

### Άσκηση

Πείραμα με πιθανότητα επιτυχίας  $p$ .  
 Εκτελούμε 10 "ανεξάρτητες" δοκιμές του πειράματος.  
 Ποια η πιθανότητα να έχουμε 3 επιτυχίες;

Δε μας ενδιαφέρει το τι  
 πείραμα πραγματοποιούμε.  
 Δειγματικός χώρος είναι:  
 $2^{10}$  αλλά δε μας ενδιαφέρει

$A_i \rightarrow$  έχουμε επιτυχία στη  $i$  δοκιμή  
 Έστω  $X_i = E \rightarrow$  αν το  $i$  πείραμα έχει επιτυχία  
 $X_i = A \rightarrow$  αν το  $i$  πείραμα έχει αποτυχία.

Ακολουθία  $(x_1, x_2, \dots, x_{10})$  καταγράφει τις επιτυχίες/αποτυχίες κάθε φορά.

Έστω  $z_1, \dots, z_r$  όλες οι διαφορετικές διατεταγμένες δεκάδες.  
 Ένας μας ενδιαφέρει να έχουμε 3Ε και 7Α.

π.χ.  $z_1 = (E, E, E, A, \dots, A)$   
 $z_2 = (E, E, A, E, A, \dots, A)$

Οι συνολικά τρόποι αυτών των δεκάδων είναι:  $r = \binom{10}{3}$

$$P(\text{να έχουμε 3 επιτυχίες}) = P((x_1, \dots, x_{10}) = \text{κάποιο από τα } z_1, \dots, z_r) = \sum_{i=1}^r P((x_1, \dots, x_{10}) = z_i)$$

Παίρνω κάποιο από τα  $z_i$

π.χ.  $z_0 = (E, A, A, E, E, A, A, A, A, A)$

$$P((x_1, \dots, x_{10}) = z_0) = P(X_1 = E, X_2 = A, \dots, X_{10} = A)$$

λόγο ανεξαρτησίας  
 η κοινή  
 γίνεται διπλό

$$P(X_1 = E) \cdot P(X_2 = A) \cdot \dots \cdot P(X_{10} = A) = p \cdot (1-p) \cdot (1-p) \cdot \dots \cdot (1-p) = p^3 \cdot (1-p)^7$$

Το ίδιο ισχύει για κάθε  $z_i$ .

$$\text{Άρα } P(\text{να έχω 3 επιτυχίες}) = r \cdot p^3 \cdot (1-p)^7 = \binom{10}{3} \cdot p^3 \cdot (1-p)^7$$

Γενίκευση:

Αν έχω  $n$  δοκιμές και έχω  $k$  επιτυχίες

η πιθανότητα είναι:  $\binom{n}{k} \cdot p^k \cdot (1-p)^{n-k}$

↓  
Τρόποι να  
έχω επιτυχίες

↓  
Μόσος να έχω  
επιτυχία στις  $k$   
θέσεις που επέλεξα

↓  
Μόσος για να  
έχω αποτυχία  
στις υπόλοιπες θέσεις

Είναι για ανεξάρτητα  
ευδεχόμενα.

Αν γέγραψε το πόσες  
επιτυχίες θα έχουμε.

Δεν γέγραψε σε ποιες  
θέσεις είναι οι επιτυχίες μας.

## Κεφάλαιο 2

(τυχαίες μεταβλητές)

$\Omega \rightarrow$  δειγματικός χώρος.

Τυχαία μεταβλητή λέμε κάθε συνάρτηση:  $X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$

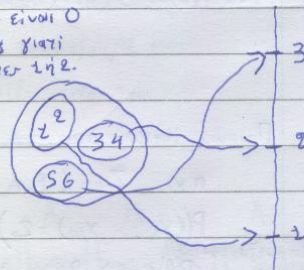
Παράδειγμα:

1] Ρίψη τριών

$\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$

$$X(\omega) = \begin{cases} 0, & \omega = 1, 2 \\ 1, & \omega = 3, 4 \\ 2, & \omega = 5, 6 \end{cases}$$

Πιθανότητα το  $\omega$  να είναι 0  
είναι  $\frac{2}{6}$  και όχι  $\frac{1}{6}$  γιατί  
περιλαμβάνει τις τιμές 1 ή 2.



2]  $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{N}} \rightarrow$  Ακολουθία ρίξεων ενός τριών νομίσματος.

