

I. PHẦN CHUNG CHO TẤT CẢ CÁC THÍ SINH (7,0 điểm)

Câu I (2,0 điểm). Cho hàm số: $y = x^3 - mx + m - 1$ (1) (C_m), m là tham số thực.

1. Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị của hàm số (1) khi $m = 3$.
2. Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại M có hoành độ $x = -1$, cắt đường tròn có tâm $I(2; 3)$ bán kính $R = 2$ theo một dây cung AB có độ dài nhỏ nhất.

Câu II (2,0 điểm).

1. Giải phương trình: $2(1 + \cos x)(1 + \cot^2 x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + \sin x}$.
2. Giải hệ phương trình:
$$\begin{cases} x^3 + y^3 = 3x^2 - 6x - 3y + 4 \\ x^2 + y^2 - 6x + y - 10 = \sqrt{5 + y} - \sqrt{4x + y} \end{cases} \quad (x, y \in \mathbb{R})$$

Câu III (1,0 điểm). Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{(3x^3 - 1) \ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx$.

Câu IV (1,0 điểm). Cho hình lăng trụ đứng $ABC.A'B'C'$ có đáy ABC là tam giác vuông, $AC = BC = a$, góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ bằng 30° . Gọi M là trung điểm của $A'B'$. Tính thể tích khối lăng trụ $ABC.A'B'C'$ và khoảng cách từ M đến mặt phẳng $(A'BC)$.

Câu V (1,0 điểm). Cho ba số thực x, y, z thỏa mãn $x \geq y \geq z$ và $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x+2)(y+2)(z+2)$.

II. PHẦN RIÊNG (3,0 điểm): Thí sinh chỉ được chọn một trong hai phần (phần A hoặc phần B).

A. Theo chương trình chuẩn

Câu VI.a (2,0 điểm).

1. Trong mặt phẳng với hệ tọa độ Oxy cho tam giác ABC , đường thẳng chứa đường trung tuyến và phân giác trong ở đỉnh A lần lượt có phương trình là $d_1: 2x + y - 3 = 0$ và $d_2: x + y - 2 = 0$. Đường thẳng AB đi qua $M(2; 1)$, đường thẳng BC đi qua điểm $N(2; 5)$. Tìm tọa độ các đỉnh B, C biết đỉnh B có hoành độ dương.
2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho điểm $M(1; 1; 1)$, đường thẳng $d: \frac{x-2}{1} = \frac{y-1}{-1} = \frac{z}{1}$ và mặt phẳng $(P): x + y - z + 3 = 0$. Gọi A là giao điểm của d và (P) . Viết phương trình đường thẳng Δ chứa M , cắt d và (P) lần lượt tại B và C sao cho tam giác ABC cân tại B .

Câu VII.a (1,0 điểm). Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất sao cho $|z| = |\bar{z} - 4 + 3i|$.

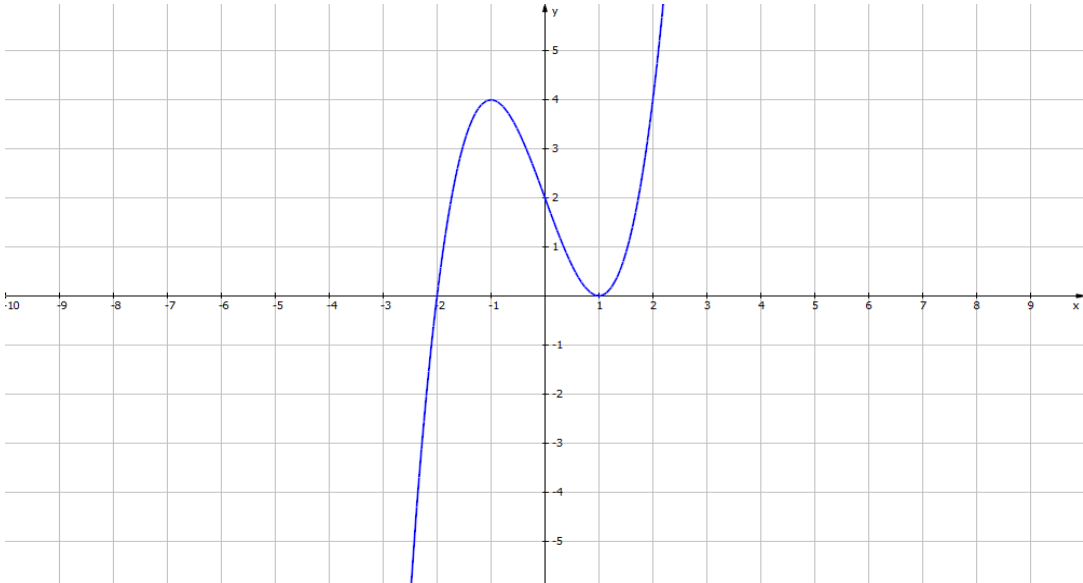
B. Theo chương trình nâng cao

Câu VI.b (2,0 điểm).

