

PRUEBAS DE HIPÓTESIS

Comparando dos proporciones

Algunas veces se desea comparar la proporción con que ocurre un mismo evento en dos poblaciones distintas. Esto conlleva a hacer inferencias acerca de la diferencia $p_1 - p_2$. Supongamos que de una de las poblaciones sacamos una muestra de tamaño m , y que en ella ocurre el evento X_1 veces, y de la segunda población sacamos una muestra de tamaño n y que en ella ocurre el evento X_2 veces. Se puede mostrar que el siguiente estadístico:

$$z = \frac{(\hat{p}_1 - \hat{p}_2) - (p_1 - p_2)}{\sqrt{\frac{p_1 q_1}{m} + \frac{p_2 q_2}{n}}}$$

Donde $\hat{p}_1 = \frac{X_1}{m}$, $\hat{p}_2 = \frac{X_2}{n}$, $q_1 = 1 - p_1$ y $q_2 = 1 - p_2$ se distribuye aproximadamente como una normal estándar cuando n y m son grandes tal que, $m\hat{p}_1$ y $n\hat{p}_2$ son mayores que 5.

Si la hipótesis nula $H_0: p_1 = p_2$ es cierta, entonces el estadístico mencionado anteriormente se convierte en:

$$z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\bar{p} \bar{q} \left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n} \right)}}$$

donde, p es estimado por $\bar{p} = \frac{X_1 + X_2}{m + n}$. Luego, las fórmulas para pruebas de hipótesis serán como siguen:

Dócima para una diferencia de proporciones

Caso I

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_a : p_1 < p_2$$

Caso II

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_a : p_1 \neq p_2$$

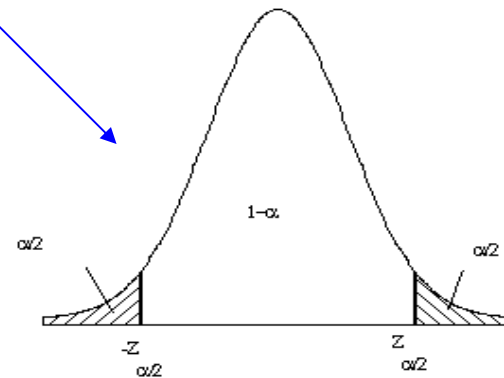
Caso III

$$H_0 : p_1 = p_2$$

$$H_a : p_1 > p_2$$

Prueba Estadística:

$$Z = \frac{\hat{p}_1 - \hat{p}_2}{\sqrt{\bar{p}(1-\bar{p})\left(\frac{1}{m} + \frac{1}{n}\right)}}$$



Decisión:

Si $Z_{cal} < Z_{\alpha}$ entonces
se rechaza H_0

Si $Z_{cal} < Z_{\alpha/2}$ o $Z_{cal} > Z_{1-\alpha/2}$
entonces se rechaza H_0

Si $Z_{cal} > Z_{1-\alpha}$
entonces se rechaza H_0

Ejemplo

Se desea determinar si hay razones para afirmar que la proporción de estudiantes varones es igual según su procedencia (colegio público y privado) versus la alternativa que son diferentes. Los datos recolectados son:

Tabulated statistics: Genero, Escuela

Rows: Genero Columns: Escuela

	privada	pública	total
F	6	5	11
M	8	13	21
total	14	18	32

Cell Contents: Count

Nota:

Los tamaños muestrales empleados solo tienen carácter ilustrativo (es pertinente que m y n ambos sean muestras grandes)

Solución

Test and CI for Two Proportions: Genero, Escuela

Event = M

Escuela	X	N	Sample p
privada	8	14	0.571429
pública	13	18	0.722222

Difference = $p(\text{privada}) - p(\text{pública})$

Estimate for difference: -0.150794

95% CI for difference: (-0.482474, 0.180887)

Test for difference = 0 (vs not = 0): $Z = -0.89$ P-Value = 0.373

Tamaño de muestra para probar una media poblacional

$$n = \frac{(z_{\alpha} + z_{\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

Pruebas unilaterales

$$n = \frac{(z_{\alpha/2} + z_{\beta})^2 \sigma^2}{(\mu_1 - \mu_0)^2}$$

Prueba bilateral

Donde:

Z_{α} = Valor correspondiente al riesgo de una cola

$Z_{\alpha/2}$ = Valor correspondiente al riesgo a dos colas

Z_{β} = Valor correspondiente al poder o potencia.

