

## Série 3 / corrigé

### Exercice 1 :

Hamiltonien en divers systèmes de coordonnées.

(a) Coordonnées cartésiennes :

- Lagrangien:  $(x, y, z)$

$$\left\{ \begin{aligned} L(x, y, z, \dot{x}, \dot{y}, \dot{z}) \\ = \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) - U(x, y, z) \end{aligned} \right.$$

- Moments conjugués :

$$\left\{ \begin{aligned} p_x &= \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}, & p_y &= \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = m \dot{y} \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \end{aligned} \right.$$

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{x} &= \frac{p_x}{m}, & \dot{y} &= \frac{p_y}{m}, & \dot{z} &= \frac{p_z}{m} \end{aligned} \right.$$

- Hamiltonien :

$$H = p_x \dot{x} + p_y \dot{y} + p_z \dot{z} - \frac{1}{2} m (\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z)$$

Soit, en éliminant  $(\dot{x}, \dot{y}, \dot{z})$  au profit 2  
de  $(p_x, p_y, p_z)$ :

$$\boxed{H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m} (p_x^2 + p_y^2 + p_z^2) + U(x, y, z)}$$

Donc, comme il se doit,  $H = T + U$ , car le système est conservatif.

(b) Coordonnées cylindriques:  $(r, \theta, z)$

• Lagrangien:  $(r, \theta, z)$

D'après la série 1,

$$\boxed{L(r, \theta, z, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z}) = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) - U(r, \theta, z)}$$

• Moments conjugués:

$$\boxed{\begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} \\ p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \\ p_z &= \frac{\partial L}{\partial \dot{z}} = m \dot{z} \end{aligned}}$$

Donc,

$$\rightarrow \left\{ \begin{aligned} \dot{r} &= \frac{p_r}{m} , & \dot{\theta} &= \frac{p_\theta}{m r^2} , & \dot{z} &= \frac{p_z}{m} \end{aligned} \right.$$

• Hamiltonien :

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_z \dot{z} - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + \dot{z}^2) + U(r, \theta, z)$$

D'après ce qui précède, en éliminant  $(\dot{r}, \dot{\theta}, \dot{z})$  au profit de  $(p_r, p_\theta, p_z)$  :

$$\left\{ \begin{aligned} H(r, \theta, z, p_r, p_\theta, p_z) &= \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + p_z^2 \right) \\ &+ U(r, \theta, z) \end{aligned} \right.$$

(c) Coordonnées sphériques :  $(r, \theta, \varphi)$

• Lagrangien :

$$\left\{ \begin{aligned} L(r, \theta, \varphi, \dot{r}, \dot{\theta}, \dot{\varphi}) &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) \\ &- U(r, \theta, \varphi) \end{aligned} \right.$$

• Moments conjugués :

$$\left\{ \begin{aligned} p_r &= \frac{\partial L}{\partial \dot{r}} = m \dot{r} , & p_\theta &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}} = m r^2 \dot{\theta} \\ p_\varphi &= \frac{\partial L}{\partial \dot{\varphi}} = m r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi} \end{aligned} \right.$$

Donc,

$$\rightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dot{r} = \frac{p_r}{m}, \quad \dot{\theta} = \frac{p_\theta}{mr^2} \\ \dot{\varphi} = \frac{p_\varphi}{mr^2 \sin^2 \theta} \end{array} \right.$$

• Hamiltonien :

$$H = p_r \dot{r} + p_\theta \dot{\theta} + p_\varphi \dot{\varphi} - \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2 + r^2 \sin^2 \theta \dot{\varphi}^2) + U(r, \theta, \varphi)$$

En utilisant les relations précédentes,  
l'on trouve :

$$\left\{ \begin{array}{l} H(r, \theta, \varphi, p_r, p_\theta, p_\varphi) = \frac{1}{2m} \left( p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} + \frac{p_\varphi^2}{r^2 \sin^2 \theta} \right) \\ \quad + U(r, \theta, \varphi) \end{array} \right.$$