Όπου στην μια όψη έχει 0 και στην άλλη 1.

$\omega = \{e_1, e_2, \dots\}$  είναι ένα αποτέλεσμα του πειράματος.

Ορίσω τη:  $X(\omega) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{e_i}{2^i} \in \mathbb{R}$

π.χ. το  $\frac{3}{4} = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + 0 + 0 + \dots$



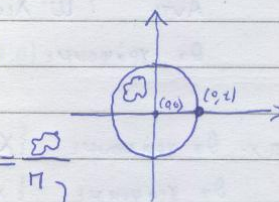
3] Ένας συνεχής χώρος πιθανότητας.

$\Omega$  = δίσκος ακτίνας 1 "χώρο" από το  $(0,0)$

Για  $A \subset \Omega$  ορίζουμε:  $P(A) = \frac{\text{εμβαδό του } A}{\text{εμβαδό του } \Omega} = \frac{\omega}{\pi}$

(εδώ  $\omega(x,y)$  με  $x^2 + y^2 \leq 1$ )

Ορίζουμε  $X(\omega)$  = απόσταση του  $\omega$  από το  $(0,0)$



εμβαδό κύκλου  $\pi R^2$

εδώ  $R=1$

τυχαία μεταβλητή.

Ορισμός:

Συνάρτηση κατανομής μιας τυχαίας μεταβλητής.  $\rightarrow (T.M)$

$X: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$  ονομάζουμε την  $F: \mathbb{R} \rightarrow [0,1]$  με

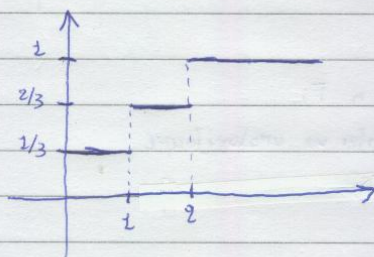
$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\})$$

Παράδειγμα:

Σύμφωνα με το παράδειγμα 1 της προηγούμενης σελίδας.

$$F(x) = P(\{\omega \in \Omega : X(\omega) \leq x\}) = \begin{cases} 0 & \text{αν } x \in (-\infty, 0) \\ 1/3 & \text{αν } x \in [0, 1) \\ 2/3 & \text{αν } x \in [1, 2) \\ 1 & \text{αν } x \in [2, +\infty) \end{cases}$$

Η γραφική της παράσταση:



Συμβολισμός:

Αντί  $\{\omega: X(\omega) \in A\}$

θα γράψουμε  $X \in A$ .

π.χ. θα γράψουμε  $\{X \in x\}$  αντί για  $\{\omega \in \Omega: X(\omega) \leq x\}$

θα γράψουμε  $\{X^2 \leq x+1\}$  αντί για  $\{\omega \in \Omega: X^2(\omega) \leq X(\omega)+1\}$

$$F(x) = P(X \leq x)$$

↓  
τυχαία  
μεταβλητή

↘  
συγκεκριμένος  
αριθμός

Παράδειγμα:

Στο παράδειγμα 3 της προηγούμενης σελίδας.

$$F(x) = P(X \leq x) = 0 \text{ για } x < 0$$

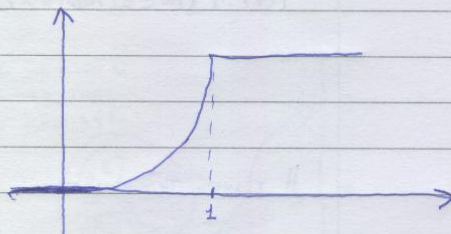
ενώ για  $x \geq 0$

$$P(\omega: \text{απόσταση του } \omega \text{ από το } (0,0) \leq x) = P(\text{δίσκος ακτίνας } x)$$

$$= 1 \text{ αν } x \geq 1$$

$$= \frac{\text{εμβαδό δίσκου ακτίνας } x}{\pi} = \frac{\pi x^2}{\pi} = x^2$$

$$\text{Άρα } F(x) = \begin{cases} 0 & , x < 0 \\ x^2 & , x \in [0, 1] \\ 1 & , x > 1 \end{cases}$$



Γιατί είναι χερόσημη η F;

Γιατί γενικά μας νοιάζει να υπολογίσουμε

πιθανότητες της μορφής:

$$P(X \in A) \text{ με } A \subset \mathbb{R}$$

Η F αρκεί για αυτό.