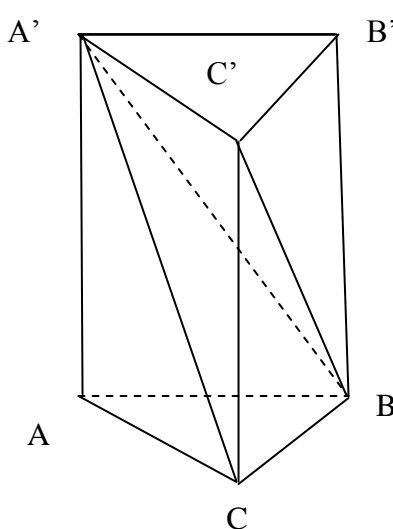
1. Trong mặt phẳng Oxy , lập phương trình chính tắc của Elip (E) biết điểm $M(1; \sqrt{3})$ nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông và hình chữ nhật cơ sở của (E) nội tiếp đường tròn $(C): x^2 + y^2 = 20$.
2. Trong không gian với hệ tọa độ $Oxyz$, cho $A(0; 4; 1)$, $B(3; -2; 4)$, $C(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 6 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho $|\overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC}|$ đạt giá trị nhỏ nhất.

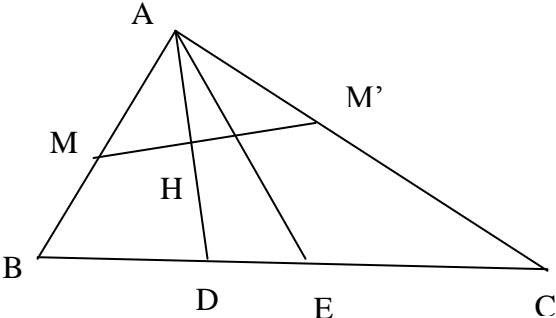
Câu VII.b (1,0 điểm). Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức $(3x^2 - \frac{2}{x})^n$ với n là số nguyên

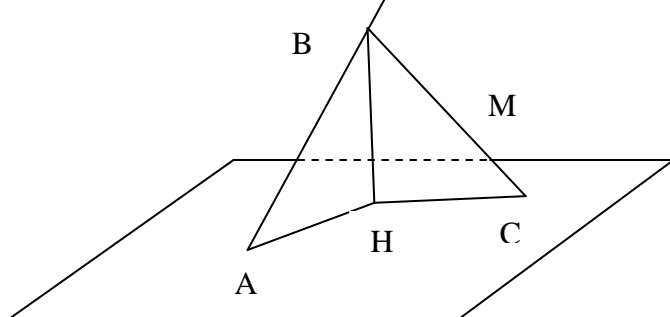
dương thỏa mãn: $\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{20}{21}$.
..... Hết.....

Câu	Nội dung	Điểm											
I.1	Khảo sát sự biến thiên và vẽ đồ thị (C) của hàm số khi $m = 3$	1,0											
	<p>Khi $m = 3$ ta có $y = x^3 - 3x + 2$ TXĐ: $D = \mathbb{R}$, $y' = 3x^2 - 3 = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = 1 \end{cases}$</p>	0,25											
	<table><tr><td>x</td><td>$-\infty$</td><td>-1</td><td>1</td><td>$+\infty$</td></tr><tr><td>y'</td><td>+</td><td>0</td><td>-</td><td>0</td><td>+</td></tr></table> <p>y $\nearrow 4 \searrow 0 \nearrow +\infty$ $-\infty$</p> <p>Hàm số đồng biến trên các khoảng $(-\infty; -1)$, $(1; +\infty)$ và nghịch biến trên khoảng $(-1; 1)$ Hàm số đạt cực đại tại $x = -1$, GTCD $y = 4$; đạt cực tiểu tại $x = 1$, GTCT $y = 0$</p>	x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$	y'	+	0	-	0	+	0,5
x	$-\infty$	-1	1	$+\infty$									
y'	+	0	-	0	+								
	<p>Đồ thị</p> 	0,25											
I.2	Tìm m để tiếp tuyến của (C_m) tại M có hoành độ $x = -1$	1.0											
	<p>$y'(-1) = 3 - m$ Phương trình tiếp tuyến Δ tại $M(-1; 2m - 2)$ là $y = (3 - m)(x + 1) + 2m - 2 = (3 - m)x + m + 1 \Leftrightarrow (3 - m)x - y + m + 1 = 0$ Để Δ cắt (C) thì $d(I, \Delta) < 2$. Nhận thấy đây cung AB nhỏ nhất khi $d(I, \Delta)$ lớn nhất</p> $d(I, \Delta) = \frac{ 4 - m }{\sqrt{(3 - m)^2 + 1}}$	0,5											

