

Médéa, Le 28 novembre 2017

Dynamique des machines tournantes

CHAPITRE 5 Vibrations de torsion des rotors

Responsable de matière
Nasreddine AMOURA

Maître de Conférences,
Faculté de la Technologie, Département du Génie Mécanique
nasreddine.amoura@gmail.com

5.1 Introduction

Au chapitre d'introduction, il est noté que le comportement dynamique de nombreux rotors peut être divisé en trois classes différentes: latérale, axiale et torsionnelle. Ce chapitre porte sur les comportements axiaux et de torsion des rotors. Généralement, ces deux catégories de comportement n'interagissent pas les unes avec les autres, sauf dans les vis sans-fin et les engrenages coniques. Traiter le comportement axial et de torsion ensemble est justifiable vu que l'approche mathématique est la même.

5.2 Modèles simples pour les vibrations axiales

Commençons par considérer les vibrations axiales d'un rotor typique, nous supposons que le rotor est constitué d'un arbre, dont la masse est faible par rapport à la masse de tous les disques qui lui sont connectés. Ensuite, chaque disque de la Figure 5.1 peut être représenté comme une masse rigide et chaque section d'arbre comme un ressort axial sans masse. Un palier de butée peut également être modélisé par un ressort, parfois avec un amortisseur parallèle pour fournir un amortissement représentatif. La rigidité axiale d'une longueur d'arbre de section constante, A , est déterminée à partir de :

$$k = \frac{F}{u} = \frac{EA}{L} \quad (5.1)$$

E : Module d'élasticité du matériau

L : Longueur de l'arbre

u : Déplacement axial

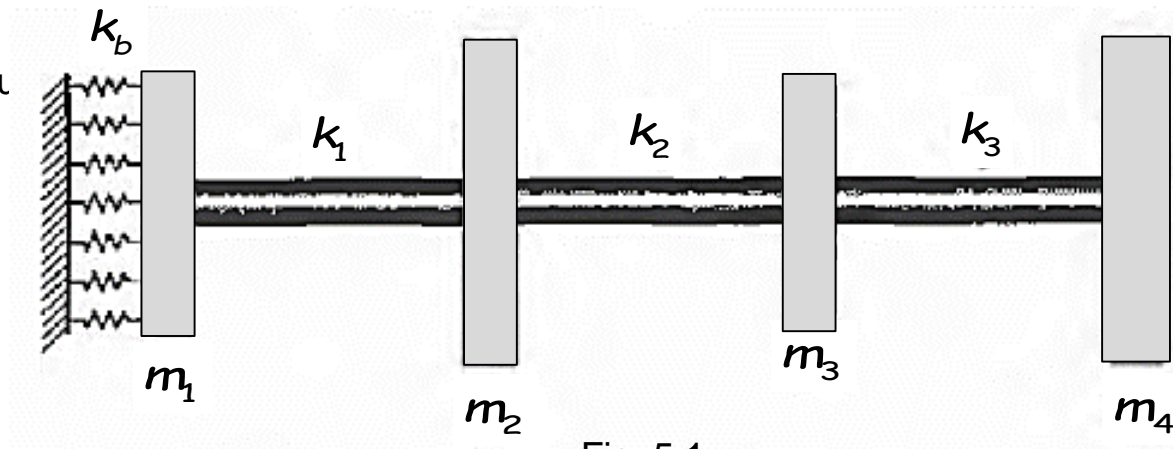
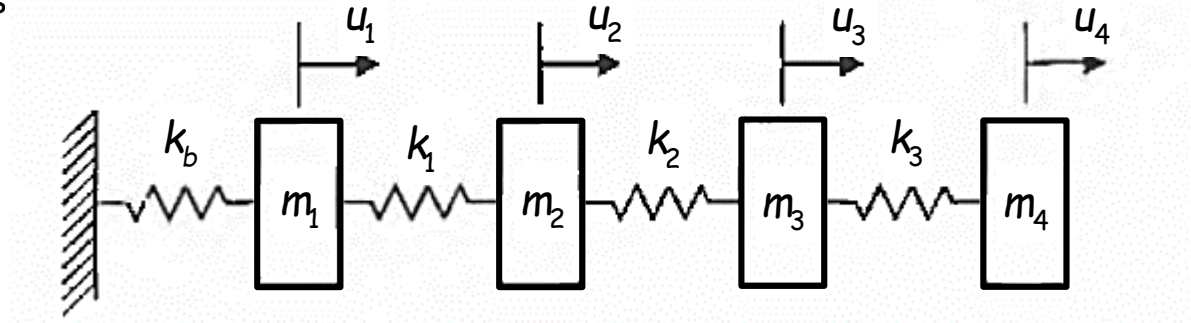