μ_0 = Media poblacional bajo H_0

μ_1 = Media poblacional bajo H_a

σ^2 = Varianza poblacional de la variable de estudio

EJEMPLO

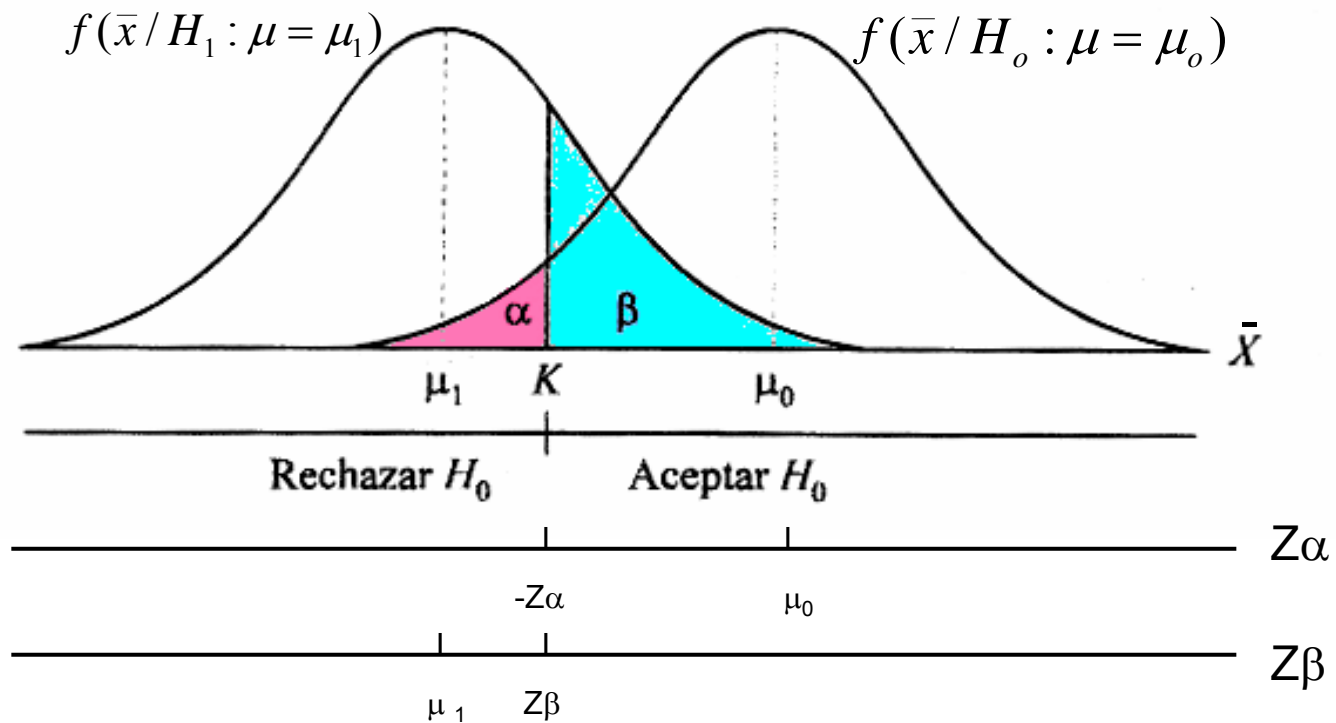
Suponga que X es una población normal con media μ (desconocida) y con varianza σ^2 supuesta conocida.

Dadas las probabilidades α y β de cometer errores tipo I y tipo II respectivamente, determinar el tamaño n de la muestra requerida para probar las hipótesis simples

$$H_0 : \mu = \mu_0 \text{ contra } H_1 : \mu = \mu_1 \text{ donde } \mu_1 < \mu_0.$$

SOLUCION.

