

## فصل سوم

### معرفی و کاربرد فاکتورها

هدف از این فصل معرفی، شناخت و کاربرد فاکتورهای مهم و اساسی در اقتصاد مهندسی است. این فاکتورها در حقیقت روابط بین پارامترهای معرفی شده در فصل دوم را نشان می‌دهند و کلیه محاسبات اقتصادی بر مبنای این فاکتورها بنا شده‌اند.

### روابط بین P و F

فرض کنید می‌خواهیم ارزش آینده یا اصل و فرع (F) برای مبلغ (P) در مدت n دوره (سال) با نرخ بهره (i) محاسبه نماییم. فرض می‌شود P در  $t = 0$  یا ابتدای دوره سرمایه‌گذاری شود، اگر  $F_1$  ارزش آینده مبلغ P پس از یکسال باشد، رابطه زیر برقرار است:

$$F_1 = P + Pi$$

$$F_1 = P (1 + i)$$

اگر  $F_2$  ارزش آینده مبلغ P پس از دو سال باشد، روابط زیر نیز برقرار است:

$$F_2 = F_1 + F_1 i$$

$$= P (1 + i) + P (1 + i) i$$

$$= P (1 + i + i + i^2) \Rightarrow F_2 = P (1 + i)^2$$

به همین ترتیب مقدار  $F_3$  عبارت است از:

$$F_3 = F_2 + F_2 i$$

$$= [P(1+i) + P(1+i)i] + [P(1+i) + P(1+i)i]i$$

$$= P(1+i) + 2P(1+i)i + P(1+i)i^2$$

$$= P(1+i)(1+2i+i^2)$$

$$F_T = P(1+i)^T$$

و بطور کلی رابطه زیر بین  $P$  و  $F$  برقرار است:

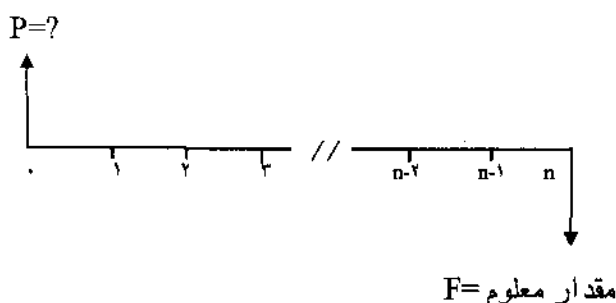
$$F = P(1+i)^n \quad (3-1)$$

فاکتور  $(1+i)^n$  بنام «فاکتور یکبار پرداخت»<sup>۱</sup> معروف است. از فرمول (۳-۱) می توان نتیجه گرفت:

$$P = F \left[ \frac{1}{(1+i)^n} \right] \quad (3-2)$$

رابطه فوق زمانی استفاده می شود که مقدار  $F$  معلوم و  $P$  مجهول باشد. فاکتور

بنام «فاکتور ارزش فعلی یکبار پرداخت»<sup>۲</sup> معروف است. فرآیند مالی زیر رابطه (۳-۲) را نشان می دهد.

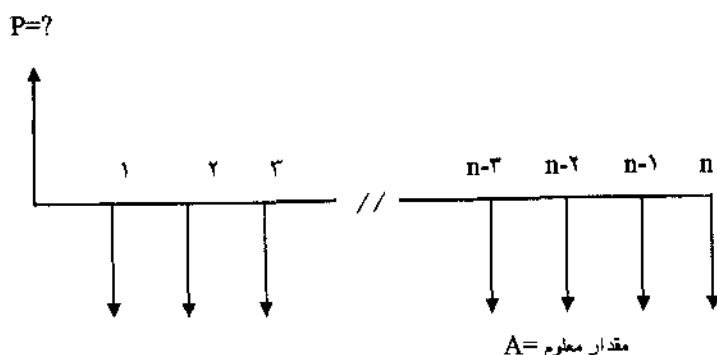


### روابط بین $P$ و $A$

فرآیند مالی زیر رابطه بین  $P$  و  $A$  را بهتر نمایان می سازد:

1 - Single - Payment Compound - Amount Factor

2 - Single - Payment Present Worth Factor



ارزش فعلی ( $P$ ) یکسری پرداخت‌های یکسان ( $A$ ) را می‌توان با فرض اینکه هر پرداخت ( $A$ ) نقش ( $F$ ) را ایفا می‌کند و با استفاده از فرمول (۳-۲) تعیین کرد:

$$P = A \left[ \frac{1}{(1+i)^1} \right] + A \left[ \frac{1}{(1+i)^2} \right] + A \left[ \frac{1}{(1+i)^3} \right] + \dots$$

$$+ A \left[ \frac{1}{(1+i)^{n-1}} \right] + A \left[ \frac{1}{(1+i)^n} \right]$$

از مقدار  $A$  فاکتور گرفته می‌شود و رابطه زیر حاصل می‌گردد:

$$P = A \left[ \frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \dots + \frac{1}{(1+i)^{n-1}} + \frac{1}{(1+i)^n} \right] \quad (3-3)$$

معادله (۳-۳) را در  $\frac{1}{(1+i)}$  ضرب می‌نمائیم:

$$\frac{P}{(1+i)} = A \left[ \frac{1}{(1+i)^2} + \frac{1}{(1+i)^3} + \frac{1}{(1+i)^4} + \dots + \frac{1}{(1+i)^n} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right] \quad (3-4)$$

تفاضل (۳-۴) از (۳-۳) رابطه زیر را بوجود می آورد:

$$\frac{P}{(1+i)} - P = A \left[ -\frac{1}{(1+i)^1} + \frac{1}{(1+i)^{n+1}} \right]$$

از P فاکتور گرفته، رابطه فوق را مرتب می کنیم:

$$P \left[ \left( \frac{1}{1+i} \right) - 1 \right] = A \left[ \frac{1}{(1+i)^{n+1}} - \frac{1}{1+i} \right]$$

$$P \left( \frac{-i}{1+i} \right) = A \frac{1}{1+i} \left[ \frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]$$

رابطه فوق بر  $\left[ \frac{-i}{(1+i)} \right]$  تقسیم می شود:

$$P = A \left( \frac{1}{1+i} \right) \frac{\left[ \frac{1}{(1+i)^n} - 1 \right]}{\frac{-i}{(1+i)}}$$

$$P = A \left( \frac{1}{-i} \right) \left[ \frac{1 - (1+i)^n}{(1+i)^n} \right]$$

$$P = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right] \quad (3-5)$$

فاکتور  $\left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \right]$  «فاکتور ارزش فعلی سری یکنواخت»<sup>۱</sup> نامیده می شود و مقدار

ارزش فعلی یک سری یکنواخت درآمد یا هزینه مساوی که در پایان هر دوره اتفاق می افتند را با نرخ بهره (  $i$  ) تعیین می کند.