Exercice 2 :

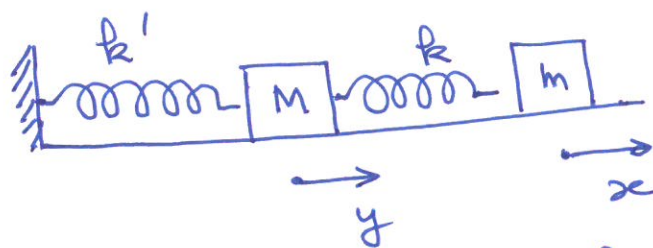
Systèmes mécaniques couplés.

$$k > 0, k' > 0$$

On a un système à deux degrés de liberté :

$(x, y)$ .





$k$ : couplage entre  $m$  et  $M$ ;  $k'$ : couplage entre  $M$  et le support

① Langrangien:

$$\left\{ \begin{aligned} T(\dot{x}, \dot{y}) &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2, \text{ énergie cinétique} \end{aligned} \right.$$

$$\left\{ \begin{aligned} U(x, y) &= \frac{k}{2} (x - y)^2 + \frac{k'}{2} y^2, \text{ énergie potentielle} \end{aligned} \right.$$

Donc, le Lagrangien  $L = T - U$  est tel que:

$$\left\{ \begin{aligned} L(x, y, \dot{x}, \dot{y}) &= \frac{1}{2} m \dot{x}^2 + \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \\ &\quad - \frac{k}{2} (x - y)^2 - \frac{k'}{2} y^2 \end{aligned} \right.$$

② Equations de mouvement:

On écrit formellement:

$$\left\{ \begin{aligned} \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} \right) - \frac{\partial L}{\partial x} &= 0 \\ \frac{d}{dt} \left( \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} \right) - \frac{\partial L}{\partial y} &= 0 \end{aligned} \right.$$

On a:  $\frac{\partial L}{\partial x} = -k(x - y), \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m \dot{x}$   
 $\frac{\partial L}{\partial y} = -k(y - x) - k' y, \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M \dot{y}$

Donc, d'on a les équations de mouvement: <sup>6</sup>

$$\begin{cases} m\ddot{x} + k(x-y) = 0 \\ M\ddot{y} + (k+k')y - kx = 0 \end{cases}$$

Ce sont des équations différentielles linéaires  
et couplées, faciles à résoudre.

© Hamiltonien :

• Moments conjugués :

$$\begin{cases} p_x = \frac{\partial L}{\partial \dot{x}} = m\dot{x} \\ p_y = \frac{\partial L}{\partial \dot{y}} = M\dot{y} \end{cases}$$

$$\rightarrow \dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{y} = \frac{p_y}{M}$$

$$\begin{aligned} H &= p_x \dot{x} + p_y \dot{y} - \frac{1}{2} m \dot{x}^2 - \frac{1}{2} M \dot{y}^2 \\ &\quad + \frac{k}{2} (x-y)^2 + \frac{k'}{2} y^2 \end{aligned}$$

En utilisant les relations précédentes :

$$\begin{cases} H(x, y, z, p_x, p_y, p_z) = \frac{1}{2m} p_x^2 + \frac{1}{2M} p_y^2 \\ \quad + \frac{k}{2} (x-y)^2 + \frac{k'}{2} y^2 \end{cases}$$

$$\underline{H = T + U}$$

# ④ Equations de Hamilton :

- On écrit formellement :

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{\partial H}{\partial p_x}, \quad \dot{p}_x = -\frac{\partial H}{\partial x} \\ \dot{y} = \frac{\partial H}{\partial p_y}, \quad \dot{p}_y = -\frac{\partial H}{\partial y} \end{array} \right.$$

Donc,

$$\left\{ \begin{array}{l} \dot{x} = \frac{p_x}{m}, \quad \dot{p}_x = -\frac{k}{2}(x-y) \\ \dot{y} = \frac{p_y}{M}, \quad \dot{p}_y = -\frac{k}{2}(y-x) - \frac{k'}{2}y \end{array} \right.$$