Fig. 5.1

5.2 Modèles simples pour les vibrations axiales

L'équation de mouvement du système peut être déterminée en utilisant une modélisation constituée de masses et ressort



$$M\ddot{q} + Kq = 0 \quad (5.2)$$

$$M = \begin{bmatrix} m_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & m_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & m_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & m_4 \end{bmatrix}, \quad K = \begin{bmatrix} k_b + k_1 & -k_1 & 0 & 0 \\ -k_1 & k_1 + k_2 & -k_2 & 0 \\ 0 & -k_2 & k_2 + k_3 & -k_3 \\ 0 & 0 & -k_3 & k_3 \end{bmatrix}, \quad q = \begin{Bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \\ u_4 \end{Bmatrix}$$

5.2 Modèles simples pour les vibrations axiales

Nous n'avons pas considéré d'amortissement dans le rotor. L'équation (5.2) représente un problème standard avec des matrices de masse et de rigidité constantes. Les fréquences propres, peuvent être calculées en résolvant le problème aux valeurs propres :

$$\lambda Mq = Kq, \quad \text{où } \lambda = \omega_n^2 \quad (5.3)$$

L'équation (5.3) donne quatre valeurs propres (ou quatre fréquences propres) et les quatre vecteurs propres ou formes de mode associés. Calculer la réponse de ce système à une excitation connue est relativement simple. L'équation dynamique résultante peut être résolue soit par l'intégration dans le domaine temporel, soit par des manipulations algébriques matricielles régulières dans le domaine fréquentiel.

5.3 Modèles simples pour les vibrations de torsion

Du fait que pratiquement toutes les machines tournantes ont pour fonction de consommer, de produire ou de transférer de la puissance mécanique, il existe normalement un couple moyen important dans l'arbre; dans la plupart des cas, ce couple a une certaine ondulation. Même une faible proportion du couple nominal d'une machine peut constituer un niveau important d'excitation en torsion. Nous commençons par considérer le rotor représenté à la Figure 5.1, qui est redessiné à la Figure 5.2 avec les paramètres d'inertie et de rigidité pour l'analyse de torsion. Le palier de butée est ignoré dans ce cas.

En supposant que l'inertie de l'arbre est faible par rapport à celle des disques, chaque disque de la figure 5.2 est modélisé par une inertie et chaque section d'arbre peut être modélisée par un ressort de torsion.

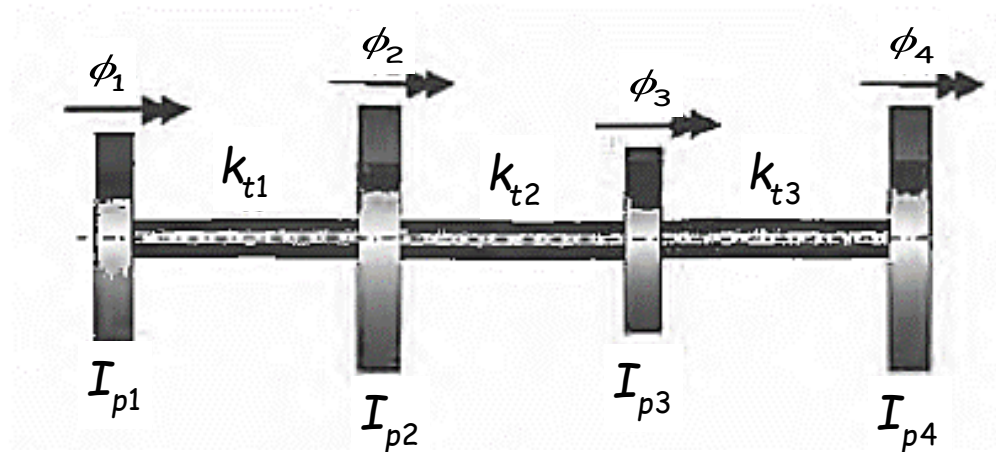


Fig. 5.2

5.3 Modèles simples pour les vibrations de torsion

La rigidité torsionnelle d'un arbre de longueur L avec une section de moment quadratique J est donnée par :

$$k_t = \frac{T}{\phi} = \frac{GJ}{L} \quad (5.4)$$

Où : T est le couple appliqué, G le module de cisaillement et ϕ l'angle de rotation de la section.