رابطه ۳-۵ را می توان برای محاسبه مقدار پرداخت یکسان (  $A$  ) با داشتن ارزش فعلی (  $P$  ) بصورت زیر تغییر داد:

$$A = P \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (3-6)$$

فاکتور  $\left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right]$  «فاکتور باز یافت سرمایه»<sup>۱</sup> نامیده می شود و در حقیقت سرمایه (  $P$  ) را با توجه به نرخ بهره (  $i$  ) در مدت (  $n$  ) دوره به پرداخت های مساوی یکنواخت توزیع می کند.

### روابط بین $A$ و $F$

اگر به جای (  $P$  ) در رابطه (۳-۶) مقدار رابطه (۳-۲) را قرار دهیم رابطه بین (  $A$  ) و (  $F$  ) حاصل می شود:

$$A = F \left[ \frac{1}{(1+i)^n} \right] \left[ \frac{i(1+i)^n}{(1+i)^n - 1} \right] \quad (3-7)$$

$$A = F \left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$$

فاکتور  $\left[ \frac{i}{(1+i)^n - 1} \right]$  «فاکتور وجوه استهلاکی»<sup>۲</sup> نامیده می شود و مقدار ارزش

آینده یا اصل و فرع (F) را با توجه به نرخ بهره (i) در مدت (n) دوره به پرداختهای مساوی توزیع می‌کند. رابطه زیر بسادگی از رابطه (۳-۷) بدست می‌آید:

$$F = A \left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right] \quad (3-8)$$

فاکتور  $\left[ \frac{(1+i)^n - 1}{i} \right]$  «فاکتور پرداخت مساوی برای مقدار مرکب»<sup>۱</sup> نامیده شده و مقدار پرداخت مساوی و یکنواخت را با توجه به نرخ بهره (i) در مدت (n) دوره به ارزش آینده تبدیل می‌کند.

### جدول فاکتورها

برای جلوگیری از محاسبات مداوم و تکراری مقدار فاکتورهای یادشده، جدول فاکتورها در پایان کتاب (ضمیمه یک) ارائه شده است. این جداول کلیه فاکتورها را با نرخهای متنوع، از ۰/۲۵٪ تا ۵۰٪، و دوره‌های متفاوت از ۱ تا ۱۰۰، محاسبه و هر فاکتور را به صورت فرم استاندارد (X/Y, i%, n) نمایش داده است. Y پارامتر معلوم و X پارامتر مجهول است. مثلاً مقدار فاکتور (P/A, ۵٪, ۱۰) را می‌توان براحتی در صفحه مربوط به نرخ ۵٪ در دوره دهم یافت که مقدار آن، ۷/۷۲۱۷، را همچنین می‌توان از فرمول (۳-۵) به طریق زیر نیز بدست آورد.

$$\begin{aligned} (P/A, 5\%, 10) &= \frac{(1+i)^n - 1}{i(1+i)^n} \\ &= \frac{(1+0/05)^{10} - 1}{0/05(1+0/05)^{10}} = 7/7217 \end{aligned}$$

جداول پایان کتاب در میزان محاسبات صرفه‌جویی کرده، نقش موثری در تسریع

محاسبات دارد. جدول (۳-۱) فرمهای استاندارد پارامترهای مجهول و معلوم و همچنین فرمول کلی محاسبه پارامتر مجهول را نشان می‌دهد.

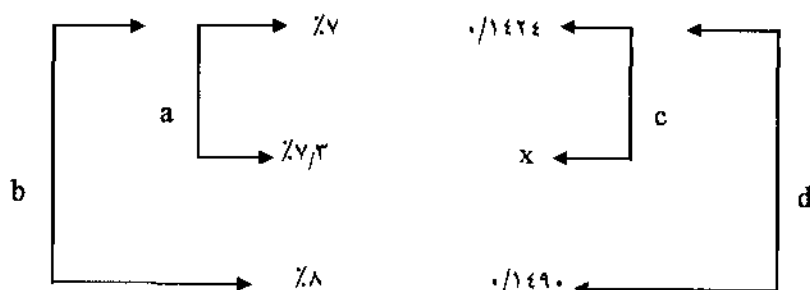
پارامتر مجهول	پارامتر معلوم	فرم استاندارد فاکتور	فرمول
P	F	$(P/F, i\%, n)$	$P = F(P/F, i\%, n)$
F	P	$(F/P, i\%, n)$	$F = P(F/P, i\%, n)$
P	A	$(P/A, i\%, n)$	$P = A(P/A, i\%, n)$
A	P	$(A/P, i\%, n)$	$A = P(A/P, i\%, n)$
A	F	$(A/F, i\%, n)$	$A = F(A/F, i\%, n)$
F	A	$(F/A, i\%, n)$	$F = A(F/A, i\%, n)$

جدول ۳-۱

### درون‌یابی خطی

گاهی برای یک مقدار مشخص  $i$ ، یا یک دوره مشخص  $n$ ، مقدار فاکتور در جدول موجود نیست. مثلاً فاکتور  $(A/P, 7\%, 10)$  که نرخ  $i = 7/3\%$  در جدول موجود نیست. برای نرخهای  $7\%$  و  $8\%$  در مدت ۱۰ سال فاکتور  $A/P$  را می‌توان از جدول بدست آورد. مقدار  $(A/P, 7/3\%, 10)$  را نمی‌توان از جدول یافت مگر با «درون‌یابی»<sup>۱</sup> خطی بین نرخهای بیشتر و کمتر از  $7/3\%$  که  $7\%$  و  $8\%$  می‌باشند. رابطه خطی می‌تواند صحیح باشد، اگر دو عدد کمتر یا بیشتر از پارامتر مجهول ( $i$  یا  $n$ ) نزدیک به آن پارامتر باشند. مراحل مختلف تعیین فاکتور  $(A/P, 7/3\%, 10)$  بدین ترتیب است که ابتدا مقادیر فاکتورهای  $(A/P, 7\%, 10)$  و  $(A/P, 8\%, 10)$  را از جدول بدست آورده و تناسب زیر را

تشکیل می دهیم:



مقادیر  $a$  و  $b$  عبارت از تفاضل بین اعداد تشکیل دهنده آن مقادیر است. رابطه زیر همواره برقرار است:

$$\frac{a}{c} = \frac{b}{d}$$

$$c = \frac{a}{b} d \quad (۳-۹)$$

$$c = \frac{۷/۳-۷}{۸-۷} (۰/۱۴۹۰ - ۰/۱۴۲۴)$$

$$c = \frac{۰/۳}{۱} (۰/۰۰۶۶)$$

$$c = ۰/۰۰۱۹۸$$

از آنجا که مقدار فاکتور  $A/P$  از  $۷\%$  به  $۸\%$  در حال افزایش است (از  $۰/۱۴۲۴$  به  $۰/۱۴۹۰$ ) مقدار  $C$  باید به مقدار فاکتور در  $۷\%$ ، یعنی  $۰/۱۴۲۴$  اضافه شود تا مقدار فاکتور مجهول  $X$  به دست آید:

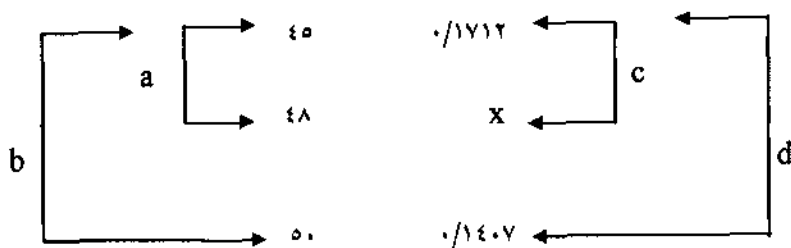
$$X = ۰/۱۴۲۴ + ۰/۰۰۱۹۸ = ۰/۱۴۴۳۸$$

بدیهی است که همیشه امکان محاسبه این گونه فاکتورها از طریق روابط ارائه شده بین پارامترها با قراردادن  $i$  و  $n$  میسر می باشد.