	<p>Ta có</p> $d(I, \Delta) = \frac{ 4-m }{\sqrt{(3-m)^2+1}} = \frac{ (3-m)+1 }{\sqrt{(3-m)^2+1}} \leq \frac{\sqrt{2} \cdot \sqrt{(3-m)^2+1}}{\sqrt{(3-m)^2+1}}$ $\Rightarrow d(I, \Delta) \leq \sqrt{2} < R$ <p>Ta có tiếp tuyến luôn cắt đường tròn (C) hai điểm phân biệt.</p> $AB \min \Leftrightarrow d(I, \Delta) = \sqrt{2} \Leftrightarrow m = 2$ <p>Vậy $m = 2$</p>	0,5
II.1	<p>1. Giải phương trình: $2(1+\cos x)(1+\cot^2 x) = \frac{\sin x - 1}{\cos x + \sin x}$ (1)</p>	1.0
	<p>ĐK: $\begin{cases} \sin x \neq 0 \\ \sin x + \cos x \neq 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x \neq k\pi \\ x \neq -\frac{\pi}{4} + k\pi \end{cases}$</p> $(1) \Leftrightarrow 2(1+\cos x) \frac{1}{\sin^2 x} = \frac{\sin x - 1}{\cos x + \sin x}$	0.25
	$\Leftrightarrow 2(1+\cos x)(\sin x + \cos x) = (\sin x - 1)\sin^2 x$ $\Leftrightarrow 2(1+\cos x)(\sin x + \cos x) = (\sin x - 1)(1 - \cos^2 x)$ $\Leftrightarrow (1+\cos x)(1+\cos x + \sin x + \cos x \sin x) = 0$ $\Leftrightarrow (1+\cos x)^2(1+\sin x) = 0$	0,5
	$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos x = -1 \\ \sin x = -1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \pi + k2\pi \\ x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi \end{cases}$ <p>Kết hợp điều kiện ta có pt có nghiệm $x = -\frac{\pi}{2} + k2\pi (k \in \mathbb{Z})$</p>	0,25
II.2	<p>2. Giải hệ phương trình: $\begin{cases} x^3 + y^3 = 3x^2 - 6x - 3y + 4 & (1) \\ x^2 + y^2 - 6x + y - 10 = \sqrt{5+y} - \sqrt{4x+y} & (2) \end{cases}$</p>	1.0
	<p>ĐK: $\begin{cases} y \geq -5 \\ 4x + y \geq 0 \end{cases}$</p> $(1) \Leftrightarrow y^3 + 3y = (1-x)^3 + 3(1-x) \quad (3)$ <p>Xét $f(t) = t^3 + 3t \Rightarrow f'(t) = 3t^2 + 3 > 0$. Ta có hàm số f đồng biến trên \mathbb{R} nên từ (3) ta có $y = 1 - x$</p>	0,5
	$(2) \Rightarrow 2x^2 - 9x - 8 = \sqrt{6-x} - \sqrt{3x+1} \Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 8 + \sqrt{3x+1} - \sqrt{6-x} = 0$ $\Leftrightarrow 2x^2 - 9x - 5 + (\sqrt{3x+1} - 4) + (1 - \sqrt{6-x}) = 0$ $\Leftrightarrow (x-5)(2x+1) + \frac{3(x-5)}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{x-5}{1+\sqrt{6-x}} = 0$ $\Leftrightarrow \begin{cases} x = 5 \\ 2x+1 + \frac{3}{\sqrt{3x+1}+4} + \frac{1}{1+\sqrt{6-x}} = 0 \end{cases} \quad (4)$ <p>Từ đk $-\frac{1}{3} \leq x \leq 6$ ta có phương trình (4) vô nghiệm</p> <p>Vậy nghiệm của hệ là (5; -4)</p>	0,5