- Comparaison avec les équations de mouvement

$$\text{De } \dot{x} = \frac{p_x}{m} \rightarrow \ddot{x} = \frac{\dot{p}_x}{m} = \frac{1}{m} \left( -\frac{k}{2} \right) (x-y)$$

et

$$\boxed{m\ddot{x} + k(x-y) = 0}$$

OK

$$\text{De } \dot{y} = \frac{p_y}{M} \rightarrow \ddot{y} = \frac{\dot{p}_y}{M} = \frac{1}{M} \left[ -\frac{k}{2}(y-x) - \frac{k'}{2}y \right]$$

et

$$\boxed{M\ddot{y} + (k+k')y - kx = 0}$$

OK



Constantes de mouvement:

$$(a) \quad C(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s; t) = F(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s) - t H(q_1, \dots, q_s, p_1, \dots, p_s)$$

On a une dépendance linéaire dans le temps de la grandeur  $C$ .

$$\frac{dC}{dt} = \{C, H\} + \frac{\partial C}{\partial t} = \{F, H\} - H = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\{F, H\} = H}$$

Or  $\{F, H\} = \frac{dF}{dt}$ , l'on a donc la condition équivalente:

$$\boxed{\frac{dF}{dt} = H}$$

dont la solution est linéaire par rapport au temps

(b) Application à l'Hamiltonien:

$$H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{A_n}{q^n}$$

← amplitude

↳  $U(q)$ , potentiel extérieur

$\begin{cases} U(q) \rightarrow 0, q \rightarrow \infty \\ \text{donc } n > 0. \end{cases}$



On a :

$$C(q, p) = \frac{pq}{2} - tH$$

↓

$$F(q, p)$$

$$\begin{aligned} \{F, H\} &= \frac{p}{2} \frac{\partial H}{\partial p} - \frac{q}{2} \frac{\partial H}{\partial q} \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{q^n}{2} \frac{A_n}{q^{n+1}} = H \\ &= \frac{p^2}{2m} + \frac{A_n}{q^n} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{n=2}$$

Exercice 4 :

Applications du formalisme d'Hamilton-

Jacobi

(a)  $H(p) = \frac{p^2}{2m}$  (particule libre)

•  $\frac{\partial S}{\partial t} + H\left(q, \frac{\partial S}{\partial q}; t\right) = 0$  (ours)

On choisit comme fonction génératrice

$$S = S_2.$$

Or  $H = p^2/2m \Rightarrow$

$$\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 = 0$$

On a remplacé  $p$  par  $\frac{\partial S}{\partial q}$ . La solution est :

$$\begin{cases} S(q, P) = S_0(q) - Et \\ S_0(q) \text{ est l'action de Maupertuis} \end{cases}$$

L'équation de Hamilton-Jacobi donne :

$$\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 = E > 0 \text{ (cours)}$$

ou encore

$$\frac{dS_0}{dq} = \pm \sqrt{2mE}$$

et

$$S(q, P) = \pm \sqrt{2mE} q - Et$$

D'après le cours :  $P$  et  $Q$  sont des constantes de mouvement. On a choisi  $P = E$ , et

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \pm \sqrt{\frac{m}{2E}} q - t$$

Par inversion :

$$q(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}} (t + Q)$$

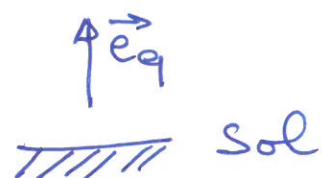
Le signe  $\pm$  est imposé par les conditions initiales. Si à  $t=0$ ,  $q(0)=q_0$ , alors :

$$q(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{m}} t + q_0$$

Le signe  $+$  est pour un mouvement vers la droite de  $q=0$ , et  $-$ , pour un mouvement vers la gauche. Il s'agit d'un mouvement linéaire, conforme avec la solution qu'on obtient en résolvant l'équation de Newton.