● مثال ۳-۱. مقدار  $(P/F, ۴\%, ۴۸)$  را از جدول بدست آورید:



حل: فاکتور فوق در  $n = 48$  در جدول موجود نیست ولی در  $n = 45$  و  $n = 50$  مقدار  $P/F$  مشخص است. تناسب زیر پس از یافتن مقادیر  $(P/F, \%, 45)$  و  $(P/F, \%, 50)$  از جدول فاکتورها تشکیل می‌شود:



با استفاده از رابطه (۳-۹):

$$C = \frac{a}{b} \cdot d$$

$$C = \frac{48 - 45}{50 - 45} (0/1712 - 0/1407)$$

$$C = 0/0183$$

از آنجا که فاکتور  $P/F$  از ۴۵ به ۵۰ در حال کاهش است (از ۰/۱۷۱۲ به ۰/۱۴۰۷) مقدار  $C$  باید از مقدار فاکتور در ۴۵، یعنی ۰/۱۷۱۲ کاسته شود.

$$X = 0/1712 - 0/0183 = 0/1529$$

● مثال ۳-۲- مقدار فاکتور  $(P/A, \%, 13, 42)$  را از طریق جدول محاسبه کنید.

حل: از آنجا که مقادیر  $i = 13\%$  و  $n = 42$  در جدول وجود ندارند، یک درون‌یابی دوطرفه باید انجام شود. اولین مرحله محاسبه فاکتور مذکور، تشکیل تناسب زیر و محاسبه  $P/A$  در  $i = 13\%$  برای  $n = 40$  و  $n = 45$  است:

$i$	$n = 40$	$n = 45$
$12\%$	$8/2438$	$8/2825$
$13\%$	$X40$	$X45$
$15\%$	$6/6418$	$6/6543$

محاسبات مربوط به  $X_{40}$  و  $X_{45}$  در ذیل آمده است:

$$C_{40} = \frac{1}{3} (1/6020) = 0/5340$$

$$X_{40} = 8/2438 - 0/5340 = 7/7098$$

$$C_{45} = \frac{1}{3} (1/6282) = 0/5427$$

$$X_{45} = 8/2825 - 0/5427 = 7/7398$$

حال مقدار فاکتور  $P/A$  در  $n = 42$  طبق تناسب زیر حاصل خواهد شد:

$P/A$	$n$
$7/7098$	40
$X_{42}$	42
$7/7398$	45

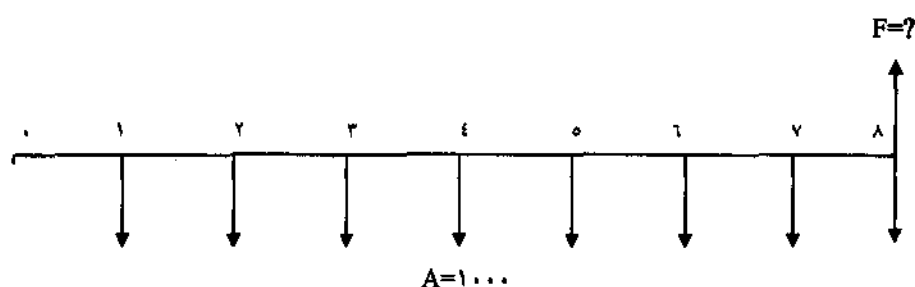
$$X_{42} = 7/7098 + \frac{2}{5} (0/030) = 7/7218$$

و بدین ترتیب بعد از یک درون‌یابی دو مرحله‌ای یا دو طرفه، به مقدار  $(P/A, \%, 13, 42)$ ، برابر با  $7/7218$  می‌رسیم. بعد از تشریح جدول فاکتورها و موارد استفاده درون‌یابی، به بررسی موارد استفاده فاکتورها می‌پردازیم.

### محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی

اولین قدم برای محاسبات اقتصادی یک پروژه، رسم فرآیند مالی پروژه است. فرآیند مالی، خود راهنمای انتخاب فرمول و فاکتور مناسب خواهد بود. اکنون به بررسی چند مثال برای محاسبات ارزش فعلی، ارزش آینده و پرداخت مساوی (هزینه یا درآمد) می‌پردازیم:

- مثال ۳-۳. چه مقدار پول در حساب بانکی شما خواهد بود، اگر شما از سال آینده، برای ۸ سال، هر سال ۱۰,۰۰۰ واحد پولی در حساب بانکی خود پس‌انداز نمایید. نرخ بهره برای پس‌انداز در بانک ۴٪ فرض می‌شود. شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:

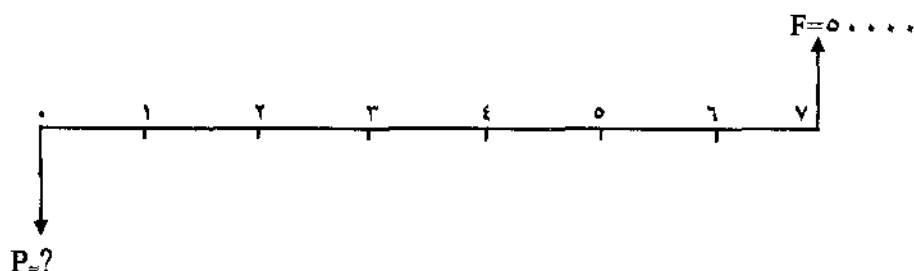


حل: از آنجا که اولین پرداخت در پایان سال اول و آخرین پرداخت در پایان سال هشتم قرار دارد، از فاکتور  $F/A$  بصورت زیر استفاده می شود:

$$F = 1,000 (F/A, \%, 4, 8) = 1,000 (9/214) = 9,214$$

● مثال ۳-۴- اگر در یک طرح، بعد از ۷ سال به شما ۵۰,۰۰۰ واحد پولی به عنوان اصل و فرع بپردازند، اکنون چه مقدار پول در این طرح سرمایه گذاری می کنید؟ حداقل نرخ جذب کننده ۵٪ در سال فرض می شود.