Sea K el punto crítico en la variable \bar{X} de la prueba unilateral cola a la izquierda de H_0 contra H_1



$$\alpha = P[\text{error tipo I}] = P[\text{rechazar } H_0 / H_0 : \mu = \mu_0 \text{ es verdadera}]$$

$$\alpha = P[\bar{X} < K / \mu = \mu_0] = P\left[\frac{\bar{X} - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} < \frac{K - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = P\left[Z < \frac{K - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}}\right]$$

de donde resulta

$$\frac{K - \mu_0}{\sigma/\sqrt{n}} = -z_\alpha, \quad K = \mu_0 - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (1)$$

De igual manera,

$$\beta = P[\text{error tipo II}] = P[\text{aceptar } H_0 / H_0 : \mu = \mu_0 \text{ es falsa}]$$

$$\beta = P[\text{aceptar } H_0 / H_1 : \mu = \mu_1 \text{ es verdadera}]$$

$$\beta = P[\bar{X} \geq K / \mu = \mu_1] = P\left[\frac{\bar{X} - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} \geq \frac{K - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right] = P\left[Z \geq \frac{K - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}}\right]$$

de donde resulta,

$$\frac{K - \mu_1}{\sigma/\sqrt{n}} = z_\beta, \quad K = \mu_1 + z_\beta \frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad (2)$$

Resolviendo para n las ecuaciones (1) y (2), resulta

$$n = \frac{(z_\alpha + z_\beta)^2 \sigma^2}{(\mu_0 - \mu_1)^2}$$

Tamaño de muestra para la Comparación de dos medias en muestras independientes

$$n = \frac{(z_{\alpha} + z_{\beta})^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)}{(\mu_2 - \mu_1)^2}$$

Donde:

Z_{α} = Valor correspondiente al riesgo de una cola

Z_{β} = Valor correspondiente al poder o potencia.

μ_1 = Media de la población 1 bajo H_0

μ_2 = Media de la población 2 bajo H_a

σ_1^2 = Varianza poblacional de la variable de estudio 1

σ_2^2 = Varianza poblacional de la variable de estudio 2

Tamaño de muestra para la Comparación de dos medias en muestras independientes:

$$n = \frac{2(Z_{\alpha} + Z_{\beta})^2 * S^2}{d^2}$$

Donde:

- n = sujetos necesarios en cada una de las muestras
- Z_{α} = Valor Z correspondiente al riesgo deseado
- Z_{β} = Valor Z correspondiente al riesgo deseado
- S^2 = Varianza de la variable cuantitativa que tiene el grupo control o de referencia
- d = Valor mínimo de la diferencia que se desea detectar (datos cuantitativos)

Los valores Z_{α} según la seguridad y Z_{β} según el poder se indica

Ejemplo

Deseamos utilizar un nuevo tipo de publicidad y consideramos que sería técnicamente eficaz si lograrse un aumento de las ventas en 150 u.m. en promedio respecto a la antigua publicidad. Por estudios previos sabemos que la desviación típica de las ventas que reciben la antigua publicidad es de 160 u.m. Aceptamos un riesgo de 0.05 y deseamos un poder estadístico de 90% para detectar diferencias si es que existen de lo que se afirma.

Solución:

$$d = 150$$

$$S = 160$$

$$\underline{Z\alpha = 1,645}$$

$$\underline{Z\beta = 1,282}$$

$$n = \frac{2(1,645 + 1,282)^2 * 160^2}{150^2}$$

$$n = 20$$

Tamaño de muestra para probar una proporción poblacional

$$n = \frac{\left[Z_{\alpha} * \sqrt{p_o(1-p_o)} + Z_{\beta} * \sqrt{p(1-p)} \right]^2}{(p - p_o)^2}$$

Donde:

Z_{α} = Valor correspondiente al riesgo en una prueba unilateral.

Z_{β} = Valor correspondiente al poder o potencia.

p_o = Proporción poblacional bajo H_o .

p = Proporción poblacional bajo H_a .

Tamaño de muestra para la comparación de dos proporciones

$$n = \frac{\left[Z_{\alpha} * \sqrt{2p(1-p)} + Z_{\beta} * \sqrt{p_1(1-p_1) + p_2(1-p_2)} \right]^2}{(p_1 - p_2)^2}$$

Donde:

Z_{α} = Valor correspondiente al riesgo a una prueba unilateral.