III	Tính tích phân $I = \int_1^e \frac{(3x^3 - 1)\ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx$.	1,0
	$I = \int_1^e \frac{(3x^3 - 1)\ln x + 3x^2 - 1}{1 + x \ln x} dx = \int_1^e \frac{3x^2(x \ln x + 1) - \ln x - 1}{1 + x \ln x} dx = \int_1^e 3x^2 dx - \int_1^e \frac{\ln x + 1}{1 + x \ln x} dx$	0,25
	Tính $I_1 = \int_1^e 3x^2 dx = x^3 \Big _1^e = e^3 - 1$	0,25
	<p>Tính $I_2 = \int_1^e \frac{1 + \ln x}{1 + x \ln x} dx$</p> <p>Đặt $t = 1 + x \ln x \Rightarrow dt = (\ln x + 1)dx$. Đổi cận $x = 1 \Rightarrow t = 1; x = e \Rightarrow t = 1 + e$</p> <p>$I_2 = \int_1^{1+e} \frac{dt}{t} = \ln t \Big _1^{1+e} = \ln(1 + e)$</p> <p>Vậy $I = e^3 - \ln(1 + e) - 1$</p>	0,5
IV	Tính thể tích khối lăng trụ và khoảng cách	1,0
	 <p>. Do $BC \perp CA; BC \perp CC' \Rightarrow BC \perp (ACC'A')$</p> <p>Góc giữa $A'B$ và mặt phẳng $(ACC'A')$ là góc giữa $A'B$ và $A'C$. suy ra $\widehat{BA'C} = 30^\circ$</p>	0,25
	<p>Tam giác $A'BC$ vuông tại C. $BC = a, A'B = 2a, AB = a\sqrt{2} \Rightarrow AA' = a\sqrt{2}$</p> <p>$V_{ABC.A'B'C'} = AA'.S_{ABC} = a\sqrt{2} \cdot \frac{a^2}{2} = \frac{\sqrt{2}}{2} a^3$</p>	0,25
	<p>Do M là trung điểm của $A'B'$ và $B'C'$ song song với mặt phẳng $(A'BC)$ nên</p> <p>$d(M, (A'BC)) = \frac{1}{2} d(B', (A'BC)) = \frac{1}{2} d(C', (A'BC)) = \frac{1}{2} \frac{3V_{C'.A'BC}}{S_{A'BC}}$</p>	0,25
	<p>Ta có $V_{C'.A'BC} = \frac{1}{3} BC.S_{A'C'C} = \frac{\sqrt{2}}{6} a^3, S_{A'BC} = \frac{1}{2} a\sqrt{3}.a = \frac{\sqrt{3}}{2} a^2 \Rightarrow d(M, (A'BC)) = \frac{a\sqrt{6}}{6}$</p>	0,25
V	Tìm giá trị nhỏ nhất của biểu thức $P = (x + 2)(y + 2)(z + 2)$.	1,0
	<p>$x^2 + y^2 + z^2 = 3 \Rightarrow -\sqrt{3} \leq x, y, z \leq \sqrt{3} \Rightarrow x + 2 > 0; y + 2 > 0; z + 2 > 0$</p> <p>Nên P đạt GTNN khi x, y, z đều âm.</p>	0,25