حل: شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:



$$P = 50,000 = (P/F, \%, 5, 7)$$

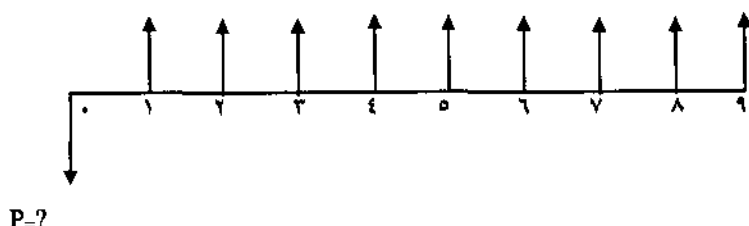
$$P = 50,000 (0/7107) = 35,535$$

● مثال ۳-۵- اگر بانکی متعهد شود از سال آینده در چنین روزی تا مدت ۹ سال، همه ساله مبلغ ۶,۰۰۰ واحد پولی به شما پرداخت نماید و نرخ بانک ۷٪ در سال فرض

شود، چه مقدار پول در این طرح سرمایه گذاری می کنید؟

حل: شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:

$$A = 6,000$$

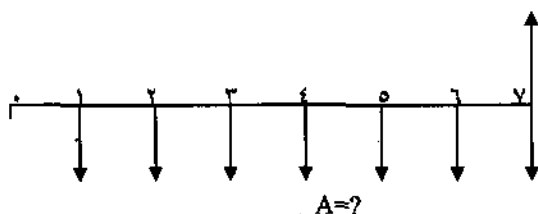


$$P = 6,000 (P/A, \%, 7, 9) = 6,000 (6/5152) = 39,91/2$$

● مثال ۳-۶- چه مقدار پول باید هر سال (شروع یکسال بعد) در بانک پس انداز کنید تا پس از ۷ سال با نرخ بهره بانک ۵٪، مبلغ ۱۰۰,۰۰۰ واحد پولی در حساب شما باشد:

حل: شکل فرآیند مالی به صورت زیر است:

$$F = 100,000$$

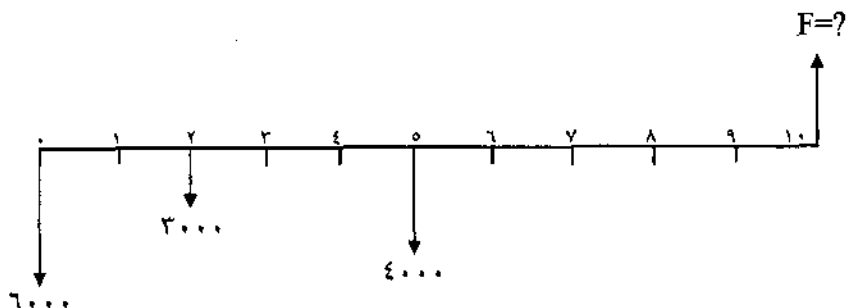


$$A = 100,000 (A/F, \%, 5, 7) = 100,000 (0/12282) = 12,282$$

● مثال ۳-۷- اگر شخصی امروز ۶,۰۰۰ واحد پولی، دو سال دیگر در چنین روزی ۳,۰۰۰ واحد پولی و پنج سال دیگر در چنین روزی ۴,۰۰۰ واحد پولی در بانک، با نرخ

بهره ۵٪ پس انداز کند، پس از ۱۰ سال از امروز، چه مقدار پول در حساب بانکی او خواهد بود؟

حل: شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:



ارزش فعلی هر یک از اقلام پس انداز شده در حال، دو سال و پنج سال بعد بصورت  $P$ ، به  $F$  تبدیل خواهد شد:

$$F = 6,000 (F/P, \%, 5, 10) + 3,000 (F/P, \%, 5, 8) + 4,000 (F/P, \%, 5, 5)$$

$$F = 6,000 (1/6289) + 3,000 (1/4775) + 4,000 (1/2763)$$

$$F = 19311/1$$

مسئله فوق را می توانستیم از طریق دیگری حل نماییم. ابتدا ارزش فعلی اقلام پس انداز شده را در سال مبدا (سال صفر) محاسبه می کنیم و سپس کل ارزش فعلی را برای تعیین ارزش آینده به سال دهم انتقال می دهیم:

$$P = 6,000 + 3,000 (P/F, \%, 5, 2) + 4,000 (P/F, \%, 5, 5)$$

$$P = 6,000 + 3,000 (0/9070) + 4,000 (0/7835)$$

$$P = 11,855$$

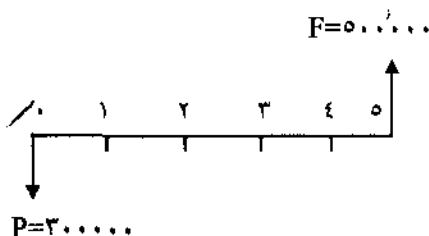
$$F = 11,855 (F/P, \%, 5, 10) = 11,855 (1/6289)$$

$$F = 19,310/6$$

تفاوت جزئی در جوابها، بخاطر استفاده از فاکتورهای متفاوت و تقریب جزئی در فاکتورهاست. منظور از تقریب در فاکتورها، رقم‌های اعشاری است که اغلب تا سه رقم اعشار وجود دارد.

● مثال ۳-۸. شرکت «گل بار» قصد دارد در یک پروژه تولیدی سرمایه‌گذاری نماید. نحوه سرمایه‌گذاری بدین ترتیب است که شرکت در حال حاضر ۳۰۰,۰۰۰ واحد پولی می‌پردازد و بعد از ۵ سال مبلغ ۵۰۰,۰۰۰ واحد پولی دریافت می‌کند. اولاً نرخ بازگشت سرمایه برای شرکت چقدر خواهد بود؟ ثانیاً: اگر بانکی حاضر شود نرخ بهره ۷٪ را به عنوان نرخ بازگشت سرمایه به شرکت بپردازد، بشرطی که شرکت به همان نحو سرمایه‌گذاری را در بانک انجام دهد، آیا بهتر نیست شرکت در بانک سرمایه‌گذاری نماید؟

حل: شکل فرآیند مالی به صورت زیر است:



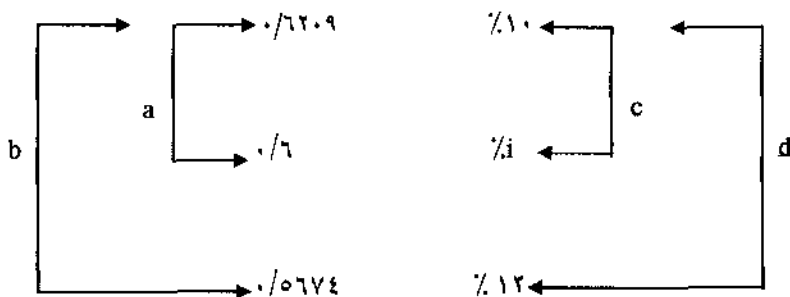
نرخ بازگشت سرمایه به صورت زیر محاسبه می‌شود:

$$P = F (P/F, i\%, n)$$

$$300,000 = 500,000 (P/F, i\%, 5)$$

$$(P/F, i\%, 5) = \frac{300,000}{500,000} = 0/6$$

با استفاده از جدول فاکتورها باید مقدار (i) را تعیین کرد. بدین ترتیب که باید در ستون P/F در سال پنجم، در جستجوی نرخ بود که P/F آن ۰/۶ است. عدد ۰/۶ را نمی‌توان در ستون P/F مشاهده کرد ولی اعداد بالا و پائین ۰/۶ در نرخهای ۱۰٪، ۱۲٪ وجود دارند. سپس تناسب زیر باید تشکیل گردد:



$$C = \left( \frac{0/6209 - 0/6}{0/6209 - 0/5674} \right) (12 - 10) = 0/7813$$

$$i = 10 + 0/78 = 10/78\%$$

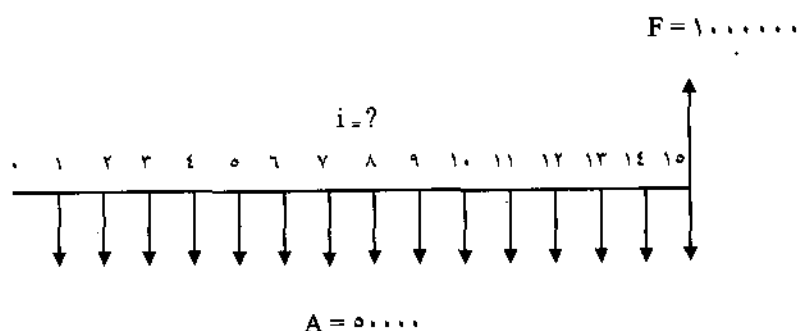
که معمولاً عبارت بالا به صورت زیر نمایش داده می‌شود:

$$ROR = 10/78\%$$

برای پاسخ به قسمت دوم سوال، از آنجا که نرخ بازگشت سرمایه ۱۰/۷۸٪ از ۷٪ نرخ بانک بیشتر است، برای شرکت، سرمایه‌گذاری در واحد تولیدی اقتصادی‌تر است تا پس‌انداز نمودن در بانک.

● مثال ۹-۳. حداقل نرخ جذب‌کننده شرکت «گلنار» ۵٪ در سال است. پیشنهادی بدین‌قرار به شرکت شده است: از یکسال بعد، همه‌ساله تا ۱۵ سال مبلغ ۵۰,۰۰۰ واحد پولی در طرحی سرمایه‌گذاری شود و در پایان ۱۵ سال مبلغ ۱,۰۰۰,۰۰۰ واحد پولی دریافت شود. تصمیم شرکت چیست؟

حل: ابتدا نرخ برگشت سرمایه با توجه به شکل فرآیندهای طرح محاسبه می‌شود:



$$A = F (A/F, i\%, n)$$

$$50,000 = 1,000,000 (A/F, i\%, 15)$$

$$(A/F, i\%, 15) = 0.05$$

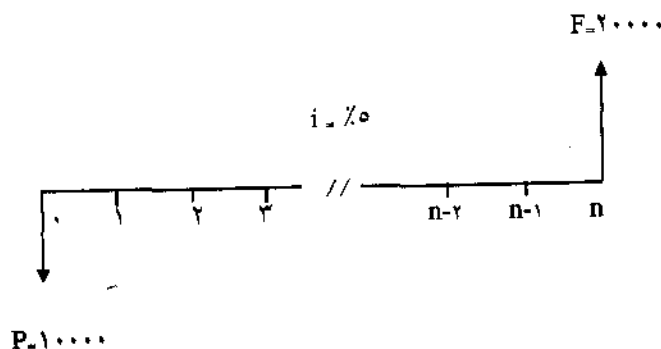
با استفاده از جدول و روش درونیابی، نرخ بازگشت سرمایه عبارت است از:

$$ROR = 3.98\%$$

از آنجا که حداقل نرخ جذب کننده شرکت ۵٪ در سال است، بنابراین این پیشنهاد اقتصادی نمی باشد.

● مثال ۱۰-۳ چه مدت طول می کشد تا ۱۰,۰۰۰ واحد پولی به ۲۰,۰۰۰ واحد پولی تبدیل شود، اگر نرخ بانک ۵٪ در سال فرض شود.

حل: شکل فرآیند مالی بصورت زیر است:





$$P = F (P/F, i\%, n)$$

$$۱۰,۰۰۰ = ۲۰,۰۰۰ (P/F, \%, ۵, n)$$

$$(P/F, \%, ۵, n) = ۰/۵$$

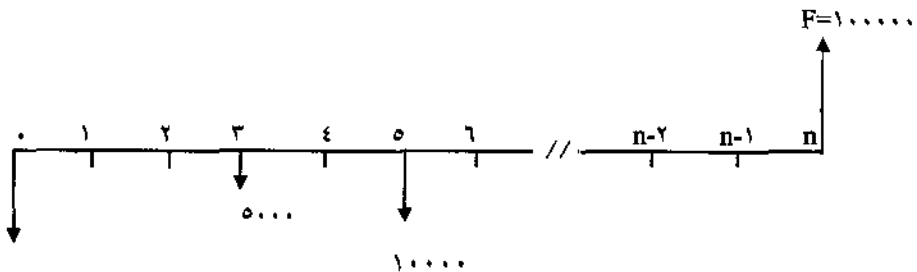
در جدول فاکتورها، در صفحه نرخ ۵٪ و در ستون P/F مشاهده می شود که ۰/۵، بین سالهای ۱۴ و ۱۵ واقع است.

با استفاده از روش درونیابی:

$$n = ۱۴/۲$$

● مثال ۱۱-۳- یک سرمایه گذار، مبلغ ۲۰,۰۰۰ واحد پولی اکنون، ۵,۰۰۰ واحد پولی سه سال دیگر از حال، ۱۰,۰۰۰ واحد پولی پنج سال دیگر از حال در یک طرح سرمایه گذاری می کند. از حالا چند سال طول می کشد تا اصل و فرع سرمایه گذاری های انجام شده توسط او به ۱۰۰,۰۰۰ واحد پولی برسد؟ نرخ بازگشت سرمایه در طرح ۶٪ پیش بینی شده است.

