

Exercice 1 (8 pts)

Le nombre de milligrammes de chacune des vitamines (A,B,C) contenu dans chaque unité des aliments œuf, lait et bœuf, est donné dans le tableau ci-dessous.

Vitamine	Litre de lait	Kilogramme de bœuf	Douzaine d'œufs
A	1	1	10
B	100	10	10
C	10	100	10
Coût	60 DA	1100 DA	350 DA

On désire préparer un plat à base de lait, de bœuf et d'œufs tel que son coût soit optimal et qu'il contienne au moins un milligramme de vitamine A, 50 milligrammes de vitamine B et 10 milligrammes de vitamine C.

- 1) Formuler le modèle de programmation linéaire (P) correspondant. (7 pts)
- 2) Ecrire le programme dual de (P) (1 pt)

Exercice 2 (12 pts)

Soit le programme linéaire (PL) suivant :

$$\begin{aligned}
 &MaxZ = 2x_1 + 2x_2 \\
 (PL) \quad &Soumis \ à : \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}
 \end{aligned}$$

- 1) Résoudre le (PL), à l'aide de l'algorithme du simplexe. (6 pts)
- 2) Dites si le (PL) admet encore d'autres solutions (en expliquons le pourquoi)? (1 pt)
- 3) Si oui, donner deux autres solutions différentes de la première trouvée en 1) pour le (PL). (3 pts)
- 4) Ecrire le programme dual (PL_d) du programme (PL). (1 pt)
- 5) Donner une solution au programme dual (PL_d) à partir d'un tableau final du programme (PL) (1 pt).

CORRECTION : Exercice1 (8 pts)

1) Formulation du modèle de programmation linéaire **(P)** correspondant

a) **Définition des variables (1 pt)**

Soient :

x_1 le nombre de litre de lait utilisé dans le plat

x_2 le nombre de kilogramme de boeuf utilisé dans le plat

x_3 le nombre de douzaine d'oeufs utilisé dans le plat

b) **Description de fonction économique (1,5 pts)**

$$\text{Min}Z = 60x_1 + 1100x_2 + 350x_3$$

c) **Description de chacune des contraintes (3,5 pts)**

Contraintes sur les vitamines A, B et C

$$\begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 \geq 1 & \text{Contrainte sur la vitamine A (1 pt)} \\ 100x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 50 & \text{Contrainte sur la vitamine B (1 pt)} \\ 10x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10 & \text{Contrainte sur la vitamine C (1 pt)} \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 & (0, 5 pt) \end{cases}$$

d) **Le Programme linéaire PL (1 pts)**

$$\text{Min}Z = 60x_1 + 1100x_2 + 350x_3$$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} x_1 + x_2 + 10x_3 \geq 1 \\ 100x_1 + 10x_2 + 10x_3 \geq 50 \\ 10x_1 + 100x_2 + 10x_3 \geq 10 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

3) **Ecriture du programme dual de (P) (1 pts)**

$$\text{Max}Z_d = y_1 + 50y_2 + 10y_3$$

$$\text{Tel que : } \begin{cases} y_1 + 100y_2 + 10y_3 \leq 60 \\ y_1 + 10y_2 + 100y_3 \leq 1100 \\ 10y_1 + 10x_2 + 10y_3 \leq 350 \\ y_1 \geq 0; y_2 \geq 0; y_3 \geq 0 \end{cases}$$

CORRECTION : Exercice 2 (12pts)

1) Résolution du PL avec le simplexe

$$\text{Max}Z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{Soumis à : } \begin{cases} x_1 + x_2 \leq 6 \\ x_1 \leq 4 \\ x_2 \leq 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0 \end{cases}$$

a) Transformation des inéquations en équations **(1pt)**:

$$\text{Max}Z = 2x_1 + 2x_2$$

$$\text{Soumis à : } \begin{cases} x_1 + x_2 + x_3 = 6 & x_3, x_4, x_5 : \text{var. d'écart} \\ x_1 + x_4 = 4 \\ x_2 + x_5 = 3 \\ x_1 \geq 0; x_2 \geq 0; x_3 \geq 0; x_4 \geq 0; x_5 \geq 0 \end{cases}$$

b) Création d'une solution de base de départ **(0,5pt)** :