Z_{β} = Valor correspondiente al poder o potencia.

(es recomendable esté entre el 80 a 90%)

p_1 = Proporción poblacional del grupo 1

p_2 = Proporción poblacional del grupo 2

p = Promedio de las proporciones $(p_1 + p_2)/2$

Ejemplo

Se desea evaluar si un nuevo plan de prevención (T1) es mejor que el habitual (T2) para minimizar los riesgos laborales. Para lo cual se diseña un estudio. Sabiendo que por datos previos la eficacia del plan habitual está alrededor del 70% y se considera relevante si el nuevo plan minimiza el riesgo laboral en 90%. El nivel de significación es 0.05 y se desea un poder estadístico de 80%.

Solución

$$p1 = 0,7$$

$$p2 = 0,9$$

$$Z\alpha = 1,645$$

$$\underline{Z_\beta = 0,842}$$

$$p = \frac{p_1 + p_2}{2} = 0,8$$

$$n = \frac{\left[1.645 * \sqrt{2 * 0.8(1 - 0.8)} + 0.842 * \sqrt{0.7(1 - 0.7) + 0.9(1 - 0.9)} \right]^2}{(0.7 - 0.9)^2}$$

$$n = 49$$

Z_{α}		
α	Test unilateral	Test Bilateral
0.200 (80%)	0.842	1.282
0.150 (85%)	1.036	1.440
0.100 (90%)	1.282	1.645
0.050 (95%)	1.645	1.960
0.025 (97.5%)	1.960	2.240
0.010 (99%)	2.326	2.576

Potencia		
β	$1 - \beta$	Z_{β}
0,01	0,99	2,326
0,05	0,95	1,645
0,10	0,90	1,282
0,15	0,85	1,036
0,20	0,80	0,842
0,25	0,75	0,674
0,30	0,70	0,524
0,35	0,65	0,385
0,40	0,60	0,253
0,45	0,55	0,126

Ejercicios

Se sabe que los voltajes de una marca de pilas tamaño C se distribuyen normalmente, se probó una muestra aleatoria de 15 y se encontró que la media es de 1.4 volts con una desviación estándar de 0.21 volts. En el nivel de significancia de 0.01:

- a) ¿Indica esto que la media de los voltajes es menor que 1.5 volts?
- b) Calcular la probabilidad de cometer el error tipo II si el voltaje promedio real de las pilas es de 1.3 volts.

Solución

Datos:

$\mu = 1.5$ volts.

$s = 0.21$ volts

$\bar{x} = 1.4$ volts.

$n = 15$

$\alpha = 0.01$

a)

Ensayo de hipótesis

$H_0: \mu = 1.5$ volts

$H_1: \mu < 1.5$ volts

Cálculos:

$$t_R = \frac{\bar{x}_R - \mu}{s/\sqrt{n}} = \frac{1.4 - 1.5}{0.21/\sqrt{15}} = -1.84$$

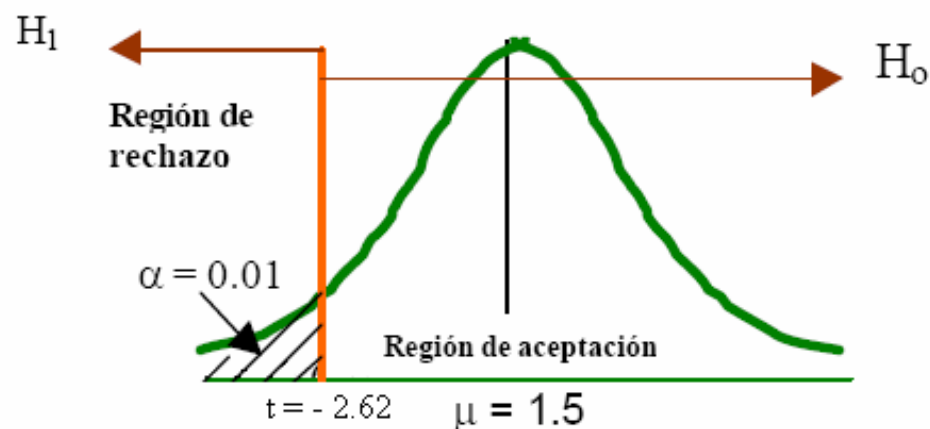
Regla de decisión:

Si $t_R \geq -2.624$ No se rechaza H_0

Si $t_R < -2.624$ Se rechaza H_0

Justificación y decisión:

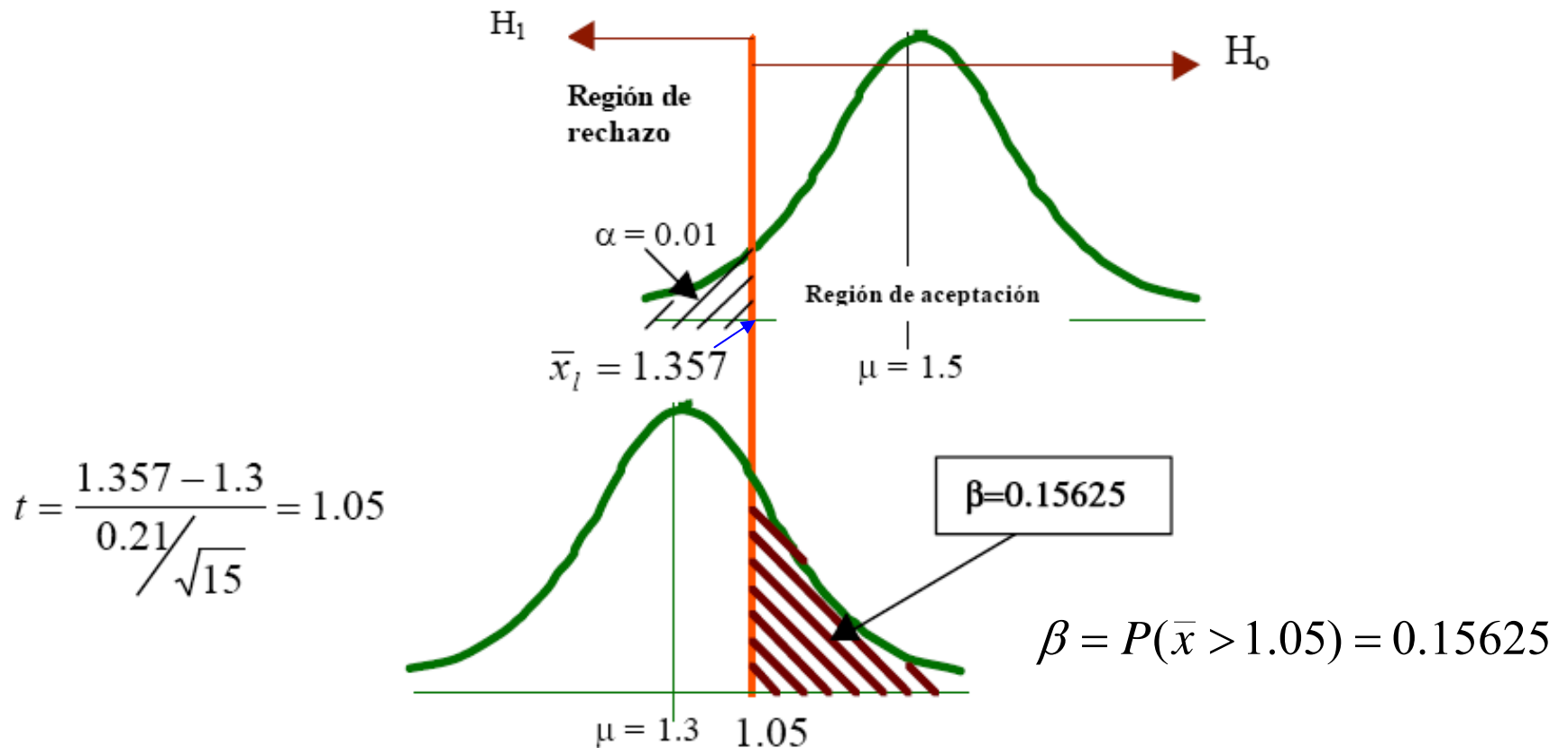
Como $-1.84 > -2.624$, por lo tanto no se rechaza H_0 y se concluye con un nivel de significancia del 0.01 que los voltajes de las pilas tamaño C no son menores a 1.5.