حل: شکل فرآیند مالی این طرح بصورت زیر است:



۲۰۰۰۰

یکی از راههای ساده حل این مسئله بدین ترتیب است که ارزش فعلی ۵,۰۰۰ در سال سوم و ۱۰,۰۰۰ در سال پنجم را در سال مبدا (سال صفر) تعیین و با ۲۰,۰۰۰ در سال صفر جمع نمود تا ارزش فعلی کل بدست آید. این ارزش فعلی در مدت n سال باید برابر ۱۰۰,۰۰۰ شود:

$$P = 20,000 + 5,000 (P/F, \%, 6, 3) + 10,000 (P/F, \%, 6, 5)$$

$$P = 20,000 + 5,000 (0/8396) + 10,000 (0/7473)$$

$$P = 31,671$$

$$P = F (P/F, i\%, n)$$

$$31,671 = 100,000 (P/F, \%, 6, n)$$

$$(P/F, \%, 6, n) = 0/31,671$$

عدد فوق در صفحه نرخ  $\%, 6$  در ستون  $\frac{P}{F}$  بین سالهای ۱۹ و ۲۰ واقع است که باروش درونیابی داریم:

$$n = 19/73$$

راه دیگر حل این مسئله بدین ترتیب است که ارزش آینده هر یک از اقسام سرمایه‌گذاری در حال، سال دوم و سال پنجم به طریق زیر پیدا شود. مقادیر  $P_1$  و  $P_2$  و  $P_3$  مقادیر سه بار سرمایه‌گذاری هستند:

$$F = P_1 (F/P, i\%, n) + P_2 (F/P, i\%, n-3) + P_3 (F/P, i\%, n-5)$$

$$F = 20,000 (F/P, \%, 6, n) + 5,000 (F/P, \%, 6, n-3) + 10,000 (F/P, \%, 6, n-5)$$

از آنجا که عبارت طرف راست، باید برابر با مقدار ۱۰۰,۰۰۰ شود، باید  $n$  های مختلف در عبارت فوق قرار گیرند تا شرایط برای درونیابی فراهم گردد:

$$n = 19 \quad F = 95,830$$

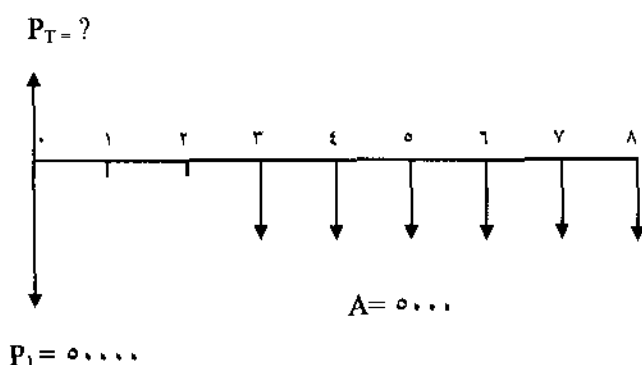
$$n = 20 \quad F = 101,575$$

با استفاده از روش درونیابی، مشاهده می‌گردد که قبل:  $n = 19/73$  خواهد شد. در مثالهای ۳-۱۱ تا ۳-۱۲ کلیه پرداختها از سال مبدا شروع و به سال آخر ختم می‌شد و یا چند پرداخت متفصل وجود داشت. در مثالهای بعد توجه خاص به مسائلی که مبدا دریافتها یا پرداختها از سالی غیر از سال صفر است معطوف می‌گردد.

● مثال ۱۲-۳. شرکت «گلکار» یک ماشین کشاورزی را خریداری می‌کند. ۵۰,۰۰۰

واحد پولی را نقد می‌پردازد و قرار است از سه سال بعد، به مدت شش سال همه ساله ۵,۰۰۰ واحد پولی بپردازد. اگر حداقل نرخ جذب کننده شرکت ۸٪ در سال فرض شود، ارزش فعلی ماشین کشاورزی چقدر است؟

حل: شکل فرآیند مالی عبارت است از:



در شکل فوق،  $P_T$  ارزش فعلی کل<sup>۱</sup> را نشان می‌دهد که عبارت است از مجموع:

$$P_T = P_1 + P_2$$

که  $P_2$  ارزش فعلی پرداختهای مساوی از سال سوم تا سال هشتم است. اما برای محاسبه  $P_2$ ، مبدأ در سال دوم فرض می‌شود و سپس ارزش فعلی از سال دوم به سال مبدأ واقعی یعنی سال صفر انتقال می‌یابد:

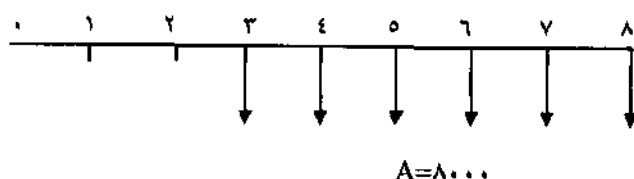
$$P_T = 50,000 + 5,000 (P/A, 8\%, 6) (P/F, 8\%, 2)$$

$$P_T = 50,000 + 5,000 (4/6229) (0/8573)$$

$$P_T = 69,816$$

- مثال ۱۳-۳. شرکت «گلریز» ماشینی را خریداری نموده است و قرار است از سال سوم

تا سال هشتم (برطبق فرایند مالی زیر)، پرداختهای مساوی معادل با ۸,۰۰۰ بپردازد. شرکت علاقمند است بداند که اگر نرخ بهره ۶٪ در سال فرض شود، پرداختهای مساوی و یکنواخت از سال اول تا سال هشتم چقدر است؟



حل: برای بدست آوردن پرداخت مساوی از سال اول تا سال هشتم (A) می‌توان از دو طریق عمل کرد:

طریق اول بدین ترتیب است که ارزش فعلی شش پرداخت، طبق شکل فوق در سال مبدا یعنی سال صفر بدست آید:

$$P = 8,000 (P/A, 6\%, 6) (P/F, 6\%, 2)$$

$$P_T = 35,011/2$$

و سپس A از P محاسبه گردد:

$$A = P (A/P, 6\%, 8)$$

$$A = 35,011/2 (0/16221)$$

$$A = 5,638/2$$

طریق دوم بدین ترتیب است که ابتدا ارزش آینده شش بار پرداخت مساوی، یعنی F محاسبه و سپس A را از F بدست آوریم:

$$F = 8,000 (F/A, 6\%, 6)$$

$$F = 55,800$$

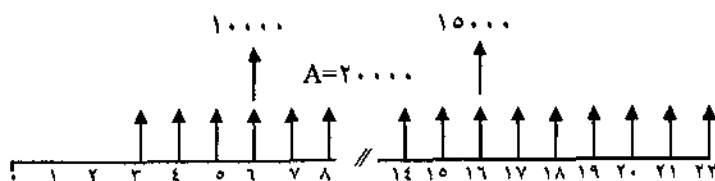
$$A = F (A/F, 6\%, 8)$$

$$A = 55,800 (0/10104)$$

$$A = 5,638$$

● مثال ۱۴-۳- ارزش فعلی فرایند مالی زیر را محاسبه کنید. نرخ بهره سالیانه ۶٪ فرض

شده است.