	Xét x, y, z âm, $x^2 + y^2 + z^2 = 3, z \leq y \leq x \leq 0 \Rightarrow -1 \leq x \leq 0$	
	$P = (x+2)(y+2)(z+2) = \frac{1}{2}(x+2)[(y+z+2)^2 + x^2 + 1] \geq \frac{1}{2}(x+2)(x^2 + 1)$	0,25
	Xét $f(x) = \frac{1}{2}(x+2)(x^2 + 1)$ với $x \in [-1; 0]$ $f'(x) = \frac{3}{2}x^2 + 2x + \frac{1}{2} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} x = -1 \\ x = -\frac{1}{3} \end{cases}$ Lập BBT ta có với $x \in [-1; 0]$ thì $\min f(x) = \frac{25}{27} \Leftrightarrow x = -\frac{1}{3}$	0,25
	$\min P = \frac{25}{27} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y + z + 2 = 0 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = -\frac{1}{3} \\ y = -\frac{1}{3} \\ z = -\frac{5}{3} \end{cases}$	0,25
Vla.1		1,0
	 <p>Toạ độ điểm A là nghiệm hệ $\begin{cases} 2x + y - 3 = 0 \\ x + y - 2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 1 \\ y = 1 \end{cases} \Rightarrow A(1; 1)$ $\overrightarrow{AM} = (1; 0) \Rightarrow \overrightarrow{n_{AB}} = (0; 1)$. Phương trình đường thẳng AB là $y - 1 = 0$</p>	0,25
	Gọi M' là điểm đối xứng với M qua phân giác AD, ta có M' thuộc AC. H là giao điểm của AD và MM' Phương trình MM' : $x - y - 1 = 0$. Toạ độ điểm H là nghiệm của hệ $\begin{cases} x + y - 2 = 0 \\ x - y - 1 = 0 \end{cases} \Rightarrow H\left(\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right)$ H là trung điểm của MM' , suy ra $M'(1; 0)$. AC đi qua $A(1; 1), M'(1; 0)$ có phương trình là $x - 1 = 0$	0,25
	Gọi $B(b; 1); C(1; c)$ (đk $b > 0$). Toạ độ trung điểm $E\left(\frac{b+1}{2}; \frac{c+1}{2}\right)$. $E \in d_2 \Rightarrow b + 1 + \frac{c+1}{2} - 3 = 0 \Leftrightarrow 2b + c = 0$ (1)	0,25
	$\overrightarrow{NB} = (b-2; -4), \overrightarrow{NC} = (-1; c-5)$ N thuộc BC nên $\overrightarrow{NB}, \overrightarrow{NC}$ cùng phương	

	$\Rightarrow \frac{b-2}{-1} = \frac{-4}{c-5} \Leftrightarrow (b-2)(c-5) = 4 \quad (2)$ <p>Từ (1),(2) kết hợp đk $b > 0$ ta có $b = \frac{3}{2}; c = -3$</p> <p>Vậy $B(\frac{3}{2}; 1), C(1; -3)$</p>	0,25
Vla.2	Viết phương trình đường thẳng Δ chứa M , cắt d và (P) tương ứng ở B và C sao cho tam giác ABC cân tại B	1,0
	 <p>Gọi H là hình chiếu của B trên (P). do tam giác ABC cân tại B ta suy ra $\Delta BHA = \Delta BHC$ Nên góc giữa AB và BH bằng góc giữa BH và BM</p> <p>B thuộc d nên gọi $B(t+2; 1-t; t)$ $\vec{u}_{AB} = \vec{u}_d = (1; -1; 1); \vec{u}_{BH} = \vec{n}_P = (1; 1; -1); \vec{u}_{MB} = (t+1; -t; t-1)$ $\cos(\vec{u}_{AB}, \vec{u}_{BH}) = \cos(\vec{u}_{BH}, \vec{u}_{MB}) \Rightarrow \frac{1}{3} = \frac{ 2-t }{\sqrt{3}\sqrt{3t^2+2}} \Leftrightarrow t = \frac{5}{6}$ $\Rightarrow \vec{MB} = (\frac{11}{6}; -\frac{5}{6}; -\frac{1}{6}) \Rightarrow \vec{u}_\Delta = (11; -5; -1)$ Phương trình đường thẳng Δ là $\frac{x-1}{11} = \frac{y-1}{-5} = \frac{z-1}{-1}$</p>	0,5
VII.a	Tìm số phức z có môđun nhỏ nhất sao cho $ z = \bar{z} - 4 + 3i $.	1,0
	<p>Đặt $z = a + bi$.</p> $ z = \bar{z} - 4 + 3i \Rightarrow a^2 + b^2 = (a-4)^2 + (3-b)^2 \Leftrightarrow 8a + 6b = 25 \quad (1)$ Gọi $M(a; b)$ là điểm biểu diễn của số phức z trên mặt phẳng phức. Từ (1) ta có M thuộc đường thẳng $\Delta: 8x + 6y - 25 = 0$ Do $ z = OM$ nên môđun của z nhỏ nhất khi OM nhỏ nhất. M thuộc Δ nên OM nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của O trên Δ	0,25
	<p>Đường thẳng d đi qua O và vuông góc với Δ là $3x - 4y = 0$</p> <p>Toạ độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} 8x + 6y - 25 = 0 \\ 3x - 4y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 2 \\ y = \frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow M(2; \frac{3}{2})$</p> <p>Vậy $z = 2 + \frac{3}{2}i$</p>	0,25
VIIb.1	Trong mặt phẳng Oxy , lập phương trình chính tắc của Elip (E) biết điểm $M(1; \sqrt{3})$ nhìn hai tiêu điểm của (E) dưới một góc vuông và ...	
	<p>Gọi phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > b > 0)$</p> <p>Do M nhìn hai tiêu điểm dưới một góc vuông nên:</p>	