- (b) Hamiltonien:  $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + mgq$ ,  
d'une particule de masse  $m$  dans le  
champ de la pesanteur d'accélération  $\vec{g}$ .

$q$  étant l'altitude.



- On part de l'équation d'Hamilton-Jacobi

$$\boxed{\frac{\partial S}{\partial t} + \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S}{\partial q} \right)^2 + mgq = 0}$$

La solution formelle est :

$$\boxed{S(q, t) = S_0(q) - Et}$$

L'action de Maupertuis est solution de :

$$\boxed{\frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + mgq = E}$$

Ce qui donne :

$$\frac{dS_0}{dq} = \pm \sqrt{2m(E - mgq)}$$

Par simple intégration, l'on obtient :



$$S_0(q) = \pm \frac{2}{3g} \sqrt{\frac{2}{m}} \cdot (E - mgq)^{3/2} + C$$

$$C = C_0$$

On choisit :  $P = E$ , l'on a :

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_0}{\partial E} - t$$

$$= \pm \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{m}} (E - mgq)^{1/2} - t$$

Par inversion, l'on obtient :

$$q(t) = \frac{E}{mg} - \frac{g}{2} (t + Q)^2$$

Le signe - signifie que  $q \downarrow$  avec  $t \uparrow$  (chute libre). Il s'agit d'un mouvement uniformément accéléré, qu'on aurait obtenu par application du P.F.D.

Si  $q(0) = q_0$  (altitude initiale), alors :

$$Q = \frac{1}{g} \sqrt{\frac{2}{m}} (E - mgq_0)^{1/2}$$

(c) Hamiltonien:  $H(q, p) = \frac{p^2}{2m} + \frac{k}{2} q^2$ ,

d'un oscillateur harmonique, de position  $q$  et d'impulsion  $p$ .  $m$  étant sa masse et  $k$  est sa constante de raideur.

- La fonction génératrice associée est:

$$S(q; t) = S_0(q) - Et$$

- L'équation d'Hamilton-Jacobi est:

$$\frac{\partial S}{\partial t} + H(q, \frac{\partial S}{\partial q}; t) = 0$$

on a remplacé  $p$  par  $\frac{\partial S}{\partial q}$ .

- L'action de Maupertuis  $S_0$  satisfait:

$$\int \left( \frac{1}{2m} \left( \frac{\partial S_0}{\partial q} \right)^2 + k \frac{q^2}{2} \right) = E$$

ou encore

$$\int \frac{dS_0}{dq} = \pm \sqrt{2m \left( E - k \frac{q^2}{2} \right)}$$

Pour résoudre cette équation différentielle de premier ordre, on pose :

$$\sqrt{\frac{k}{2E}} q = \sin \theta$$

L'on trouve :

$$\int S_0 = \pm \frac{E}{2\omega} (2\theta + \sin 2\theta)$$

où  $\omega = \sqrt{k/m}$  est la pulsation de l'oscillateur. En choisissant  $P=E$ ,  
l'on a :

$$Q = \frac{\partial S}{\partial E} = \frac{\partial S_0}{\partial E} - t$$

$$\downarrow$$

$$\frac{\partial S_0}{\partial \theta} \cdot \frac{\partial \theta}{\partial E}$$

on a :

$$\dot{\theta} \cos \theta = \left( -\frac{1}{2} E^{-3/2} \right) \sqrt{\frac{k}{2}} q$$

Donc,

$$Q = \pm \frac{1}{\omega} \arcsin \left( \sqrt{\frac{k}{2E}} q \right) - t$$

Par inversion, on obtient comme solution:

$$q(t) = \pm \sqrt{\frac{2E}{k}} \sin[w(t+Q)]$$

Le mouvement du système est alors sinusoïdal et l'amplitude et la phase sont déterminées par les conditions initiales. On retrouve alors la solution qu'on obtiendrait par application du P.F.D.

---