حل: متذکر می شود که مقدار  $A = 20,000$  از سال سوم تا سال بیست و دوم تکرار شده است. در سالهای ششم و شانزدهم نیز درآمد  $10,000$  و  $15,000$  وجود دارد. کلیه درآمدهای مساوی از سال سوم تا بیست و دوم ابتدا از طریق  $P/A$  به سال مبدا خود و سپس به مبدا واقعی یعنی سال صفر انتقال می یابد. ارزش فعلی کل ( $P_T$ ) عبارت خواهد بود از:

$$P_T = 20,000 (P/A, \%, 20) (P/F, \%, 2) + 10,000 (P/F, \%, 6) \\ + 15,000 (P/F, \%, 16) \\ P_T = 217,118$$

● مثال ۱۵-۳. مقدار درآمد مساوی یکنواخت را در فرآیند مالی مثال ۱۴-۳ محاسبه کنید.

حل: درآمد مساوی یکنواخت را از دو طریق می توان بدست آورد:  
الف: از طریق ارزش فعلی

$$A = P_T (A/P, \%, 22)$$

در مثال قبل  $P_T$  محاسبه شد. در این صورت تعیین  $A$  یا مقدار درآمد مساوی یکنواخت به سادگی عملی است:

$$A = 217,118 (0.08305)$$

$$A = 18,032$$

ب: از طریق ارزش آینده

باید ابتدا مقدار ارزش آینده کل ( $F_T$ ) محاسبه و سپس با استفاده از از فاکتور  $A, A/F$  تعیین شود.

$$F_T = 20,000 (F/A, \%, 20, 6) + 10,000 (F/P, \%, 6, 16) + 15,000 (F/P, \%, 6, 6)$$

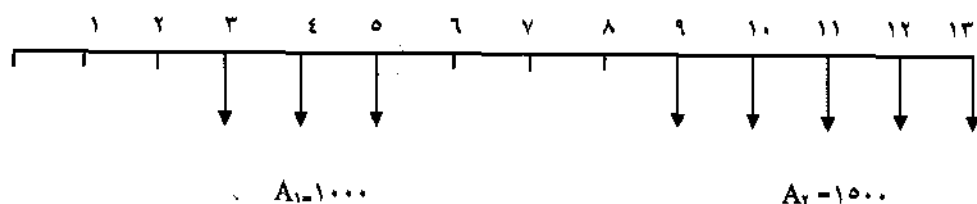
$$F_T = 782,381$$

$$A = F_T (A/F, \%, 6, 22)$$

$$A = 782,381 (0/02305)$$

$$A = 18,034$$

● مثال ۱۶-۳ ارزش فعلی را در فرآیند مالی زیر محاسبه کنید، اگر نرخ ۱۵٪ در سال فرض شود:



حل: محاسبه ارزش فعلی شکل فوق می تواند از طرق مختلف انجام شود که به توضیح دو طریق زیر می پردازیم:  
الف: از طریق ارزش فعلی

$$P_T = P_{A1} + P_{A2}$$

$$P_{A1} = A_1 (P/A, \%, 15, 3) (P/F, \%, 15, 2)$$

$$P_{A1} = 1,000 (2/283) (0/756)$$

$$P_{A1} = 1,726$$

$$P_{A2} = A_2 (P/A, \%, 15, 5) (P/F, \%, 15, 8)$$

$$P_{A2} = 1,500 (3/352) (0/327)$$

$$P_{A2} = 1,644$$

$$P_T = ۳,۳۷۰$$

ب: از طریق ارزش آینده

$$P_T = (F_{A1} + F_{A2}) (P/F, \%, ۱۵, ۱۳)$$

$$F_{A1} = ۱,۰۰۰ (F/A, \%, ۱۵, ۳) (F/P, \%, ۱۵, ۸)$$

$$F_{A1} = ۱۰,۶۲۱$$

$$F_{A2} = ۱,۵۰۰ (F/A, \%, ۱۵, ۵)$$

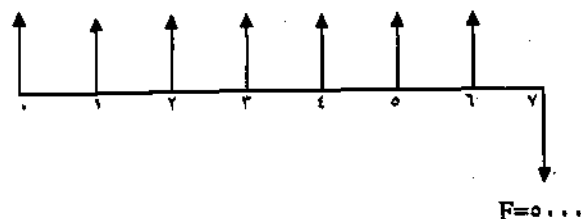
$$F_{A2} = ۱۰,۱۱۳$$

$$P_T = (۱۰,۶۲۱ + ۱۰,۱۱۳) (۰/۱۶۲۵)$$

$$P_T = ۳,۳۷۰$$

● مثال ۱۷-۳- فرآیند مالی شرکت «گلنار» بصورت زیر می باشد. ارزش فعلی شکل را اگر حداقل نرخ بهره جذب کننده سالانه ۸٪ فرض شود محاسبه نمایید.

$$A = ۴۶۰$$



$$P_T = ۴۶۰ + ۴۶۰ (P/A, \%, ۸, ۶) - ۵,۰۰۰ (P/F, \%, ۸, ۷)$$

حل:

$$P_T = -۳۳۱$$

توضیح اینکه ارزش فعلی ۴۶۰ در سال صفر، برابر با خودش بوده و از آنجا که فرآیند مالی سال هفتم هزینه می باشد، با علامت منفی نشان داده شده است.

## مسائل فصل سوم

در مسائل ۳-۱ تا ۳-۳ مقدار فاکتورهای خواسته شده را از طریق درونیابی خطی محاسبه نمایید:

a.  $(P/A, \%, ۸/۵, ۱۳)$  ● ۳-۱

b.  $(F/A, \%, ۳۷, ۲۴)$

c.  $(P/F, \%, ۷/۷, ۹)$

d.  $(A/F, \%, ۴۹, ۲۸)$

a.  $(F/P, \%, ۳, ۳۹)$  ● ۳-۲

b.  $(A/P, \%, ۱۰, ۹/۸)$

c.  $(A/F, \%, ۶, ۵۲)$

d.  $(P/F, \%, ۱۸, ۳۷)$

a.  $(P/F, \%, ۳/۸, ۷/۷)$  ● ۳-۳

b.  $(P/A, \%, ۹/۶, ۶۸)$

c.  $(F/A, \%, ۲۳, ۱۱/۶)$

d.  $(A/F, \%, ۱۷, ۲۳)$

● ۳-۴ اگر شما مبلغ ۵,۰۰۰ واحد پولی را در بانکی با نرخ ۱۸٪ در سال، به مدت ۱۲ سال پس انداز نمایید، اصل و فرع پس از مدت مذکور چقدر خواهد بود؟

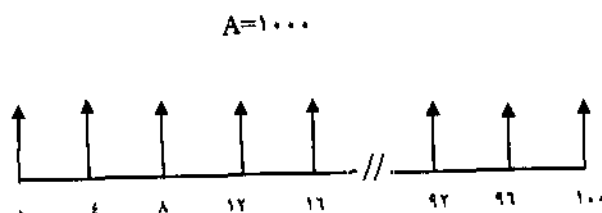
● ۳-۵ شخصی مبلغ ۴۵,۰۰۰ واحد پولی را با نرخ ۲۰٪ در سال قرض می‌کند و یکسال پس از قرض گرفتن، شروع به پرداخت اقساط سالانه خواهد نمود. اگر شخص بخواهد مبلغ مذکور را در ۵ قسط مساوی سالیانه بپردازد، قسط سالیانه را تعیین نمایید.