b)

Para calcular el error tipo II se tiene que obtener el valor de \bar{x}_l de la siguiente forma:

$$\bar{x}_L = \mu - \frac{t_l s}{\sqrt{n}} = 1.5 - \frac{(2.624)(0.21)}{\sqrt{15}} = 1.357$$



Ejercicio

Se tiene un ensayo de hipótesis unilateral derecho, con $n = 20$ y $\alpha = 0.05$

$H_0; \sigma = 0.10$

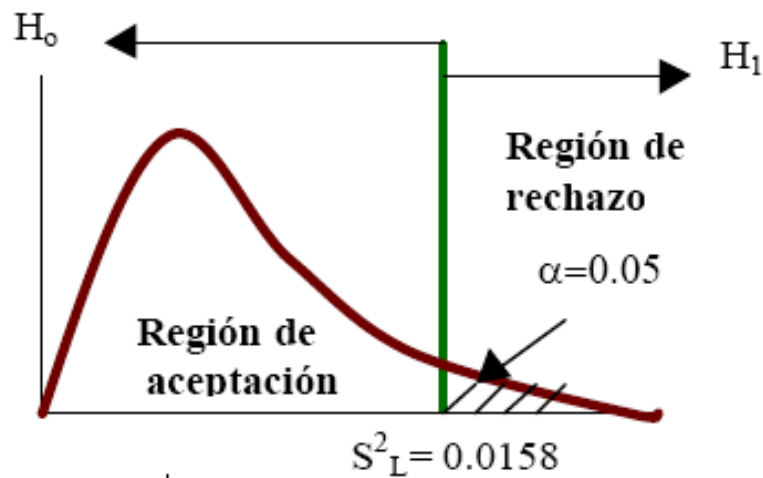
$H_1; \sigma > 0.10$

Se quiere calcular el error tipo II ó b si las desviaciones estándar verdaderas fueran de 0.12 y 0.14.

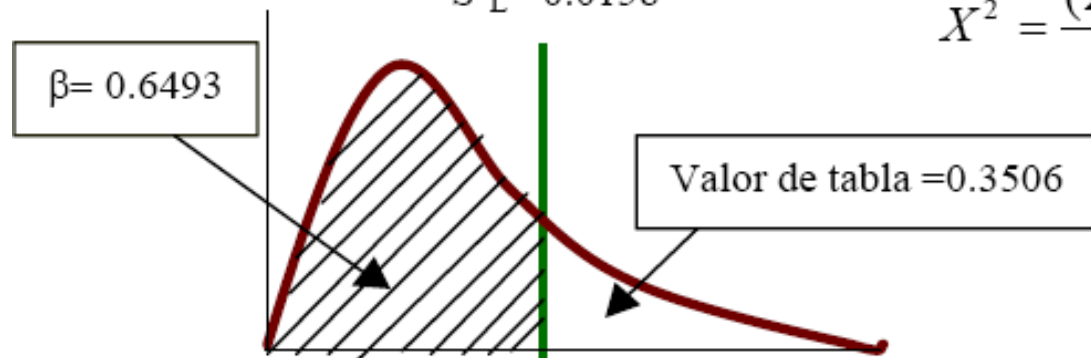
Solución

Para poder calcular el error tipo II, primero se debe encontrar el valor de la varianza muestral límite, esto es s_L^2 , para poder calcular los valores de X^2 y posteriormente calcular el área. Al buscar en la tabla $X^2_{(0.05,19)}=30.144$, este valor se sustituirá en la formula. Al despejar de la fórmula original de X^2 se obtiene:

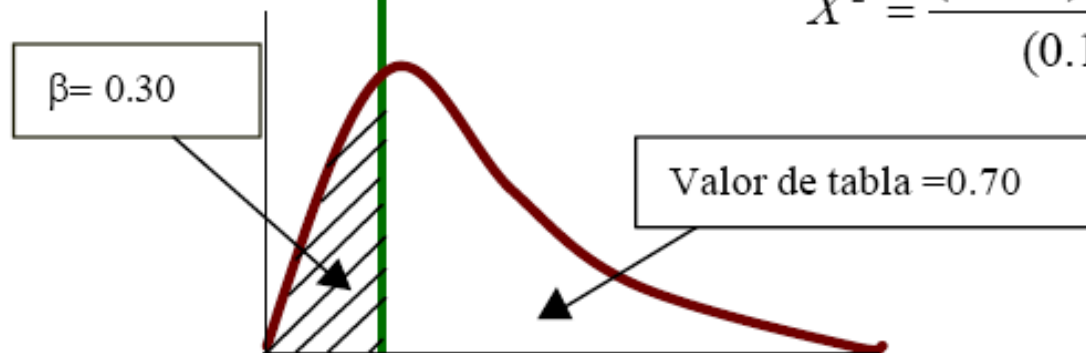
$$s_L^2 = \frac{X_L^2 \sigma^2}{(n-1)} = \frac{(30.144)(0.10)^2}{(20-1)} = 0.0158$$



$$X^2 = \frac{(20-1)(0.0158)}{(0.12)^2} = 20.84$$



$$X^2 = \frac{(20-1)(0.0158)}{(0.14)^2} = 15.31$$



Ejercicio

Las capas de óxido en las obleas semiconductoras son depositadas en una mezcla de gases para alcanzar el espesor apropiado. La variabilidad del espesor es una característica crítica de la oblea, y lo deseable para los siguientes pasos de la fabricación es tener una variabilidad baja. Para ello se estudian dos mezclas diferentes de gases con la finalidad de determinar con cuál se obtienen mejores resultados en cuanto a la reducción en la variabilidad del espesor del óxido. Veintiún obleas son depositadas en cada gas. Las desviaciones estándar de cada muestra del espesor del óxido son $s_1 = 1.96$ angstroms y $s_2 = 2.13$ angstroms. ¿Existe evidencia que indique una diferencia en las desviaciones? Utilice $\alpha=0.05$.

Solución

Datos:

$$s_1 = 1.96$$

$$n_1 = 21$$

$$s_2 = 2.13$$

$$n_2 = 21$$

Ensayo de hipótesis:

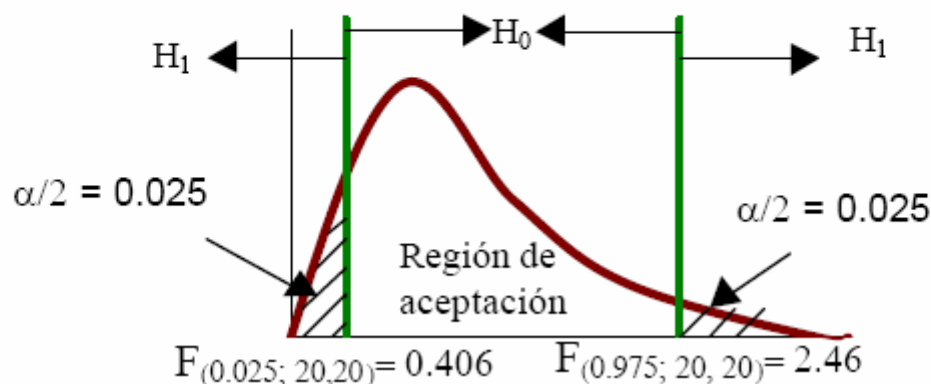
$$H_0; \sigma_2^2 / \sigma_1^2 = 1$$

$$H_a; \sigma_2^2 / \sigma_1^2 \neq 1$$

Estadístico de prueba:

$F = \frac{s_2^2}{s_1^2}$ La sugerencia que se hace es que el numerador sea el de valor mayor .

Entonces los grados de libertad uno será el tamaño de la muestra de la población uno menos uno. $v_1 = 21 - 1 = 20$ y $v_2 = 21 - 1 = 20$.



Regla de decisión:

Si $0.406 \leq F_c \leq 2.46$ No se rechaza H_0 ,

Si la $F_c < 0.406$ ó si $F_c > 2.46$ se rechaza H_0 .