Le problème aux valeurs propres associé est identique à celui d'une vibration axiale, avec les matrices masse et rigidité définies par :

$$M = \begin{bmatrix} I_{p1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & I_{p2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & I_{p3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{p4} \end{bmatrix}, K = \begin{bmatrix} k_{t1} & -k_{t1} & 0 & 0 \\ -k_{t1} & k_{t1} + k_{t2} & -k_{t2} & 0 \\ 0 & -k_{t2} & k_{t2} + k_{t3} & -k_{t3} \\ 0 & 0 & -k_{t3} & k_{t3} \end{bmatrix}, q = \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \\ \phi_4 \end{Bmatrix} \quad (5.5)$$

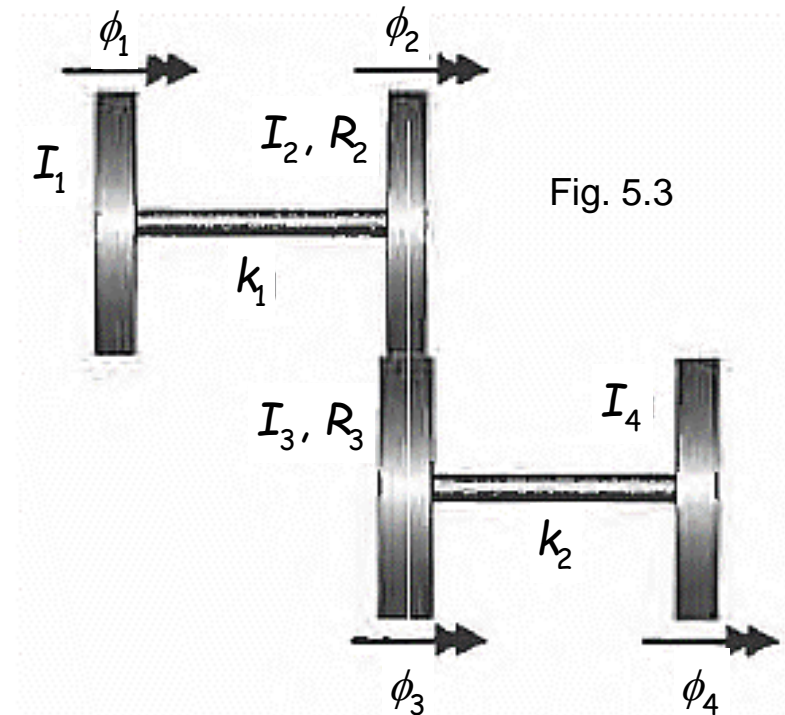
5.4 Systèmes à engrenages

5.4.1 Appliquer des contraintes pour les systèmes à engrenages

Considérons le comportement en torsion dans un système contenant un engrenage, représenté à la Figure 5.3. Le système est modélisé à l'aide de quatre inerties rotatives et de deux ressorts de torsion.

Les équations de mouvement de ce système sont :

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\phi}_1 + k_1 (\phi_1 - \phi_2) &= T_1 \\
 I_2 \ddot{\phi}_2 + k_1 (\phi_2 - \phi_1) &= T_2 + R_2 F_{23} \\
 I_3 \ddot{\phi}_3 + k_2 (\phi_3 - \phi_4) &= T_3 + R_3 F_{23} \\
 I_4 \ddot{\phi}_4 + k_2 (\phi_4 - \phi_3) &= T_4
 \end{aligned}
 \tag{5.6}$$



F_{23} : force tangentielle entre les roues 2 et 3.
 T_1, T_2, T_3 et T_4 : Couples de torsion

5.4 Systèmes à engrenages

5.4.1 Appliquer des contraintes pour les systèmes à engrenages

Le système contient 4 ddl, mais deux d'entre eux sont liés.

On pose : $R_3 \dot{\phi}_3 = -R_2 \dot{\phi}_2$
 $\gamma = R_2 / R_3 = \phi_2 / \phi_3 \Rightarrow \dot{\phi}_3 = -\gamma \dot{\phi}_2$
 $\phi_4 = -\gamma \phi_3$

Les équations de mouvement du système deviennent :

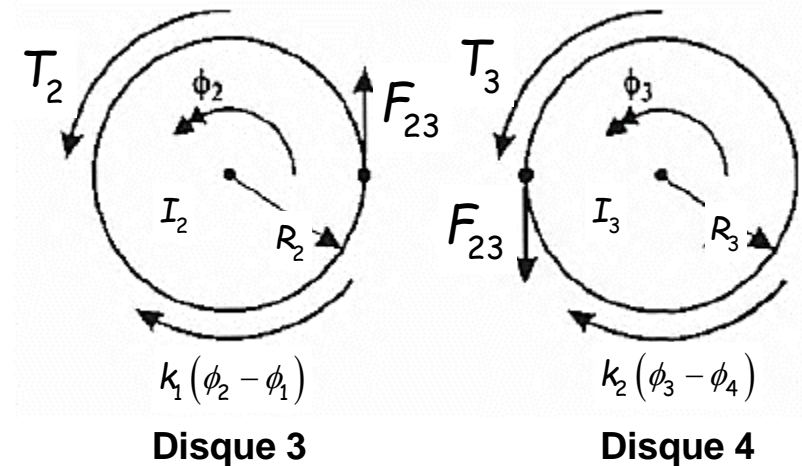


Fig. 5.4

$$\begin{aligned}
 I_1 \ddot{\phi}_1 + k_1 (\phi_1 - \phi_2) &= T_1 \\
 (I_2 + \gamma^2 I_3) \ddot{\phi}_2 + k_1 (\phi_2 - \phi_1) + \gamma^2 k_2 (\phi_2 - \phi_3') &= T_2 - \gamma T_3 \\
 \gamma^2 I_4 \ddot{\phi}_3' + \gamma^2 k_2 (\phi_3' - \phi_2) &= -\gamma T_4
 \end{aligned}
 \tag{5.7}$$