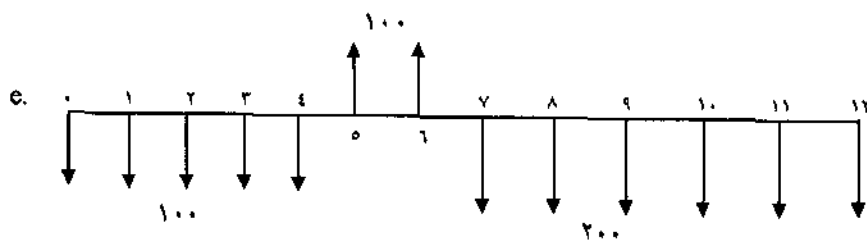
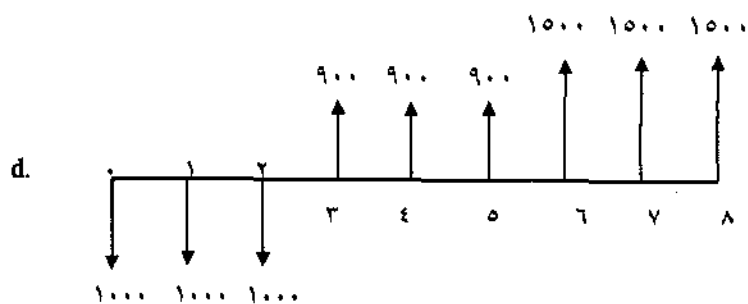
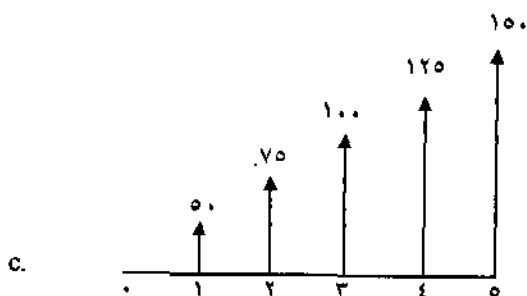
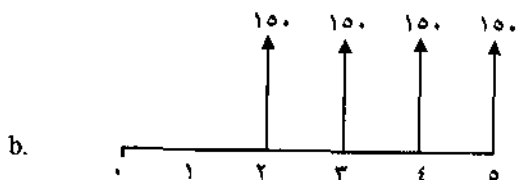
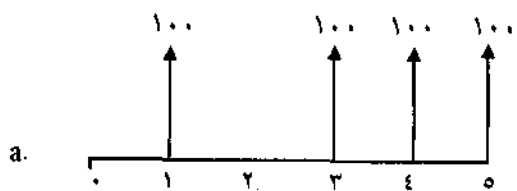
● ۳-۶. اگر شخصی ۸,۰۰۰ واحد پولی اکنون و ۱۶,۰۰۰ واحد پولی سه سال دیگر در چنین روزی در بانک پس انداز نماید، چند سال طول می کشد تا اصل و فرعی برابر با ۳۵,۰۰۰ واحد پولی از بانک دریافت نماید. نرخ بهره بانک ۱۰٪ در سال است.

● ۳-۷. شرکت «گلجو» طرحی برای بازنشتگی کارمندان خود دارد. کارمندان به مدت ۲۵ سال، هر سال ۷,۲۰۰ واحد پولی، حق بازنشتگی می پردازند و این پرداخت از پایان سال اول آغاز می شود. شرکت تضمین می نماید که در پایان دوره ۲۵ سال، مبلغ ۲۵۰,۰۰۰ واحد پولی به کارمندان بطور یکجا بپردازد. نرخ بازگشت سرمایه روی این طرح بازنشتگی چقدر است؟

● ۳-۸. مقدار ارزش فعلی را در فرآیند مالی زیر محاسبه کنید. نرخ بهره ۱۵٪ در سال می باشد.



● ۳-۹. مقدار ارزش فعلی را در فرآیندهای مالی زیر با نرخ بهره سالیانه ۱۵٪ در دوره محاسبه نمایید:

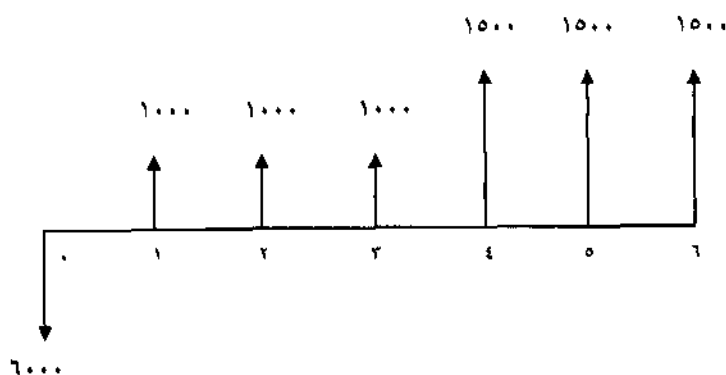


● ۳-۱۰ مقدار دریافت یکنواخت سالیانه را در مسئله شماره ۳-۸ معین نمایید.

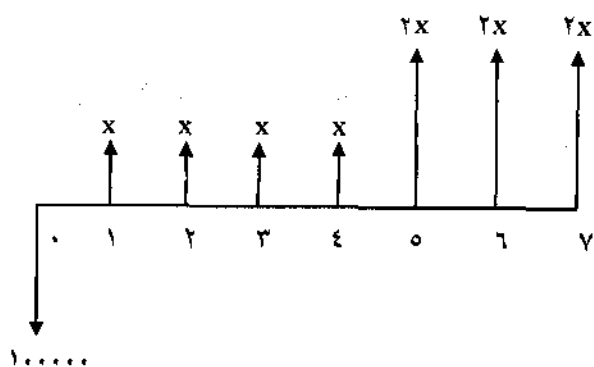
● ۳-۱۱ مقدار دریافت یکنواخت سالیانه را در مسئله شماره ۳-۹ قسمتهای  $a$  و  $b$  و  $c$  نمایید.

● ۳-۱۲ در مسئله ۳-۹ قسمت  $c$ ، هزینه یکنواخت سالیانه (هزینه سالیانه از سال ۱ تا ۱۲) را بدون در نظر گرفتن درآمدهای سال پنجم و ششم محاسبه نمایید.

● ۳-۱۳ پروژه‌ای با فرآیند مالی زیر به شرکت «گلپر» پیشنهاد شده است. حداقل نرخ جذب کننده شرکت برابر ۸٪ در سال است. آیا اجرای این پروژه را به شرکت توصیه می‌نمایید.



● ۳-۱۴ در فرآیند مالی زیر مقدار  $X$  را تعیین کنید. نرخ بهره سالیانه ۲۰٪ است.



● ۱۵-۳- در فرآیند مالی زیر مقدار  $X$  را محاسبه نمایید. نرخ بهره سالانه ۱۵٪ است.