Cálculo:

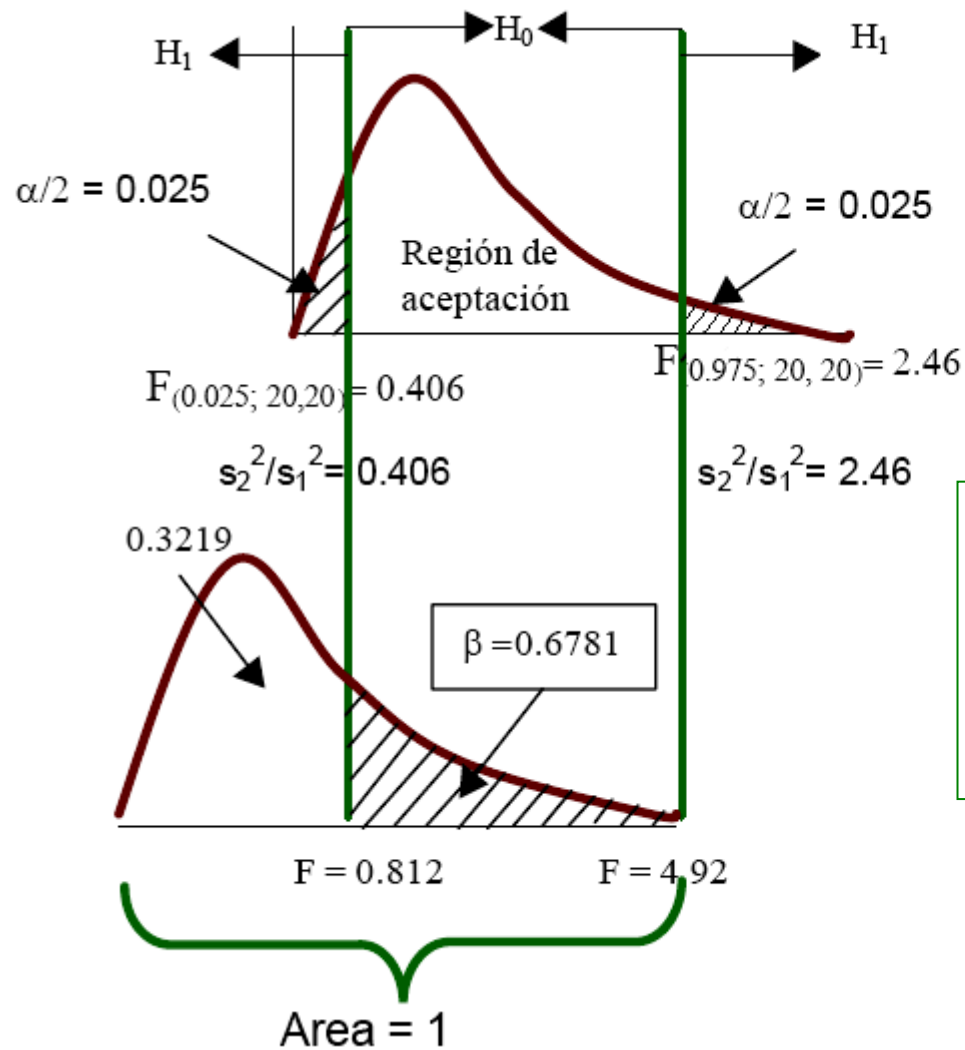
$$F = \frac{s_2^2}{s_1^2} = \frac{1.96^2}{2.13^2} = 0.85$$

Decisión y Justificación:

Como 0.85 esta entre los dos valores de H_0 no se rechaza , y se concluye con un $\alpha = 0.05$ que existe suficiente evidencia para decir que las varianza de las poblaciones son iguales.

Para el ejercicio anterior, encontrar la probabilidad de cometer error tipo II si la verdadera relación es

$$\sigma_1^2/\sigma_2^2 = 2.$$



$$F = \left(\frac{s_2^2}{s_1^2} \right) \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right)$$

$$F = \left(\frac{s_2^2}{s_1^2} \right) \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right) = (0.406)(2) = 0.812$$

$$F = \left(\frac{s_2^2}{s_1^2} \right) \left(\frac{\sigma_1^2}{\sigma_2^2} \right) = (2.46)(2) = 4.92$$

Valores críticos