	$OM = \frac{1}{2} F_1 F_2 \Rightarrow c = OM = 2 \Rightarrow a^2 - b^2 = 4 \quad (1)$	0,5
	Hình chữ nhật cơ sở nội tiếp đường tròn (C): $x^2 + y^2 = 20 \Rightarrow a^2 + b^2 = 20 \quad (2)$ Từ (1) và (2) ta suy ra $a^2 = 12, b^2 = 8$ Vậy phương trình chính tắc của (E) là: $\frac{x^2}{12} + \frac{y^2}{8} = 1$	0,5
VIb.2	Trong mặt phẳng $Oxyz$ cho $A(0; 4; 1), B(3; -2; 4), C(2; 0; -1)$ và mặt phẳng $(P): x + y + z - 6 = 0$. Tìm tọa độ điểm M trên (P) sao cho $ \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} $ đạt giá trị nhỏ nhất	1,0
	Gọi I là điểm thỏa mãn $\overrightarrow{IA} + 2\overrightarrow{IB} + 3\overrightarrow{IC} = \vec{0}$. Suy ra $I(2; 0; 1)$	0,25
	$ \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} = 6 \overrightarrow{MI} = 6MI$ $ \overrightarrow{MA} + 2\overrightarrow{MB} + 3\overrightarrow{MC} $ đạt giá trị nhỏ nhất khi M là hình chiếu vuông góc của I trên (P)	0,25
	Phương trình đường thẳng d đi qua I và vuông góc (P) là $\frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1}$ Tọa độ điểm M là nghiệm của hệ $\begin{cases} \frac{x-2}{1} = \frac{y}{1} = \frac{z-1}{1} \\ x + y + z - 6 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = 3 \\ y = 1 \\ z = 2 \end{cases} \Rightarrow M(3; 1; 2)$ Vậy $M(3; 1; 2)$	0,5
VIIb	Tìm hệ số của x^{10} trong khai triển của biểu thức $(3x^2 - \frac{2}{x})^n$ với n là số nguyên dương thỏa mãn: $\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{20}{21}$	1,0
	$\frac{1}{2}C_n^1 - \frac{1}{3}C_n^2 + \frac{1}{4}C_n^3 - \dots + (-1)^{n+1} \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{20}{21}$ $\Leftrightarrow C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n = \frac{1}{21} \quad (1)$ Xét khai triển $(1-x)^n = C_n^0 - C_n^1x + C_n^2x^2 - C_n^3x^3 + \dots + (-1)^n C_n^n x^n$ $\Rightarrow \int_0^1 (1-x)^n dx = \int_0^1 C_n^0 dx - \int_0^1 C_n^1 x dx + \int_0^1 C_n^2 x^2 dx - \int_0^1 C_n^3 x^3 dx + \dots + \int_0^1 (-1)^n C_n^n x^n dx$ $\Leftrightarrow \frac{-(1-x)^{n+1}}{n+1} \Big _0^1 = C_n^0 x \Big _0^1 - C_n^1 \frac{x^2}{2} \Big _0^1 + C_n^2 \frac{x^3}{3} \Big _0^1 - C_n^3 \frac{x^4}{4} \Big _0^1 + \dots + (-1)^n C_n^n \frac{x^{n+1}}{n+1} \Big _0^1$ $\Leftrightarrow \frac{1}{n+1} = C_n^0 - \frac{1}{2}C_n^1 + \frac{1}{3}C_n^2 - \frac{1}{4}C_n^3 + \dots + (-1)^n \frac{1}{n+1}C_n^n \quad (2)$ Từ (1) và (2) suy ra $n = 20$.	0,25
	$(3x^2 - \frac{2}{x})^{20} = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k (3x^2)^{20-k} (-\frac{2}{x})^k = \sum_{k=0}^{20} C_{20}^k 3^{20-k} (-2)^k x^{40-3k}$ $40 - 3k = 10 \Leftrightarrow k = 10$ Hệ số của x^{10} là $C_{20}^{10} 6^{10}$	0,25