5.4 Systèmes à engrenages

5.4.1 Appliquer des contraintes pour les systèmes à engrenages

Ou sous forme matricielle :

$$\begin{bmatrix} I_1 & 0 & 0 \\ 0 & I_2 + \gamma^2 I_3 & 0 \\ 0 & 0 & \gamma^2 I_4 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \ddot{\phi}_1 \\ \ddot{\phi}_2 \\ \ddot{\phi}_3 \end{Bmatrix} + \begin{bmatrix} k_1 & -k_1 & 0 \\ -k_1 & k_1 + \gamma^2 k_2 & -\gamma^2 k_2 \\ 0 & -\gamma^2 k_2 & \gamma^2 k_2 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \phi_1 \\ \phi_2 \\ \phi_3 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} T_1 \\ T_2 - \gamma T_3 \\ -\gamma T_4 \end{Bmatrix} \quad (5.8)$$

5.4 Systèmes à engrenages

5.4.2 Généralisation de la méthode aux systèmes à engrenages

Dans cette approche formelle de l'analyse des systèmes à engrenages, nous commençons avec un ensemble d'inerties, qui ont toutes la capacité de se déplacer de manière indépendante; c'est-à-dire qu'il n'y a pas de contraintes entre les différentes inerties. Nous nous référons à ce système comme le système non contraint. La position angulaire de chaque inertie est donnée par une variable distincte, ϕ_{U_i} un couple, T_{U_i} , d'une source externe, peut agir sur cette inertie. Le vecteur de tous les déplacements angulaires est q_U et le vecteur de tous les couples appliqués est Q_U .

L'équation de mouvement de tout le système en fonction des ddl non contraints est :

$$M_U \ddot{q}_U + K_U q_U = Q_U + Q_C \quad (5.8)$$

Q_C : sont les forces internes de liaison qui imposent des contraintes sur certains ddl.

Dans la section 5.4.1 :

$$Q_C = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_2 \\ R_3 \\ 0 \end{Bmatrix} F_{23}$$

5.4 Systèmes à engrenages

5.4.2 Généralisation de la méthode aux systèmes à engrenages

Les contraintes sur le système avec des engrenages parfaits assurent l'égalité des vitesses tangentielles au contact de la dent pour chaque engrenage. Ces contraintes sont groupées dans une matrice E dans l'équation:

$$E^T \dot{q}_U = 0 \quad (5.9)$$

Dans la section 5.4.1 : $R_3 \dot{\phi}_3 = -R_2 \dot{\phi}_2 \Rightarrow E = \begin{Bmatrix} 0 \\ R_2 \\ R_3 \\ 0 \end{Bmatrix}$ (5.10)

L'intégration de l'équation (5.10), avec des angles de référence nuls, donne :

$$E^T q_U = 0 \quad (5.11)$$

Supposons que le vecteur des ddl non contraints soit relié au vecteur des ddl contraints par une matrice T , de sorte que:

$$q_U = T q_R \quad (5.12)$$

5.4 Systèmes à engrenages

5.4.2 Généralisation de la méthode aux systèmes à engrenages

Imposer les contraintes au système, revient à écrire :

$$E^T q_U = E^T T q_R = 0, \quad \text{pour tout } q_R \quad (5.13)$$

Ce qui impose : $E^T T = 0$ ou bien $T^T Q_C = 0$ (5.14)

Pour les systèmes avec peu de ddl et un petit nombre de contraintes, il est commode de préparer une telle matrice T par inspection. Pour l'exemple de la section 5.4.1, une matrice de transformation appropriée est :

$$T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & R_3 & 0 \\ 0 & R_2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (5.15)$$

5.4 Systèmes à engrenages

5.4.2 Généralisation de la méthode aux systèmes à engrenages

Ayant une matrice T appropriée, le système est transformé de la façon suivante :

$$M_R \ddot{q}_R + K_R q_R = Q_R \quad (5.16)$$

$$M_R = T^T M_U T, \quad K_R = T^T K_U T, \quad Q_R = T^T Q_U$$

Les contraintes internes sont automatiquement éliminées puisque : $T^T Q_c = 0$

Fin du chapitre 5