Nous avons déjà une solution de base :

$$Z = 0$$

$$\begin{cases} x_3 = 6 \\ x_4 = 4 \\ x_5 = 3 \\ x_1 = 0; x_2 = 0; \end{cases}$$

1pt

c) Résolution :

1pt

Tous les $Z_j - C_j$ sont non négatif donc la solution est maximale :

1pt

$$\text{Max}Z = 12 \quad \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \mathbf{0,5pt}$$

	c_j	2	2	0	0	0	
C_i^*	X_i^*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b_i
0	X_3	1	1	1	0	0	6
0	X_4	1	0	0	1	0	4
0	X_5	0	1	0	0	1	3
Z_j		0	0	0	0	0	$Z =$
$Z_j - C_j$		-2	-2	0	0	0	0
0	X_3	0	1	1	-1	0	2
2	X_1	1	0	0	1	0	4
0	X_5	0	1	0	0	1	3
Z_j		2	0	0	2	0	$Z =$
$Z_j - C_j$		0	-2	0	2	0	8
2	X_2	0	1	1	-1	0	2
2	X_1	1	0	0	1	0	4
0	X_5	0	0	-1	1	1	1
Z_j		2	2	2	0	0	$Z =$
$Z_j - C_j$		0	0	2	0	0	12

2) Oui ce PL admet une infinité de solution puisque $Z_4 - C_4 = 0$ pour la variable hors base x_4 **1pt**

3) Recherche de deux autres solutions

L'algorithme du simplexe ne donne que les solutions de base, nous allons donc trouver la 2^{ème} solution de base optimale, en rendant variable de base, la variable hors base dont le $Z_j - C_j$ est égale à zéro c'est-à-dire ici x_4 ce qui donne ce nouveau tableau final :

Donc la 2^{ème} solution optimale de base

$$\text{Max} Z = 12 \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad 0,5\text{pt} \quad 1,5\text{pt}$$

C_j		2	2	0	0	0	
C_i^*	X_i^*	X_1	X_2	X_3	X_4	X_5	b_i
2	X_2	0	1	0	0	1	3
2	X_1	1	0	1	0	-1	3
0	X_4	0	0	-1	1	1	1
Z_j		2	2	2	0	0	$Z=$
$Z_j - C_j$		0	0	2	0	0	12

Toute autre solution s'obtient par une combinaison convexe des deux solutions optimales de base obtenues par l'algorithme du simplexe :

$$X_3 = \lambda_1 X_1 + \lambda_2 X_2 \quad \text{avec } \lambda_1 + \lambda_2 = 1 \quad 0,5\text{pt}$$

$$X_1 = \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad X_2 = \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases}$$

$$\text{Par exemple si } \lambda_1 = \lambda_2 = \frac{1}{2} \rightarrow \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = 4 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 0 \\ x_5 = 0 \end{cases} + \frac{1}{2} \begin{cases} x_1 = 3 \\ x_2 = 3 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1 \\ x_5 = 0 \end{cases} = \begin{cases} x_1 = 7/2 \\ x_2 = 5/2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1/2 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad 1,5\text{pts}$$

$$X_3 = \begin{cases} x_1 = 7/2 \\ x_2 = 5/2 \\ x_3 = 0 \\ x_4 = 1/2 \\ x_5 = 0 \end{cases} \quad \text{est un exemple de } 3^{\text{ème}} \text{ solution}$$

4) Dual PL_d du PL

$$\text{Min} Z_d = 6y_1 + 4x_2 + 3y_3$$

$$\text{Soumis à : } \begin{cases} y_1 + y_2 \geq 2 \\ y_1 + y_3 \geq 2 \\ y_i \geq 0, i = 1, 3 \end{cases} \quad 1\text{pt}$$

5) Solution du dual

$$\text{Max} Z_p = \text{Min} Z_d = 12 \quad ; \quad \text{Avec : } \begin{cases} y_1 = Z_3 - C_3 = 2 \\ y_2 = Z_4 - C_4 = 0 \\ y_3 = Z_5 - C_5 = 0 \end{cases} \quad 1\text{pt}$$