) dr \cdot \int_{\mathbb{R}^d} \|\xi\|^{2s} \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = C(s) \int \|\xi\|^{2s} \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi \\ &\leq C(s) \int (1 + \|\xi\|^2)^s \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = C(s) \cdot J_s(f) \end{aligned}$$

Et ceci montre que si $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$, alors $K_s(f) < +\infty$.

4) Pour tout réel $t \geq 0$ et $s \in]0, 1[$, on a $(1+t)^s \leq 1+t^s$, car la dérivée de $t \mapsto 1+t^s - (1+t)^s$ est $s(t^{s-1} - (1+t)^{s-1}) \geq 0$. On en déduit que $(1 + \|\xi\|^2)^s \leq 1 + \|\xi\|^{2s}$, donc que

$$J_s(f) \leq \int \|\xi\|^{2s} \cdot |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi + \int |\widehat{f}(\xi)|^2 d\xi = \frac{K_s(f)}{C(s)} + (2\pi)^d \|f\|_2^2$$

Il en résulte que si $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ et $K_s(f) < +\infty$, alors $J_s(f) < +\infty$, c'est-à-dire $f \in H^s(\mathbb{R}^d)$.